MATHEMATISCHE

ANNALEN





<36613773190013

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND C. NEUMANN,

PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

V. Band. 1. Heft.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND C. NEUMANN,

PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

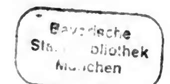
V. Band.

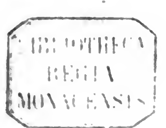


LEIPZIG,

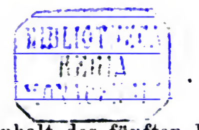
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.



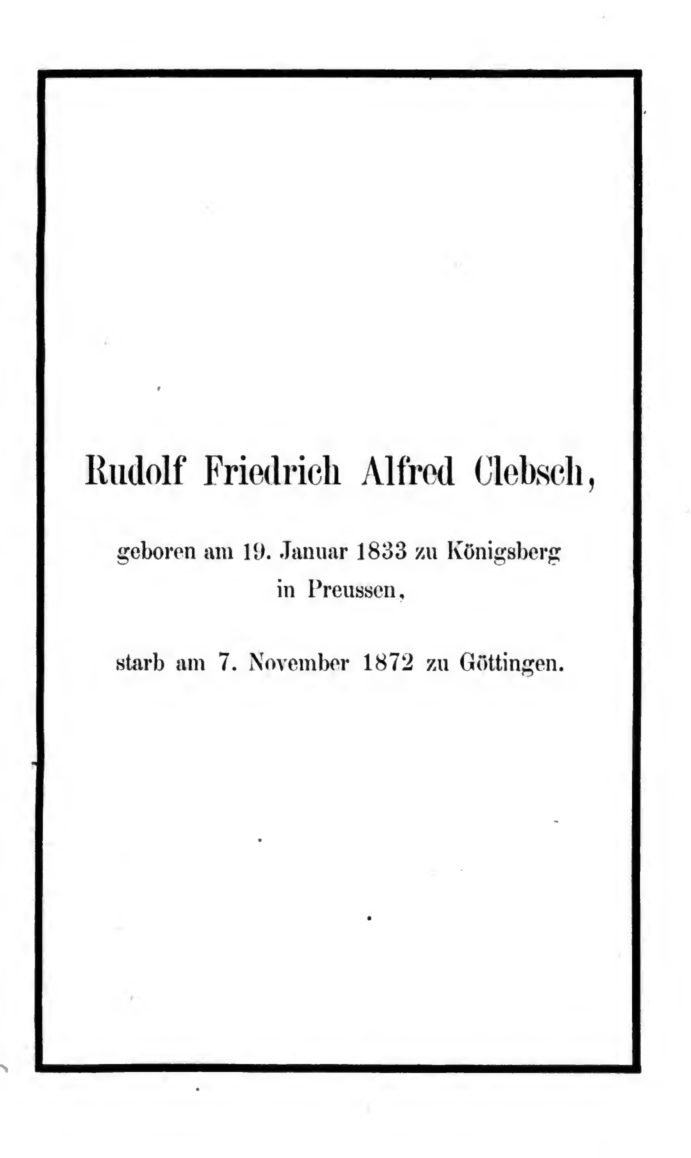






Inhalt des fünften Bandes.

(In alphabetischer Ordnung, abgesehen von einer an das Ende dieses Verzeichnisses gesetzten Preisaufgabe.)



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch,

geboren am 19. Januar 1833 zu Königsberg
in Preussen,

starb am 7. November 1872 zu Göttingen.

Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Unter den geradlinigen Flächen gestatten nur diejenigen die eindeutige Abbildung auf der einfachen Ebene, bei welchen das Geschlecht eines ebenen Schnittes $p = 0$ ist*); eine Zahl, welche zugleich das Geschlecht der Fläche genannt wird. Besondere Arten dieser Flächen sind von Herrn Cremona**) und Herrn Nöther***), sowie von mir selbst†) untersucht und abgebildet worden. Ich werde im Folgenden zeigen, wie die Abbildung aller solcher Flächen auf der Ebene sich darstellt; wobei denn zugleich gewisse Eigenschaften dieser Flächen und insbesondere eine einfache Eintheilung derselben sich ergeben.

§ 1.

Abbildung einer geradlinigen Fläche vom Geschlecht $p = 0$ auf einer Ebene.

Nehmen wir eine geradlinige Fläche n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p = 0$ an, und betrachten wir irgend zwei ebene Schnitte derselben.

Diese ebenen Schnitte sind vom Geschlechte $p = 0$; man kann daher die Coordinaten der beweglichen Punkte in jedem dieser Schnitte durch rationale Functionen eines Parameters gegeben denken; und zwar werden diese Functionen vom n^{ten} Grade sein, so lange die Ebenen der Schnitte nicht besondere Lagen haben, können aber sonst von niederem Grade werden. Ich nehme zunächst das erstere an, setze also die ebenen Schnitte als in allgemeiner Weise gewählt voraus.

Bezeichnen wir die Parameter für die beiden ebenen Curven durch λ und μ. Da beide Curven durch die Erzeugenden der Fläche eindeutig aufeinander bezogen sind, so muss für entsprechende Punkte λ durch μ, μ durch λ eindeutig und algebraisch gegeben sein. Daher muss zwischen λ, μ eine lineare Beziehung bestehen von der Form:

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0.$$

*) Schwarz, Borchardt's Journal, Bd. 67, p. 23.

**) Annali di mat., Ser. II. Bd. 1.

***) Annalen, Bd. III. p. 194.

†) Annalen, Bd. II. p. 445; Borchardt's Journal, Bd. 67. p. 17.

Indem man also statt μ eine gebrochene lineare Function von μ als Parameter einführt, kann man $\mu = \lambda$ setzen.

Bezeichnen wir nun die Ausdrücke der Coordinaten für die beweglichen Punkte der Curven durch:

$$(1) \qquad \varrho x_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

für die eine, und durch:

$$(2) \qquad \varrho x_i = \psi_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

für die andere, so ist durch:

$$(3) \qquad \varrho x_i = \varphi_i + \nu \psi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ein beliebiger Punkt einer Erzeugenden dargestellt, und die Gleichungen (3) geben also die Darstellung des beweglichen Punktes der Fläche durch rationale Functionen von λ, ν. Setzt man:

$$(4) \qquad \lambda = \frac{\eta}{\xi} \quad , \quad \nu = \frac{\zeta}{\xi} ,$$

und interpretirt man ξ, η, ζ als Dreieckscoordinaten in einer Ebene, so ist durch die Gleichungen:

$$(5) \qquad \varrho x_i = \xi \varphi_i(\xi, \eta) + \zeta \psi_i(\xi, \eta)$$

die Fläche eindeutig auf der Ebene abgebildet.

Die Abbildungsfunctionen sind von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die ebenen Schnitte bilden sich durch die Curvenschaar:

$$(6) \qquad \xi \Sigma u_i \varphi_i + \zeta \Sigma u_i \psi_i = 0$$

ab, also durch Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche bei $\xi = 0$, $\eta = 0$ einen $n$fachen, bei $\xi = 0$, $\zeta = 0$ einen einfachen Punkt haben.

Hieraus geht hervor, dass diese Bilder ebener Schnitte noch weitere Fundamentalpunkte haben müssen. Denn hätten sie keine solche, so wäre die Ordnung der Fläche:

$$(7) \qquad N = (n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n ,$$

also höher als n.

Man sieht aber sofort, dass die übrigen Fundamentalpunkte nur einfache sein können. Wäre einer derselben von höherer Ordnung, so würde die Verbindungslinie desselben mit dem $n$fachen Punkte, etwa die Gerade $\alpha\xi + \beta\eta = 0$ allen Bildern ebener Schnitte angehören, und $\alpha\xi + \beta\eta$ wäre also ein Factor aller Ausdrücke (5), d. h. aller φ_i und ψ_i, oder wenigstens, wenn $\alpha = 1$, $\beta = 0$ sein sollte, aller ψ_i. Die ebenen Schnitte, von denen wir ausgegangen, oder doch einer von ihnen, würden also durch rationale Functionen niederer Ordnung dargestellt, wären also nicht von der vorausgesetzten allgemeinen Beschaffenheit.

Damit also $N = n$ werde, muss das System der Bilder ebener Schnitte noch einfache Fundamentalpunkte enthalten. Die Bedeutung

derselben ist leicht zu übersehen. Denn für diese Fundamentalpunkte müssen die Ausdrücke:

$$\xi \varphi_i + \zeta \psi_i$$

sämmtlich verschwinden; es werden also die Coordinaten φ_i des entsprechenden Punktes in dem einen ebenen Schnitte den Coordinaten ψ_i des entsprechenden im andern proportional, diese Punkte also fallen zusammen in diesen gemeinsamen Punkt beider Schnitte. Diese Werthepaare ξ, η gehören daher den Erzeugenden an, welche durch die Schnittpunkte der Schnittlinie beider ebenen Schnitte und der Fläche gehen; deren Zahl denn auch in der That gleich n ist. Und jene n Fundamentalpunkte stellen also diese n Erzeugenden dar; ihre Verbindungslinien aber mit dem $n$fachen Fundamentalpunkte stellen die erwähnten n Punkte selbst dar, da für sie die x den φ oder ψ proportional werden, ohne doch zu verschwinden.

Dagegen repräsentirt der Fundamentalpunkt $\xi = 0$, $\zeta = 0$ eine ganz beliebige Erzeugende der Fläche; man braucht nur statt ξ, entsprechend einer quadratischen Transformation der Bildebene, die neue Veränderliche:

$$\zeta' = \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)\zeta}{\xi}$$

einzuführen, und an Stelle von $\xi = 0$, $\zeta = 0$ tritt dann $\alpha\xi + \beta\eta = 0$, $\zeta' = 0$, also an Stelle der Erzeugenden ξ eine beliebige andre Erzeugende $\alpha\xi + \beta\eta = 0$. Die Verbindungslinie dieser Fundamentalpunkte mit dem $n$fachen aber repräsentirt denjenigen Punkt des zweiten ebenen Schnittes ($\varrho x_i = \psi_i$), in welchem derselbe von dieser Erzeugenden getroffen wird. Endlich stellt der $n$fache Fundamentalpunkt ($\xi = 0$, $\eta = 0$) diesen beliebig gewählten zweiten ebenen Schnitt ($\varrho x_i = \psi_i$) selbst dar.

Man kann nun noch in jedem Falle die vorhergehende Darstellung dadurch modificiren, dass man den einen der beiden ebenen Schnitte durch eine Erzeugende legt. Indessen treten hierbei schon Verschiedenheiten unter den betrachteten Flächen, auch denen von gleicher Ordnung, hervor.

§ 2.

Quadratische Transformationen.

Denken wir uns irgend eine Abbildung der vorliegenden Fläche, bei welcher die ebenen Schnitte sich als ebene Curven $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem gemeinsamen $(\varkappa - 1)$fachen Punkte darstellen. Damit die abgebildete Fläche von der Ordnung n sei, müssen dann noch:

$$\varkappa^2 - (\varkappa - 1)^2 - n = 2\varkappa - n + 1$$

einfache Fundamentalpunkte vorhanden sein. Von diesen Fundamental-

punkten können niemals zwei in einer Geraden mit dem $(\varkappa - 1)$fachen Punkte liegen.

Aus der Zahl, welche für diese Punkte gegeben wurde, folgt, dass nothwendig:

$$\varkappa \geqq \frac{n-1}{2};$$

und man sieht also, dass Flächen der betrachteten Art niemals durch Abbildungsfunctionen dargestellt werden können, deren Ordnung kleiner als $\frac{n-1}{2}$ ist.

Sind aber wenigstens zwei einfache Fundamentalpunkte vorhanden, so kann man im Allgemeinen immer mit Hilfe einer quadratischen Transformation die Ordnung der Abbildung erniedrigen. Als Ecken des Fundamentaldreiecks der Transformation benutzt man dabei zunächst den $(\varkappa - 1)$ fachen und zwei einfache Fundamentalpunkte; doch sind gewisse Fälle nicht ausgeschlossen, in denen ein solches Dreieck im eigentlichen Sinne nicht mehr existirt.

Seien die Abbildungsgleichungen:

$$(1) \qquad \varrho x_i = \varphi_i(\xi, \eta) + \zeta \psi_i(\xi, \eta),$$

wo nun die Functionen φ vom Grade $\varkappa$, die Functionen ψ vom Grade $\varkappa - 1$ sind. Der Charakter derselben ändert sich nicht, wenn man statt ζ die neue Veränderliche:

$$\zeta' = \zeta + \alpha\xi + \beta\eta$$

einführt, nur dass an Stelle der φ dann die Ausdrücke:

$$\varphi_i' = \varphi_i + (\alpha\xi + \beta\eta)\psi_i$$

treten. Diese Aenderung entspricht der Abänderung einer Seite $(\zeta = 0)$ des Coordinatendreiecks, während die Ecke $\xi = 0$, $\eta = 0$ und die durch sie gehenden Seiten ungeändert bleiben. Ebenso wenig ändert sich der Charakter der Gleichung (1) durch lineare Transformation der ξ, η, was nur einer Aenderung der letzterwähnten Seiten entspricht.

Haben wir also zunächst zwei einfache Fundamentalpunkte, welche getrennt von einander und auch von dem $(\varkappa - 1)$ fachen liegen, so nehmen wir diese 3 Punkte zum neuen Coordinatendreieck. Aber die Punkte $\zeta' = 0$, $\xi' = 0$ und $\zeta' = 0$, $\eta' = 0$ sind jetzt Fundamentalpunkte; daher müssen alle Functionen φ' die Factoren ξ', η' haben, und die Abbildungsgleichungen die Form annehmen:

$$\varrho x_i = \xi'\eta'\chi_i + \zeta'\psi_i.$$

Mittelst der Substitution:

$$\zeta\zeta' = \xi'\eta'$$

erhält man also die neue Form:

$$\varrho x_i = \psi_i + \zeta''\chi_i,$$

deren Abbildungsfunctionen einen um 1 niedrigeren Grad besitzen.

Sind zweitens die beiden einfachen Fundamentalpunkte zwar noch von dem $(\varkappa - 1)$ fachen, aber nicht mehr von einander, in endlicher Entfernung, so berühren sich also an einer gewissen Stelle alle Bilder ebener Schnitte, und indem man $\xi' = 0$ die Verbindungslinie dieser Stelle mit dem $(\varkappa - 1)$ fachen Punkte, $\zeta' = 0$ die gemeinsame Tangente aller Bilder ebener Schnitte an jener Stelle nennt, müssen die Abbildungsgleichungen die Form annehmen:

$$\varrho x_i = \xi'^2 \chi_i + \zeta' \psi_i ;$$

die Substitution:

$$\zeta' \zeta'' = \xi'^2$$

führt also wieder auf Abbildungsgleichungen

$$\varrho x_i = \psi_i + \zeta'' \chi_i$$

von einer um 1 niedern Ordnung.

Drittens rücke einer der einfachen Fundamentalpunkte dem $(\varkappa - 1)$ fachen unendlich nahe, während der andere in endlicher Entfernung bleibt. Die gemeinsame Tangente, welche alle Bildcurven ebener Schnitte dann in dem $(\varkappa - 1)$ fachen Punkte haben, sei $\xi' = 0$; die Verbindungslinie des $(\varkappa - 1)$ fachen mit dem endlich entfernten einfachen Fundamentalpunkte sei $\eta' = 0$; $\zeta' = 0$ endlich gehe durch den letztern. Die Ausdrücke ψ, welche gleich Null gesetzt die Tangenten des $(\varkappa - 1)$ fachen Punktes für die Bilder der Schnitte $x_i = 0$ liefern, müssen dann den Factor ξ' haben; die φ_i aber, da $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$ ein Fundamentalpunkt ist, den Factor η'. Somit werden die Abbildungsgleichungen:

$$\varrho x_i = \eta' \chi_i + \zeta' \xi' \vartheta_i .$$

Durch die Substitution:

$$\zeta' \xi' = \zeta'' \eta'$$

gehen sie in die Form:

$$\varrho x_i = \chi_i + \zeta'' \vartheta_i$$

über, in welcher die Ordnung der Abbildungsfunctionen um 1 niedriger ist.

Es seien endlich die beiden einfachen Fundamentalpunkte einander und dem $(\varkappa - 1)$ fachen unendlich nahe, aber auf demselben Zweige des $(\varkappa - 1)$ fachen Punktes gelegen. Dann berühren sich also die sämmtlichen Bildcurven ebener Schnitte in einem Zweige des vielfachen Punktes so, dass sie neben diesem noch 2 benachbarte Punkte des Zweiges gemein haben. Nehmen wir $\xi' = 0$ zur Tangente dieses Zweiges; die Ausdrücke ψ_i, welche gleich Null gesetzt die Tangenten des $(\varkappa - 1)$ fachen Punktes für die Bilder der Schnitte $x_i = 0$ liefern, müssen dann sämmtlich den Factor ξ' haben, so dass:

$$\psi_i = \xi' \chi_i .$$

Suchen wir nun die gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven:

$$\varphi_i + \zeta \psi_i = 0 , \quad \varphi_\varkappa + \zeta \psi_\varkappa = 0 ,$$

so finden wir die Werthe von $\frac{\xi}{\eta}$, welche den nicht in den $(\varkappa - 1)$ fachen Punkt fallenden Schnittpunkten entsprechen, indem wir:

$$\varphi_i \psi_\varkappa - \psi_i \varphi_\varkappa = \xi' (\varphi_i \chi_\varkappa - \chi_i \varphi_\varkappa) = 0$$

setzen. Im vorliegenden Falle muss der Ausdruck links 2 Factoren ξ' enthalten. Einen enthält er schon, weil die ψ einen solchen haben; der Ausdruck $\varphi_i \chi_\varkappa - \chi_i \varphi_\varkappa$ muss ihn also nochmals besitzen, d. h. man hat:

$$\varphi_i = \omega \chi_i + \xi' \vartheta_i,$$

wo ω ein quadratischer Ausdruck ist, und die ϑ Functionen $(\varkappa - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten.

Die Abbildungsgleichungen für diesen Fall werden also:

$$\varrho x_i = \xi' \vartheta_i + (\omega + \zeta \xi') \chi_i .$$

Die quadratische Substitution:

$$\omega + \zeta \xi' = \zeta' \xi'$$

führt daher diese Gleichungen in die Form:

$$\varrho x_i = \vartheta_i + \zeta' \chi_i$$

über, wo die Ordnung der Abbildungsfunctionen um 1 niedriger ist.

So ist denn gezeigt, wie in allen Fällen die quadratische Transformation eine Erniedrigung der Abbildungsfunctionen herbeiführt, *ausser wenn die beiden einfachen Fundamentalpunkte einander und dem* $(\varkappa - 1)$ *fachen Punkte auf verschiedenen Zweigen des letztern unendlich genähert werden.* Wenn wir in diesem Falle durch $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ die festen Tangenten des $(\varkappa - 1)$ fachen Punktes bezeichnen, so sind die Abbildungsgleichungen:

$$\varrho x_i = \varphi_i + \zeta \xi' \eta' \chi_i ;$$

sie sind nicht in ähnlicher Weise wie die vorigen der Reduction fähig.

§ 3.

Reduction der Abbildung mittelst quadratischer Transformationen. Flächengruppen.

Aus dem Vorigen geht hervor, dass man die in § 1. entwickelte Abbildung so lange mit Hilfe quadratischer Transformationen erniedrigen kann, bis entweder sämmtliche einfache Fundamentalpunkte einzeln auf verschiedenen Zweigen der Bildcurven ebener Schnitte dem festen vielfachen Punkte unendlich nahe gerückt sind, oder bis überhaupt nur noch ein einziger einfacher übrig ist. Gehen wir von den Abbildungsfunctionen $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus, wie sie in § 1. gegeben wurden, so kann man den ersten Schritt immer thun, und die Abbildungsfunctionen auf die n^{te} Ordnung zurückführen; aber nicht in allen Fällen

kann man weiter gehen. Wenn die Erniedrigung bis zur $(n - \alpha + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung getrieben werden kann, so wollen wir die Flächen als *der* α^{ten} *Gruppe geradliniger Flächen* n^{ter} *Ordnung vom Geschlechte* $p = 0$ *angehörig* bezeichnen. Die Abbildungsgleichungen haben dann die Gestalt:

$$\varrho x_i = \varphi_i + \zeta M \psi_i ,$$

wo die φ Functionen $(n - \alpha + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von ξ, η, die ψ solche der Ordnung $\alpha - 1$, endlich M eine der Ordnung $n - 2\alpha + 1$ bezeichnet. Die ebenen Schnitte werden bei einer Fläche dieser Gruppe durch Curven der Ordnung $n - \alpha + 1$ abgebildet, welche einen $(n - \alpha)$ fachen Punkt mit $n - 2\alpha + 1$ festen Tangenten ($M = 0$) haben. Da $n - 2\alpha + 1$ also positiv oder Null sein muss, so ist nothwendig:

$$\alpha \overline{\gtrless} \frac{n+1}{2} ,$$

was der im Anfange des § 2. gegebenen Begrenzung der dort durch $\varkappa$ bezeichneten Zahl entspricht.

Für ein ungerades n sind die Gruppen also folgende:

Gruppe (α).	Ordnung der Bildcurven ebener Schnitte $(n - \alpha + 1)$.	Ordnung des vielfachen Punktes $(n - \alpha)$.	Zahl seiner festen Tangenten $(n - 2\alpha + 1)$.
1	n	$n - 1$	$n - 1$
2	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$
3	$n - 2$	$n - 3$	$n - 5$
⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	0

Dagegen für ein gerades n wird dieselbe Tafel:

1	n	$n - 1$	$n - 1$
2	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$
3	$n - 2$	$n - 3$	$n - 5$
⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{n}{2}$	$\frac{n+2}{2}$	$\frac{n}{2}$	1

Zu letzteren tritt noch eine $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{\text{te}}$ Gruppe hinzu; sie entsteht durch den oben vorgesehenen Fall (welcher nur bei geradem n eintreten kann), dass nur ein einziger einfacher Fundamentalpunkt übrig bleibt, während keine festen Tangenten des vielfachen Punkts zu Stande gekommen sind. In diesem Falle mag $\xi = 0$, $\zeta = 0$ der übrigge-

bliebene einfache Fundamentalpunkt sein; man darf ihn von dem vielfachen endlich entfernt annehmen, da man sonst auf die $\frac{n}{2}$te Gruppe zurückkommen würde. Die Abbildungsgleichungen werden dann:

$$\varrho x_i = \xi \varphi_i + \zeta \psi_i ,$$

wo die φ, ψ von der Ordnung $\frac{n}{2}$ sind. Die der obigen Tafel für diesen Fall entsprechenden Zahlen werden also:

$$\frac{n+2}{2} \quad \Big| \quad \frac{n+2}{2} \quad \Big| \quad \frac{n}{2} \quad \Big| \quad 0 .$$

Von diesen Gruppen, deren Zahl bei ungeradem n gleich $\frac{n+1}{2}$, bei geradem gleich $\frac{n+2}{2}$ ist, kann man die erste Gruppe vermöge ihres besondern Charakters ausscheiden. Die Flächen dieser Gruppe haben die Gleichungen:

$$\varrho x_i = \varphi_i + \zeta M c_i ,$$

wo die c Constante. Eine solche Fläche entsteht aus den Verbindungslinien eines Punkts c mit den Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung:

$$\varrho x_i = \varphi_i .$$

Diese Gruppe enthält also die Kegel n^{ter} Ordnung, deren ebene Schnitte Curven vom Geschlechte $p = 0$ sind.

Die α^{te} Gruppe ($\alpha > 1$) ist folgendermassen geometrisch zu charakterisiren. *Ihre Flächen enthalten eine einfache Leitcurve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:*

$$(1) \qquad \varrho x_i = \psi_i ,$$

welche durch den vielfachen Fundamentalpunkt abgebildet wird.

Eine solche Curve kann bei keinem grössern α vorkommen. Denn bei der β^{ten} Gruppe wird die Fläche erzeugt durch 2 einfache Leitcurven der Ordnungen $n - \beta + 1$ und $\beta - 1$:

$$\varrho x_i = \varphi_i \quad , \quad \varrho x_i = \psi_i .$$

Existirte auf einer solchen Fläche eine einfache Leitcurve der Ordnung $\alpha - 1$, wo $\alpha < \beta$, so könnte man die Fläche aus den Leitcurven $(n - \beta + 1)^{\text{ter}}$ und $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen, und ihre Ordnung wäre:

$$n - (\beta - \alpha) ,$$

also kleiner als n.

Aber ebenso wenig kann in der α^{ten} Gruppe eine Fläche *zwei* einfache Leitcurven $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten. Denn alsdann könnte sie aus diesen beiden erzeugt werden, und ihre Ordnung wäre $2\alpha - 2$, also kleiner als n.

Die oben eingeführten Gruppen sind also charakterisirt durch die Ordnung derjenigen einzelnen einfachen Leitcurve niedrigster $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Fläche enthält.

Zur genauen Feststellung dessen, was hier unter einer einfachen Leitcurve verstanden wird oder deren Stelle ersetzen kann, bemerke ich noch Folgendes. Die einfache Leitcurve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung war durch die Gleichungen (1) gegeben. Nun kann es vorkommen, dass wegen der besondern Natur der Functionen ψ dieselben durch eine Substitution s^{ter} Ordnung:

$$\lambda = \frac{v(\xi, \eta)}{\omega(\xi, \eta)}$$

in Functionen r^{ter} Ordnung von λ übergeführt werden können, wo $rs = \alpha - 1$. In diesem Falle haben wir keine eigentliche einfache Leitcurve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sondern statt dessen eine r fache Leitcurve s^{ter} Ordnung vor uns. Sagen wir also:

Die einfache Leitcurve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung kann durch eine r fache Leitlinie s^{ter} Ordnung vertreten werden, wo $rs = \alpha - 1$.

Diese Ausartung der einfachen Leitlinie soll im Folgenden immer in dem Ausdruck „einfache Leitcurve" mit einbegriffen sein.

Eine Ausnahme für die obigen Betrachtungen macht nur die letzte Gruppe $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, welche bei geradem n hinzutritt. Die ebenen Schnitte werden in diesem Falle abgebildet durch Curven der Ordnung $\frac{n}{2} + 1$ mit einem $\frac{n}{2}$ fachen und einem einfachen Fundamentalpunkte. Die Geraden durch erstere sind, wie auch in allen andern Fällen, Bilder der Erzeugenden; die Geraden durch den einfachen Fundamentalpunkt aber, $\zeta = \varkappa\xi$, führen auf eine einfach unendliche Curvenschaar der Ordnung $\frac{n}{2}$ und vom Geschlecht $p = 0$:

$$(1) \qquad \varrho x_i = \varphi_i + \varkappa\psi_i,$$

welche $\varkappa$ als Parameter enthält. Die Fläche wird daher erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte irgend zweier Curven dieser Schaar. In der That, die Punkte dieser Verbindungslinien sind durch die Gleichungen:

$$\varrho x_i = (\varphi_i + \varkappa\psi_i) + \lambda(\varphi_i + \varkappa'\psi_i)$$

gegeben, was durch die Einführung der Veränderlichen:

$$\zeta = \xi \cdot \frac{\varkappa + \varkappa'\lambda}{1 + \lambda}$$

in die Flächengleichungen:

$$\varrho x_i = \xi\varphi_i + \zeta\psi_i$$

übergeht. Eben deswegen aber kann auf der Fläche keine einfache Leitlinie existiren, deren Ordnung kleiner als $\frac{n}{2}$ ist; denn eine solche würde zusammen mit einer Curve der Schaar eine Fläche niederer Ordnung erzeugen.

Auf der letzten Gruppe der Flächen gerader Ordnung giebt es also keine einzelne Leitcurve niedrigster Ordnung, sondern statt dessen eine einfach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $\frac{n}{2}$.

§ 4.

Bedeutung der Fundamentalpunkte.

Sehen wir von dieser letzten Gruppe ab, so enthalten die Bilder nur einfache Fundamentalpunkte, welche dem vielfachen unendlich nahe liegen. Da die Abbildungsgleichungen:

$$\varrho x_i = \varphi_i + \zeta M \psi_i$$

sind, so findet man sie aus $M = 0$, während zugleich ξ und η unendlich klein werden; sie repräsentiren also die $n - 2\alpha + 1$ Erzeugenden, deren Werthepaare $\frac{\xi}{\eta}$ aus der Gleichung $M = 0$ hervorgehen. Dieselben Werthverhältnisse von ξ, η, wenn ξ und η nicht unendlich klein gesetzt werden, stellen die durch die entsprechenden Werthe:

$$\varrho x_i = \varphi_i$$

gegebenen Punkte dar. Es geben also die Fundamentalpunkte gewisse $n - 2\alpha + 1$ Erzeugende, während zu den entsprechenden festen Tangenten des vielfachen Punktes sich diejenigen Punkte jener Erzeugenden ausbreiten, in welchen sie die Raumcurve $(n - \alpha + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\varrho x_i = \varphi_i \tag{1}$$

schneiden.

Ohne den Charakter der Abbildung zu ändern, kann man aber die Fläche durch die Gleichungen:

$$\varrho x_i = \varphi_i' + \zeta' M \psi_i$$

darstellen, wo:

$$\varphi_i' = \varphi_i - (a\xi + b\eta) M \psi_i$$
$$\zeta' = \zeta + a\xi + b\eta .$$

Die Raumcurve (1) gehört also einer doppelt unendlichen Schaar von Curven $(n - \alpha + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\varrho x_i = \varphi_i - (a\xi + b\eta) M \psi_i \tag{2}$$

an, und ist eine ganz beliebige unter ihnen. In der Darstellung der Fläche:

$$\varrho x_i = \varphi_i + \zeta M \psi_i$$

werden diese Curven durch die Gleichung:

$$\zeta + a\xi + b\eta = 0$$

abgebildet, also durch die Geraden der Ebene.

Aber der Charakter der Abbildung wird auch durch die Substitution:

$$(3) \qquad M\zeta = M'\zeta'$$

nicht geändert, wo M' eine beliebige andere Function $(n - 2\alpha + 1)^{\text{ten}}$ Grades von ξ, η ist. *Die $(n - 2\alpha + 1)$ Erzeugenden, welche durch die dem vielfachen unendlich nahen einfachen Fundamentalpunkte abgebildet werden, kann man also ganz beliebig wählen.* Zugleich sieht man, dass in Folge dessen die Lage des Büschels fester Tangenten, welche der vielfache Punkt der Abbildung zulässt, völlig beliebig und daher von der Natur der Fläche unabhängig ist.

Haben wir diese Erzeugenden irgendwie gewählt, und also eine neue Function M' eingeführt, so tritt nun an Stelle des Curvensystems (2) das folgende:

$$(4) \qquad \varrho x_i = \varphi_i - (a\xi + b\eta)\, M'\psi_i\,.$$

Man sieht also, dass es eigentlich ein System von Raumcurven $(n-\alpha+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(n - 2\alpha + 3)$ willkürlichen Parametern:

$$(5) \qquad \varrho x_i = \varphi_i + N\psi_i$$

ist, deren Glieder mit der einfachen Leitcurve zusammen zur Erzeugung der Fläche beliebig benutzt werden können. Ist aber das System der $n - 2\alpha + 1$ Erzeugenden zur Herstellung der Abbildung gewählt, so scheidet sich aus dem $(n - 2\alpha + 3)$ fach unendlichen Systeme (5) ein doppelt unendliches (4) aus, welches die Geraden der Bildebene liefert. Nur *eine* dieser Curven kann dann noch willkürlich angenommen werden; die übrigen sind dadurch bestimmt, dass sie mit jenen $n - 2\alpha + 1$ Erzeugenden dieselben festen Schnittpunkte haben. In der Abbildung entspricht dieses dem Umstande, dass alle Geraden der Ebene die betreffenden $n - 2\alpha + 1$ Strahlen $(M' = 0)$ schneiden, während doch jeder derselben, abgesehen von dem auf ihm liegenden einfachen Fundamentalpunkte, nur einen einzigen Punkt darstellt.

Die letzte Gruppe der Flächen gerader Ordnung muss auch hier wieder besonders betrachtet werden. Die Geraden durch $\xi = 0$, $\eta = 0$ stellen die Erzeugenden, die Geraden durch den einfachen Fundamentalpunkt $(\xi = 0,\ \zeta = 0)$ die Schaar von Curven $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung (§ 3. (1)) dar. Aber der $\frac{n}{2}$ fache Fundamentalpunkt stellt selbst eine Curve der letztern Schaar:

$$\varrho x_i = \psi_i\,,$$

der einfache Fundamentalpunkt selbst eine Erzeugende:

$$\varrho x_i = \varphi_i(0,\ 1) + \varkappa\psi_i(0,\ 1)$$

dar; die Gerade $\xi = 0$ endlich stellt den beiden gemeinsamen Punkt:

$$\varrho x_i = \psi_i(0,\ 1)$$

dar. So ist aus der Schaar der Erzeugenden eine bestimmte ausgesondert, ebenso eine aus der Schaar von Curven $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Fläche enthält. Man überzeugt sich leicht, dass beide beliebig gewählt werden können, und dass durch Wahl derselben erst die Abbildung charakterisirt ist. Die Abbildungsgleichungen der Fläche können nämlich in der Form geschrieben werden:

$$\varrho x_i = (\zeta + \alpha \xi)(\varphi_i - \beta \psi_i) - (\zeta + \beta \xi)(\varphi_i - \alpha \psi_i).$$

Durch die Substitution:

$$\frac{\zeta'}{\xi'} = -\frac{\zeta + \beta \xi}{\zeta + \alpha \xi}, \quad \xi' = a \xi + b \eta$$

geht dies nun in die Form:

$$\varrho x_i = \xi' \varphi_i' + \zeta' \psi_i'$$

über, wo jetzt an Stelle der Erzeugenden $\xi = 0$ die beliebige andere $\xi' = 0$, an Stelle der Curve:

$$\varrho x_i = \psi_i$$

die beliebige andere:

$$\varrho x_i = \psi_i' = \varphi_i - \alpha \psi_i$$

getreten ist. Geometrisch führt man eine Abbildung in die andere sofort über, indem man sich eines Fundamentaldreiecks bedient, welches die beiden Fundamentalpunkte einer Abbildung zu Ecken hat.

§ 5.

Gruppirung der Flächen bezüglich ihrer Punkte und ihrer Tangentenebenen.

Bei dem dualistischen Charakter, welchen die geradlinigen Flächen besitzen, kann man der Abbildung ihrer Punkte durch Punkte einer Ebene immer in ganz gleicher Weise die Abbildung ihrer Tangentenebene durch Punkte einer Ebene gegenüberstellen. Bezeichnet man ersteres als *Punkt-Abbildung* der Fläche, so werde ich das letztere als ihre *Ebenen-Abbildung* bezeichnen.

Der Gruppirung der Flächen nach ihrer Punkt-Abbildung, welche in den vorigen §§ behandelt wurde, tritt eine solche nach ihrer Ebenen-Abbildung nunmehr gegenüber. Die Gruppen sind hier gebildet nach der Classe der niedrigsten abwickelbaren Fläche, welche aus einer einfach unendlichen Reihe von Tangentenebenen der gegebenen Fläche gebildet werden kann. Ihre Anzahl ist ebenso gross wie im Obigen die Anzahl der Gruppen nach der Punkt-Abbildung. Es entsteht also ein quadratisches Schema, in welches die geradlinigen Flächen eingeordnet werden können, und dessen Rubriken nach den Gruppen der Punkt-Abbildung einerseits, und nach denen der Ebenen-Abbildung

andererseits geordnet sind. Nur der ersten Gruppe der Punkt-Abbildung entsprechen lauter Flächen, welche der Ebenen-Abbildung nicht fähig sind, indem sie nur eine einfach unendliche Reihe von Tangentenebenen besitzen, es sind die Kegel n^{ter} Ordnung. Ebenso wird die erste Gruppe der Ebenen-Abbildung von Flächen gebildet, welche keiner Punkt-Abbildung fähig sind, indem sie nur eine einfach-unendliche Punktreihe enthalten; dies sind die ebenen Curven n^{ter} Classe. Ausserdem nehmen die abwickelbaren Flächen und die Raumcurven eine Ausnahmestellung ein; denn erstere ordnen sich gewissen Gruppen der Punkt-Abbildung zu, ohne dass sie in den Gruppen der Ebenen-Abbildung eine Stelle finden könnten, und umgekehrt verhalten sich die letztern, welche man zwar als geradlinige Flächen in Ebenencoordinaten, aber nicht als solche in Punktcoordinaten ansehen kann.

Um dieses auf die einfachsten Fälle anzuwenden, will ich die Gruppirung der geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$ für $n = 2$, 3, 4 hieher setzen. Eine Fläche, welche der α^{ten} Gruppe der Punkt-Abbildung, der β^{ten} Gruppe der Ebenen-Abbildung angehört, mag die Charakteristik (α, β) erhalten. Bei den Flächen 2ter Ordnung gehört dann der Kegel der ersten Gruppe der Punkt-Abbildung, die Curve 2ter Ordnung der ersten Gruppe der Ebenen-Abbildung an; alle andern Flächen 2ter Ordnung haben die Charakteristik (2, 2), und es existirt nur diese einzige Gruppe. Ebenso existirt ausser Kegeln und ebenen Curven 3ter Ordnung nur eine einzige Gruppe von geradlinigen Flächen 3ter Ordnung; sie erhält die Charakteristik (2, 2). Diese Flächen entstehen bekanntlich ebenso aus Verbindung entsprechender Punkte einer Geraden und einer Curve 3ter Ordnung vom Geschlechte $p = 0$, wie aus den Durchschnitten entsprechender Ebenen eines einfachen Ebenenbüschels und einer abwickelbaren Fläche 3ter Classe vom Geschlechte $p = 0$.

Was die geradlinigen Flächen 4ter Ordnung vom Geschlechte $p = 0$ angeht, so führe ich nur die folgende Classification von Cremona an (Memorie dell' accademia di Bologna, t. 8. ser. 2.), indem ich zugleich wegen der Eigenschaften der verschiedenen Species mich auf jene Abhandlung beziehe:

Species.	Doppelcurve.	Doppeldeveloppable.
1.	Curve 3ter O.	Abwickelb. Fl. 3ter Cl.
2.	Curve 2ter O. + Gerade R	Kegel 2ter O. + Ebenenbüschel R
3.	Gerade R (dreifach)	Kegel 2ter O. + Ebenenbüschel R
4.	Curve 2ter O. + Gerade R	Ebenenbüschel R (dreifach)
5.	Gerade R, R', S	Ebenenbüschel R, R', S

Species.	Doppelcurve.	Doppeldeveloppable.
6.	Gerade R (doppelt) + Gerade S	Ebenenbüschel R (doppelt) + Ebenenbüschel S
7.	Curve 3ter O.	Ebenenbüschel R (dreifach)
8.	Gerade R (dreifach)	Abwickelb. Fl. 3ter Cl.
9.	Gerade R (dreifach)	Ebenenbüschel R' (dreifach)
10.	Gerade R (dreifach)	Ebenenbüschel R (dreifach).

Sehen wir vom Kegel und der ebenen Curve 3ter Classe ab, so erhalten wir 4 Gruppen mit den Charakteristiken:

$$(2,\ 2)\quad,\quad(3,\ 2)\quad,\quad(2,\ 3)\quad,\quad(3,\ 3),$$

und zwar enthalten dieselben folgende Species:

$$(2,\ 2)\ :\ 9,\ 10.\qquad(2,\ 3)\ :\ 4,\ 7.$$
$$(3,\ 2)\ :\ 3,\ 8.\qquad(3,\ 3)\ :\ 1,\ 2,\ 5,\ 6.$$

Die Flächen der Gruppe (2, 2) enthalten eine einfache Leitlinie und ein einfach berührendes Ebenenbüschel, dessen Axe nicht Erzeugende ist*); bei den Flächen der Gruppe (3, 2) existirt ersteres nicht mehr, bei der Gruppe (2, 3) letzteres, bei (3, 3) keines von beiden.

§ 6.

Uebergang von der Punkt-Abbildung zur Ebenen-Abbildung.

Der Uebergang von der Punkt-Abbildung zur Ebenen-Abbildung geschieht auf folgende Weise. Seien:

$$(1)\qquad \varrho x_i = \varphi_i + \zeta\psi_i$$

die Gleichungen einer Punkt-Abbildung. Die Coordinaten der Tangentenebene des Punktes x sind dann die Coefficienten der x in dem Ausdrucke:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\,.\,\varphi_1+\zeta\psi_1}{\partial\xi} & \frac{\partial\,.\,\varphi_1+\zeta\psi_1}{\partial\eta} & \psi_1 & x_1 \\ \frac{\partial\,.\,\varphi_2+\zeta\psi_2}{\partial\xi} & \frac{\partial\,.\,\varphi_2+\zeta\psi_2}{\partial\eta} & \psi_2 & x_2 \\ \frac{\partial\,.\,\varphi_3+\zeta\psi_3}{\partial\xi} & \frac{\partial\,.\,\varphi_3+\zeta\psi_3}{\partial\eta} & \psi_3 & x_3 \\ \frac{\partial\,.\,\varphi_4+\zeta\psi_4}{\partial\xi} & \frac{\partial\,.\,\varphi_4+\zeta\psi_4}{\partial\eta} & \psi_4 & x_4 \end{vmatrix},$$

welcher, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Tangentenebene darstellt. Dieser Ausdruck mag der Kürze wegen durch:

*) Diese Auffassung wird nicht aufgehoben durch das Eintreten des Grenzfalls 10., in welchem die einfache Leitlinie und ebenso die Axe des Büschels sich mit 2 Erzeugenden (und mit einander) vereinigen.

$$\left(\frac{\partial \cdot \varphi + \zeta\psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \cdot \varphi + \zeta\psi}{\partial \eta}, \psi, x\right)$$

bezeichnet werden; in entwickelter Form kann man dafür setzen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \psi, x\right) + \zeta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \psi, x\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \psi, x\right)\right],$$

der Coefficient von ζ^2 verschwindet. Ist nun r die Ordnung der φ, $r-1$ die der ψ, und setzt man für ψ den Werth:

$$\psi = \frac{1}{r-1}\left(\xi\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right),$$

so nimmt der Ausdruck die Gestalt an:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \psi, x\right) - \frac{r}{r-1}\zeta\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \varphi, x\right).$$

Setzt man also, identisch in Bezug auf die x:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \psi, x\right) = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \Phi_3 x_3 + \Phi_4 x_4$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \varphi, x\right) = \Psi_1 x_1 + \Psi_2 x_2 + \Psi_3 x_3 + \Psi_4 x_4,$$

so sind die Gleichungen der Ebenen-Abbildung:

$$(2) \qquad \varrho u_i = \Phi_i - \frac{r}{r-1}\zeta\Psi_i.$$

War die gegebene Fläche von der Ordnung n, so musste die Punkt-Abbildung $2r-1-n$ einfache Fundamentalpunkte besitzen. Die Ordnung der Functionen Φ ist $s=3r-3$, und die Ebenen-Abbildung muss also, wenn sich nicht ein gemeinsamer Factor aus allen Functionen Φ, Ψ abscheidet, $2s-1-n=6r-7-n$ einfache Fundamentalpunkte haben. Diese Punkte bestehen erstens aus den Fundamentalpunkten der ersten Abbildung, sodann aber aus $4r-6$ Punkten, für welche die Verhältnisse $\xi:\eta$ durch die Gleichung:

$$(3) \qquad \Delta = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0$$

gegeben sind, welche also den die Hesse'sche Curve bildenden Erzeugenden entsprechen.

Hat die Reihe der ψ einen gemeinsamen Factor, so enthalten diesen die Φ, Ψ und auch die linke Seite der Gleichung (3). Sei $\varkappa$ die Ordnung dieses Factors (M); die Anzahl der ausser $M=0$ vorhandenen Fundamentalpunkte der Punkt-Abbildung ist dann $2r-1-n-\varkappa$; lassen wir aus den Φ, Ψ den Factor M aus, so sind die Abbildungsfunctionen der Ebenen-Abbildung von der Ordnung $s=3r-3-\varkappa$, und ausser den $2r-1-n-\varkappa$ Fundamentalpunkten der vorigen muss diese Abbildung nun noch:

$$(6r-7-2\varkappa-n)-(2r-1-n-\varkappa) = 4r-6-\varkappa$$

Fundamentalpunkte enthalten. Diese werden wieder durch die Gleichung (3), nach Beseitigung des Factors M gegeben, also durch den-

jenigen Factor der Gleichung (4), welche wirklich den die Hesse'sche Curve bildenden Erzeugenden entspricht. Ganz ebenso verhält es sich, wenn die φ einen gemeinsamen Factor haben, oder wenn sowohl die φ wie die ψ einen solchen enthalten.

Wenn die Punkt-Abbildung in der reducirten Form gegeben ist, wie sie in §§ 3., 4. entwickelt wurde, so existiren also in der Ebenen-Abbildung nur die letztern Fundamentalpunkte; für die α^{te} Gruppe der Punkt-Abbildung ist die Ordnung der neuen Abbildungsfunctionen:

$$s = 2n - \alpha + 1,$$

und die Zahl der aus der Gleichung (4) entspringenden einfachen Fundamentalpunkte wird:

$$3n - 2\alpha - 3.$$

Der Fall $\alpha = 1$ ist dabei aus den im vorigen § entwickelten Gründen ausgeschlossen; für die letzte Gruppe bei geradem n wird ausserdem:

$$s = \frac{3}{2} n - 1$$

und die Zahl der einfachen Fundamentalpunkte wird $2n - 3$, entsprechend dem Grade, welchen die Gleichung (3) nach Absonderung des Factors ξ annimmt.

Man sieht hieraus, dass, wenn die Punkt-Abbildung gegeben ist, der Charakter der Ebenen-Abbildung wesentlich von der Lage der singulären Erzeugenden abhängt, welche die Hesse'sche Curve bilden. Dasselbe tritt, da die singulären Erzeugenden sich selbst dualistisch sind, auch bei dem umgekehrten Uebergange von der Ebenen-Abbildung zur Punkt-Abbildung ein.

§ 7.

Abwickelbare Flächen.

War die Fläche 1. abwickelbar, so muss die Veränderliche ζ aus den Gleichungen (2) ganz verschwinden, so dass diese nicht mehr die Abbildung auf einer Ebene, sondern die einfach-unendliche Schaar der Tangentenebenen, ausgedrückt durch einen einzigen Parameter darstellen. Man findet dies leicht bestätigt. Die abwickelbare Fläche ist als solche durch die Eigenschaft definirt, dass alle ihre Erzeugenden singuläre sind, dass also die Gleichung (3) eine *identische* wird. In Folge dessen müssen solche ganze Functionen m_i, p, q, r, s existiren, dass die Unterdeterminanten von Δ die Ausdrücke annehmen:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}} = m_i p \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}} = m_i q$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}} = m_i r \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}} = m_i s.$$

Daher hat man aus den Formeln des vorigen Paragraphen, indem man nur noch ν für die dort durch r bezeichnete Zahl setzt:

$$\Sigma \Phi_i x_i = \frac{1}{\nu - 1} (\xi s - \eta r) \Sigma m_i x_i$$

$$\Sigma \Psi_i x_i = -\frac{1}{\nu} (\xi q - \eta p) \Sigma m_i x_i.$$

Trägt man dies in die Gleichungen (2) ein, und beseitigt rechts den gemeinsamen Factor:

$$\frac{1}{\nu - 1} \left\{ (\xi s - \eta r) + \xi (\xi q - \eta p) \right\},$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\varrho u_i = m_i,$$

welche die einfach unendliche Schaar der Tangentenebenen der Fläche darstellen.

An Stelle der Gleichung (3) kann man auch, nach Multiplication mit ξ^2, folgende setzen:

$$0 = \left(\varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right).$$

Man kann also solche ganze Functionen a, b, a', b' finden, dass gleichzeitig die 4 Gleichungen bestehen:

$$0 = a \varphi_i + b \psi_i + a' \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + b' \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}.$$

Setzt man:

$$a'' = a - \frac{\partial a'}{\partial \xi}$$

$$b'' = b - \frac{\partial b'}{\partial \xi},$$

so kann man dieser Gleichung auch die Form geben:

$$0 = a'' \varphi_i + b'' \psi_i + \frac{\partial}{\partial \xi} (a' \varphi_i + b' \psi_i),$$

und man kann also Functionen Θ_i einführen, so dass:

$$a' \varphi_i + b' \psi_i = \Theta_i$$

$$a'' \varphi_i + b'' \psi_i = -\frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}.$$

Schreiben wir diese Gleichungen, nach φ_i, ψ_i aufgelöst, in der Form:

$$\varphi_i = \alpha \Theta_i - \beta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}$$

$$\psi_i = \gamma \Theta_i - \delta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi},$$

so nehmen die Gleichungen der Fläche die Gestalt an:

(1) $$\varrho x_i = \Theta_i + \zeta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi},$$

wo $$\zeta = -\frac{\beta + \delta\xi}{\alpha + \gamma\xi}.$$

Die Gleichung (1) zeigt die abwickelbare Fläche in ihrer Beziehung zu der Rückkehrcurve, deren Aufsuchung auf diese Weise geleistet ist. Denn die Gleichung (1) repräsentirt offenbar die Verbindungslinie eines Punktes ξ der Curve

(2) $$\varrho x_i = \Theta_i$$

mit einem benachbarten Punkte. Die Fläche besteht also aus der Gesammtheit der Tangenten der Curve (2), und diese ist also die Rückkehrcurve. Dass sie vom Geschlechte $p = 0$, ist selbstverständlich, da sie mittelst ihrer Tangenten auf jedem ebenen Schnitte der Fläche eindeutig abgebildet ist.

§ 8.

Flächen, welche ohne Ausnahmestellen eindeutig aufeinander abbildbar sind. Typen.

Zu den bemerkenswerthesten Beziehungen, welche zwischen zwei Oberflächen eintreten können, gehört diejenige, welche aussagt, dass beide sich auf einander ohne das Auftreten von Fundamentalpunkten und Fundamentalcurven abbilden lassen, d. h. so, dass wirklich ohne jede Ausnahme einem Punkte der einen immer nur *ein* Punkt der anderen entspricht und umgekehrt. Dabei wird man jeden Punkt einer Doppelcurve immerhin als aus 2 in den verschiedenen Blättern liegenden Punkten zusammengesetzt ansehen können, und es wird der erwähnten Eigenschaft keinen Eintrag thun, wenn 2 Punkten, welche auf solche Weise vereinigt liegen, auf der anderen Fläche getrennte Punkte entsprechen.

Diese Eigenschaft kann auf *Flächenclassen* übertragen werden. Solchen Flächen kommt sie dann im Allgemeinen *der Art nach* zu, d. h. so, dass für jede Fläche der einen Art solche der anderen von den genannten Eigenschaften existiren. Dabei kann noch jede Fläche der einen Art von den übrigen analogen durch die besonderen Werthe ihrer höheren Invarianten, bez. Moduln, unterschieden sein.

Zwei Flächen, welche in einer solchen gegenseitigen Beziehung stehen, will ich als demselben *Typus* angehörig bezeichnen. Die Geometrie auf einer dieser Flächen ist dann ohne Weiteres auf die andere übertragbar; man hat keine singulären Elemente einzuführen, welchen bei dieser Uebertragung Rechnung zu tragen wäre. Insbesondere haben

die auf beiden Flächen gelegenen Classen von Raumcurven gleichen Geschlechtes *gleichen* Umfang und *entsprechenden* Inhalt.

So ist der Typus der Ebene und des Hyperboloids ein verschiedener; denn es lässt sich zwar letzteres auf der Ebene eindeutig abbilden, aber dabei muss man einen Punkt des Hyperboloids beliebig auszeichnen, indem ihm nicht ein Punkt, sondern eine Gerade der Ebene zugeordnet wird, und zwei Punkte dieser Geraden in der Ebene auszeichnen, welchen die durch den ersten gehenden Erzeugenden entsprechen.

Dagegen ist die Steiner'sche Fläche (und wohl diese allein unter den bisher betrachteten) vom Typus der Ebene, da ihre Abbildung auf dieser keinerlei Fundamentalpunkte oder -Curven mit sich führt. Demnach verhält sich das doppelt unendliche System der Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche genau und ohne Ausnahmestellen wie das System der Geraden in der Ebene; und die Geometrie auf der Steiner'schen Fläche ist völlig dadurch charakterisirt, dass auf ihr ein doppelt unendliches System gleichartiger Curven existirt, die sich zu zwei immer nur in einem Punkte schneiden, und von denen durch jeden Punkt eine einfach unendliche Schaar hindurchgeht.

Zwei Flächen, von denen keine abwickelbar oder Raumcurve ist, können aber ebensowohl rücksichtlich ihrer Tangentenebenen wie rücksichtlich ihrer Punkte verglichen werden. Man kann also sagen, zwei Flächen gehören rücksichtlich ihrer Punkte oder sie gehören rücksichtlich ihrer Tangentenebenen demselben Typus an, und beides fällt im Allgemeinen keineswegs zusammen. Nur bei abwickelbaren Flächen fällt die eine Art der Vergleichbarkeit fort, bei Raumcurven die andere.

Wenn zwei Flächen, um deren Vergleichung es sich handelt, die eindeutige Abbildung auf der Ebene zulassen, so müssen sie auf dieser Abbildungen besitzen, welche gleiche Fundamentalpunkte und Curven zeigen. Die Multiplicität entsprechender Fundamentalpunkte aber kann verschieden sein. Denn Fundamentalpunkte, wie hoch auch immer ihre Multiplicität sei, stellen Curven vom Geschlechte $p = 0$ dar, und diese sind immer Punkt für Punkt aufeinander abbildbar.

Wenden wir dieses auf unsere geradlinigen Flächen an, so bemerken wir zunächst, dass die charakteristischen Eigenschaften ihrer Abbildungen in der Existenz eines, bez. zweier Fundamentalpunkte und mehrerer fester Tangenten in einem derselben bestehen. Zugleich aber haben wir gesehen, dass die Richtung der letzteren beliebig abgeändert werden kann, ohne dass die abgebildete Fläche sich ändert. Daher ist die Richtung dieser Tangenten für die Abbildung nicht weiter charakteristisch, sondern nur noch ihre *Zahl*.

Wir sehen uns hierdurch bezüglich der verschiedenen Typen genau auf die Unterscheidung der oben aufgestellten Gruppen zurückgeführt.

Moduln, als welche man etwa Doppelverhältnisse der festen Tangenten hätte erwarten können, existiren nicht. Der Typus der α^{ten} Gruppe bei Flächen n^{ter} Ordnung ist durch einen Fundamentalpunkt und die Zahl $n - 2\alpha + 1$ seiner festen Tangenten gegeben; bei geradem n tritt noch die $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{te}$ Gruppe mit 2 Fundamentalpunkten hinzu.

Ziehen wir nun zugleich verschiedene n in Betracht, so sehen wir, dass bei jedem folgenden n ein einziger neuer Typus auftritt, der des Kegels n^{ter} Ordnung, während die übrigen Typen sich den bei der vorhergehenden Ordnung gefundenen anreihen. Aber die Abbildungen der Kegel, welche ohnedies eine Ausnahmestellung einnehmen, haben eine solche auch insofern, als bei ihnen der vielfache Punkt der Abbildung nur die Spitze, also einen Knotenpunkt, aber nicht eine Curve darstellt, und also hier keine solche vorhanden ist, welche auf der durch den Fundamentalpunkt einer anderen Abbildung dargestellten Punkt für Punkt abgebildet werden könnte. Demnach müssen wir die Kegel aus dieser Betrachtung ausschliessen, und als jedesmal neuen Typus den einer *Linienfläche mit einfacher Leitgeraden* aufstellen. Bezeichnen wir diese Typen durch:

T_0: Flächen 2ter Ordnung (Typus des Hyperboloids),
T_1: Linienflächen 3ter Ord. ($p = 0$) mit einfacher Leitgeraden,
T_2: Linienflächen 4ter Ord. ($p = 0$) mit einfacher Leitgeraden,
. . . . . .

so sind die Typen der verschiedenen Gruppen

bei ungeradem n:

Gruppe)	2	3	4	...	$\frac{n+1}{2}$
Typus)	T_{n-2}	T_{n-4}	T_{n-6}	...	T_1

bei geradem n:

Gruppe)	2	3	4	...	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$
Typus)	T_{n-2}	T_{n-4}	T_{n-6}	...	T_2	T_0

Eine gegebene geradlinige Fläche n^{ten} Grades kann diesen Typen sowohl ihren Punkten, als ihren Tangentenebenen nach zugeordnet werden, und zwar fallen, wie schon bemerkt, die betreffenden Typen nicht immer zusammen. Daher ist die Geometrie der Punkte einer Fläche in vielen Fällen von der Geometrie der Tangentenebenen in wesentlichen Punkten verschieden. Betrachten wir z. B. eine Art von Flächen, welche bei geradem n in Beziehung auf ihre Punkte dem Typus des Hyperboloids angehört. Sie besitzt, wie dieses 2 Schaaren von Erzeugenden hat, so 2 einfach unendliche Curvenschaaren vom Geschlechte $p = 0$, deren eine die Schaar der Erzeugenden ist.

Curven derselben Schaar schneiden sich niemals, Curven verschiedener Schaaren treffen sich immer und zwar in einem Punkte; die Curven der einen Schaar werden durch die der anderen projectivisch getheilt. Wenn aber dieselbe Fläche rücksichtlich ihrer Tangentenebenen etwa einem anderen Typus angehört, so besitzt sie zwar noch *eine* ausgezeichnete Schaar berührender Büschel, aber auch nur noch eine, deren Axen die Erzeugenden sind, und dieser steht keine zweite einfach unendliche Schaar ausgezeichneter Developpabeln gegenüber.

§ 9.

Flächen, welche rücksichtlich ihrer Punkte und ihrer Ebenen demselben Typus angehören.

Wenn eine geradlinige Fläche n^{ten} Grades ihrer Punktabbildung und ihrer Ebenenabbildung nach derselben Gruppe angehört, also in Beziehung auf ihre Punkte und Ebenen denselben Typus besitzt, so ist dadurch eine eigenthümliche Dualität der Punkte und Ebenen der Fläche gegeben, bei welcher keineswegs einem Punkte seine Tangentenebene zugeordnet ist. Diese Dualität erhält man, wenn man die einfachsten Punkt- und Ebenenabbildungen der Fläche vergleicht, und jedem Punkte der Fläche diejenige seiner Tangentenebenen zuordnet, welche durch denselben Punkt der Bildebene dargestellt wird. Wenn nun der in § 6. behandelte Uebergang von der einfachsten Punktabbildung sofort zu einer genau entsprechenden Ebenenabbildung führte, so würde hierbei jedem Punkte seine Tangentenebene zugeordnet. Aber nach den Untersuchungen des § 6. ist dies nicht der Fall, vielmehr muss die Ebenenabbildung noch einer Reihe quadratischer Transformationen unterworfen werden, ehe man zu einer entsprechend einfachen gelangt. Dadurch aber wird auch jene Art des Entsprechens völlig geändert.

Ich will an dem Beispiel der geradlinigen Flächen 3ter Ordnung diese merkwürdige Dualität genauer entwickeln. Bekanntlich (vergl. meine Abhandlung: „über die Steiner'sche Fläche“, Borchardt's Journal, Bd. 67) wird die Punktabbildung dieser Fläche durch die Formeln gegeben:

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \varrho x_1 = \xi^2, & \varrho x_2 = \eta^2 \\ \varrho x_3 = 2\xi\zeta, & \varrho x_4 = 2\eta\zeta. \end{array}$$

Bildet man hieraus nach § 6. die Coordinaten der Tangentenebene des Punktes x, so erhält man:

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} \varrho u_1 = \quad \eta^2\zeta, & \varrho u_2 = -\xi^2\zeta \\ \varrho u_3 = -\xi\eta^2, & \varrho u_3 = \quad \xi^2\eta. \end{array}$$

Diese Formeln gehen mit Hülfe der quadratischen Substitution

$$(3) \qquad \sigma\xi = \eta'\zeta', \quad \sigma\eta = \zeta'\xi', \quad \sigma\zeta = \xi'\eta'$$

in die Form über:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varrho u_1 &= \xi'^2, & \varrho u_2 &= -\eta'^2 \\ \varrho u_3 &= -\xi'\zeta', & \varrho u_3 &= \eta'\zeta'. \end{aligned}$$

Es entsprechen jetzt jedem Punkte x die Werthe der u, für welche in (3) ξ', η', ζ' die Werthe annehmen:

$$\xi' = \eta, \quad \eta' = \xi, \quad \zeta' = \gamma\zeta,$$

wo γ eine willkürliche Constante. Alsdann sind die Tangentenebenen der Fläche und die Punkte derselben ohne Ausnahme eindeutig aufeinander bezogen; insbesondere entsprechen den Ebenen $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, welche durch die Fundamentalpunkte der Ebenenabbildung dargestellt werden (Ebenen durch die Doppelgerade), die Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ der einfachen Leitlinie, welche durch den Fundamentalpunkt der Punktabbildung dargestellt wird. Der Berührungspunkt der Ebene (4) wird aber durch die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \eta'^2\zeta', & \varrho y_2 &= \xi'^2\zeta' \\ \varrho y_3 &= 2\,\eta'^2\xi', & \varrho y_4 &= 2\,\eta'\xi'^2 \end{aligned}$$

gegeben, oder, wenn man

$$\xi' = \eta, \quad \eta' = \xi, \quad \zeta' = \gamma\zeta$$

setzt, durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \gamma\xi^2\zeta, & \varrho y_2 &= \gamma\eta^2\zeta \\ \varrho y_3 &= 2\,\xi^2\eta, & \varrho y_4 &= 2\,\xi\eta^2. \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit den Formeln (1), so sehen wir, dass dieser Berührungspunkt nicht der Punkt x oder ξ, η, ζ der Punktabbildung ist, sondern ein Punkt, dessen Bild die Coordinaten $\xi'' = \xi$, $\eta'' = \eta$ und

$$(5) \qquad \zeta'' = \frac{\xi\eta}{\gamma\zeta}$$

hat. Die Bedeutung dieses Zusammenhanges ist nun zu suchen. Dem Punkte x entspricht die Tangentenebene von y; dabei liegt y (wegen der gemeinsamen Werthe von ξ, η) auf derselben Erzeugenden. Der Gleichung (5) kann man nun die Form geben:

$$\zeta\zeta'' = \frac{1}{2\gamma}(\xi\eta'' + \eta\xi'').$$

Die Punkte ξ, η, ζ und ξ'', η'', ζ'' sind also harmonische Pole in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\zeta^2 = \frac{\xi\eta}{\gamma},$$

welcher die Linien $\xi = 0$, $\eta = 0$ (Bilder der nach den Cuspidalpunkten gerichteten Erzeugenden) in den Schnittpunkten mit $\zeta = 0$ (Bilder der Cuspidalpunkte) berührt, übrigens aber, wegen des beliebigen Werthes der Constante γ, willkürlich ist.

Dieser Kegelschnitt stellt eine auf der Fläche gelegene Raumcurve 4ter Ordnung und 2ter Species dar, welche die einfache Leitlinie nicht schneidet und in den Cuspidalpunkten die betreffenden Erzeugenden berührt. Ich habe im Borchardt'schen Journal Bd. 47. p. 18 gezeigt, dass diese Curven die Haupttangentencurven der Fläche sind. Man hat also folgenden Satz:

*Um eine eindeutige und ausnahmslose gegenseitige Beziehung der Punkte und Ebenen einer geradlinigen Fläche 3ter Ordnung zu erhalten, bediene man sich einer beliebigen Haupttangentencurve der Fläche. Jede Erzeugende wird von einer solchen Curve in 2 Punkten getroffen; man suche zu jedem Punkte einer Erzeugenden den zu ihm und diesen beiden harmonischen, und ordne dessen Tangentenebene dem ersten Punkte zu.**)

Diese Beziehung, sofern man der Tangentenebene ihren Berührungspunkt substituirt, ist eine involutorische; die Doppelpunkte der Involutionen liegen auf der gedachten Raumcurve 4ter Ordnung, und diese bildet den geometrischen Ort derjenigen Punkte, welchen ihre eigenen Tangentenebenen zugeordnet sind.

§ 10.

Vielfache Curven der Flächen.

Flächen, welche denselben Gruppen angehören, können sich noch der Natur ihrer Doppelcurve bez. Doppeldeveloppabeln nach sehr verschieden verhalten; diese Doppelgebilde können zu höheren vielfachen werden u. s. w.

---

*) Bezüglich dieser Verhältnisse verdanke ich Herrn Klein die folgende Mittheilung:

Linienflächen, welche 2 Leitgeraden besitzen, gehören einer linearen Congruenz und also einfach unendlich vielen linearen Complexen an. Ein linearer Complex ist aber immer mit einer dualistischen Umformung verknüpft, bei welcher seine Linien ungeändert bleiben. Deshalb gehen die genannten Linienflächen durch einfach unendlich viele dualistische Transformationen in sich über. Diese Transformationen sind mit den im Texte erwähnten gleichbedeutend. Die Haupttangentencurven kommen dabei insofern in Betracht, als dieselben einzeln den einfach unendlich vielen Complexen zugeordnet und durch sie bestimmt sind. Auf jeder einem linearen Complexe angehörigen Linienfläche wird nämlich, nach einem Satze von Lie (Berichte der Akademie zu Christiania 1871), durch den Complex eine Haupttangentencurve bestimmt. Dieselbe ist der Ort derjenigen Punkte der Fläche, deren Tangentialebene gleichzeitig die im Complexe entsprechende Ebene ist. Die Tangenten dieser Curve gehören dem Complex an, die Curve bleibt desshalb bei der zugehörigen dualistischen Umformung ungeändert. — Aehnliche Ueberlegungen übertragen sich auf die allgemeineren Flächen, welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen und also auch durch einfach unendlich viele dualistische Umformungen in sich übergehen (vergl. den Aufsatz von Lie und mir, diese Annalen, t. IV, 1), und welche die hier betrachteten Linienflächen als speciellen Fall einschliessen. K.

Man findet Punktepaare der Bildebene, welche sich auf der Fläche zu Punkten einer vielfachen Curve vereinigen, indem man die Werthe der x für 2 verschiedene Werthsysteme ξ, η, ζ einander gleich setzt. Sind die Gleichungen der Fläche

$$(1) \qquad \varrho x_i = \varphi_i + \zeta \psi_i ,$$

so werden jene Gleichungen:

$$(2) \qquad \varphi_i + \zeta \psi_i = \varphi_i' + \zeta' \psi_i' ,$$

wobei φ', ψ' die Functionen φ, ψ sind, geschrieben mit ξ', η'. Indem man aus den 4 Gleichungen (2) eine einzige bildet, welche ζ, ζ' nicht mehr enthält, und für ξ, η, sowie für ξ', η' homogen ist, findet man, nach einer schon oben angewandten Bezeichnung:

$$(\varphi, \psi, \varphi', \psi') = 0 .$$

Diese Gleichung ist wegen der Reihenpaare φ, φ' und ψ, ψ' zweimal durch $(\xi\eta' - \eta\xi')$ theilbar; setzt man also

$$(3) \qquad (\varphi, \psi, \varphi', \psi') = (\xi\eta' - \eta\xi')^2 . \Omega(\xi, \eta, \xi', \eta') ,$$

so ist:

$$(4) \qquad \Omega = 0$$

eine für ξ, η wie für ξ', η' homogene und für beide Werthepaare symmetrische Gleichung, welche angiebt, welche Paare von Erzeugenden (ξ, η und ξ', η') sich auf der Doppelcurve treffen. In der Bildebene stellt $\Omega = 0$ eine höhere Involution von Strahlen vor, welche die Bilder der Erzeugenden paarweise einander zuordnen.

Wenn, wie in den einfachsten oben behandelten Abbildungen, alle ψ einen gemeinsamen Factor M haben, so hat Ω den Factor MM', und es bleibt an Stelle von (4) diejenige Gleichung übrig $\Omega = 0$, welche entsteht, indem wir bei Bildung von Ω an Stelle der φ, ψ die früher so bezeichneten Functionen setzen. In Folge dessen wird für die α^{te} Gruppe, wo die φ von der Ordnung $n - \alpha + 1$, die ψ von der Ordnung $\alpha + 1$ sind, doch immer Ω von der Ordnung $n - 2$ in Bezug auf jede der Reihen der Veränderlichen; auch die letzte Gruppe bei geradem n macht hiervon keine Ausnahme. Es giebt also zu einem Werthepaare ξ, η immer $n - 2$ Werthepaare ξ', η'; was in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze ist, dass jede Erzeugende von $n - 2$ anderen getroffen wird.

Die so gebildete Gleichung $\Omega = 0$ kann in mehrere irreducible Gleichungen $\Omega' = 0$, $\Omega'' = 0 \ldots$ zerfallen. Jede derselben stellt dann eine vielfache Curve der Fläche dar.

Es sei $\Omega^{(i)} = 0$ ein solcher irreducibler Theil von $\Omega = 0$. Setzen wir

$$\eta = \lambda\xi, \qquad \eta' = \lambda'\xi,$$

so wird $\Omega^{(i)} = F^{(i)}(\lambda, \lambda')$ eine symmetrische Function von λ, λ', welche in jeder dieser Veränderlichen bis zum $(n-2)^{ten}$ Grade ansteigt. Man

kann $F^i(\lambda, \lambda') = 0$ als ebene Curve mit den rechtwinkligen Coordinaten λ, λ' betrachten, welche die Involution interpretirt; diese Curve hat dann eine Symmetrielinie, $\lambda = \lambda'$, und jedem zu dieser symmetrisch gelegenen Punktepaare entspricht ein Punktepaar der Fläche, welches vereinigt liegt.

Es kann aber geschehen, dass die zu einem gegebenen λ gehörigen $r^{(i)}$ Werthe von λ' $(n - 2 = r' + r'' \ldots)$ sich in $\varkappa^{(i)}$ Gruppen zu $s^{(i)}$ theilen $(\varkappa^{(i)} s^{(i)} = r^{(i)})$, so dass für die $s^{(i)}$ Wurzeln λ' jeder Gruppe

$$\lambda^{1,i}, \ \lambda^{2,i}, \ \ldots \ \lambda^{s^{(i)},i}$$

nicht nur die Gleichungen

$$\Omega^{(i)}(\lambda, \lambda^{g,i}) = 0, \qquad \Omega^{(i)}(\lambda', \lambda^{h,i}) = 0,$$

sondern auch die Gleichungen

$$\Omega^{(i)}(\lambda^{g,i}, \lambda^{h,i}) = 0$$

bestehen. In diesem Falle treffen sich auf dieser vielfachen Curve immer $s^{(i)} + 1$ Erzeugende, und die Curve wird also $(s^{(i)} + 1)$fach.

Setzt man in $\Omega^{(i)} = 0$ $\lambda = \lambda'$, so erhält man eine Gleichung vom Grade $2s^{(i)}$ für λ. Sie liefert die Cuspidalpunkte dieser vielfachen Curve; und zwar werden in ihnen, wenn auch die Vielfachheit der Curve eine höhere ist, sich doch im Allgemeinen nur *zwei* der $s^{(i)}$ Erzeugenden vereinigen.

Zu einem Werthsystem λ, λ' gehört im Allgemeinen *ein* Werthsystem ζ, ζ', also *ein* Punkt der betreffenden Erzeugenden. Dies ändert sich nur dann, wenn ausser der Determinante (3) auch ihre Unterdeterminanten verschwinden (abgesehen natürlich von dem in ihnen enthaltenen Factor $\xi\eta' - \eta\xi'$). Wenn solche Systeme $\xi, \eta; \xi', \eta'$ oder λ, λ' existiren, so bezeichnen sie vielfache Erzeugende. Differenzirt man aber (3) nach den ξ, η, ξ', η', so sieht man, dass für solche Werthesysteme auch die Differentialquotienten von Ω verschwinden. Interpretiren wir $\Omega = 0$ durch das System der Curven $F^{(i)}(\lambda, \lambda') = 0$, welche 2 vielfache Punkte im Unendlichen der Coordinatenaxen gemein haben, so entsprechen etwaigen vielfachen Erzeugenden immer Durchschnittspunkte und andere vielfache Punkte dieser Curven. Umgekehrt entsprechen solchen Punkten Paare von Erzeugenden, welche sich entweder 2mal auf derselben, oder welche sich auf 2 verschiedenen vielfachen Curven begegnen; also entweder vielfache Erzeugende, oder solche, welche durch wirkliche vielfache Punkte oder Schnittpunkte der vielfachen Curven hindurchgehen.

Soll endlich eine der vielfachen Curven Rückkehrlinie werden, so schneiden in den Punkten derselben sich immer 2 unendlich nahe Erzeugende, also solche, für welche $\lambda = \lambda'$. Einer der irreducibeln Factoren von Ω (geschrieben mit λ, λ') muss also $\lambda - \lambda'$, oder, da Ω symmetrisch für λ, λ' ist, $(\lambda - \lambda')^2$ sein, und der Ausdruck

$$(\varphi,\ \psi,\ \varphi',\ \psi'),$$

geschrieben mit λ, λ', muss den Factor $(\lambda - \lambda')^4$ enthalten. Setzen wir nun:

$$\varphi_i' = \varphi_i - \frac{\lambda - \lambda'}{1}\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + \frac{(\lambda - \lambda')^2}{1\,.\,2}\,\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda^2} \cdots$$

$$\psi_i' = \psi_i - \frac{\lambda - \lambda'}{1}\,\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda} + \frac{(\lambda - \lambda')^2}{1\,.\,2}\,\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \lambda^2} \cdots,$$

so wird:

$$(\varphi,\ \psi,\ \varphi',\ \psi') = (\lambda - \lambda')^2 \left(\varphi,\ \psi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right) + R\,.\,(\lambda - \lambda')^4.$$

Es muss also

$$\left(\varphi,\ \psi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right) = 0$$

sein für alle Werthe von λ, d. h. die Fläche abwickelbar.

Es ist leicht, sich eine Vorstellung davon zu bilden, wie die Rückkehrcurve einer abwickelbaren Fläche sich abbildet. Nehmen wir die Gleichungen der Fläche in der Form:

$$(5) \qquad \varrho x_i = \Theta_i + \zeta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \lambda}.$$

Einem Punkte λ der Rückkehrcurve entspricht $\zeta = 0$; aber man erhält denselben Punkt auch für $\lambda + d\lambda$, $\zeta = -d\lambda$. Die Bilder der Punkte der Rückkehrcurve liegen also paarweise auf 2 unendlich nahen Geraden $\zeta = 0$, $\zeta = -d\lambda$; die Verbindungslinie der Bilder desselben Punktes, $\lambda + \zeta = 0$, geht immer durch einen bestimmten Punkt der Bildebene ($\lambda = 0$, $\zeta = 0$). Geht man von einer anderen als der Gleichungsform (5) aus, so tritt nur an Stelle der Geraden eine andere Curve vom Geschlecht $p = 0$ als Bild der Rückkehrlinie.

Die Involution, welche der sich auf der eigentlichen Doppelcurve begegnenden Erzeugenden entspricht, ist in diesem Falle vom Grade $n - 4$ in λ und λ'.

Göttingen, den 8. October 1871.

Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung*).

Von Lothar Marcks †.

Steiner findet in seiner Abhandlung: „Ueber algebraische Curven und Flächen“, im 49. Bande des Crelle'schen Journals, die Ordnung der Evolute einer Curve n^{ter} Ordnung durch Zählen der im Unendlichen liegenden Krümmungsmittelpunkte. Ein analoges Verfahren führt auch zur Bestimmung der Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche Φ einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung F_n. Die unendlich ferne Ebene E_∞ enthält zwei Arten von Krümmungscentren von Φ, nämlich erstens solche, die zu den auf F_n liegenden parabolischen Punkten gehören, und zweitens solche, die zu den unendlich fernen Punkten von F_n gehören. Die parabolischen Punkte auf F_n liegen in der parabolischen Curve $k_{4n(n-2)}$, welche, als Schnitt von F_n mit der zugehörigen Kernfläche, von der Ordnung $4n(n-2)$ ist. Der Ort der zu den Punkten von $k_{4n(n-2)}$ gehörigen Krümmungsmittelpunkte möge eine Curve k auf E_∞ sein. Die unendlich fernen Punkte von F_n bilden eine Curve c_n auf E_∞, und der Ort der zugehörigen Punkte von Φ sei die Curve s auf E_∞. Da die parabolischen und die unendlich fernen Punkte von F_n die einzigen sind, welche ihre Krümmungscentren im Unendlichen haben, so ist die Summe der hinlänglich oft gezählten Ordnungen von k und s gleich der Ordnung von Φ.

Um die Ordnung von k zu finden, fixiren wir eine bestimmte Richtung, deren unendlich ferner Punkt E sein mag. Die Berührungspunkte der dieser Richtung parallelen, also durch E gelegten Tangentialebenen von F_n bilden auf F_n die Curve $c_{n(n-1)}$, welche der Schnitt von F_n mit der ersten Polarfläche von E in Bezug auf F_n ist. Die

---

*) Der Verfasser der Arbeit, deren hauptsächlichste Resultate ein Studienfreund desselben hier mittheilt, ist am 12. Januar 1871 in dem Gefecht bei Lacroix gefallen. Er hatte die betreffenden Untersuchungen bereits in der ersten Hälfte des Jahres 1870 ausgeführt. Inzwischen ist dasselbe Problem von Herrn Darboux behandelt worden. (C. R. 1870. Erste Hälfte, p. 1328). D. Red.

zu den Punkten dieser Curve errichteten Normalen sind senkrecht zu der fixirten Richtung, also den auf dieser Richtung lothrechten Ebenen parallel, schneiden daher E_∞ in einer bestimmten Geraden g_∞. Die erste Polarfläche von E in Bezug auf F_n, welche von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung ist, schneidet die parabolische Curve $k_{4n(n-2)}$ in $4n(n-1)(n-2)$ Punkten, welche auf $e_{n(n-1)}$ liegen und zugleich parabolische Punkte sind. Die in ihnen errichteten Normalen schneiden daher g_∞ in Punkten der Curve k. k ist also von der Ordnung $4 . n(n-1)(n-2)$.

Um die Ordnung von s zu finden, bemerken wir, dass die Flächennormalen der Punkte der Schnittcurve c_n von F_n und E_∞ ganz in E_∞ liegen, also einander schneiden, und die Evolute $r_{3n(n-1)}$ einhüllen. Jeder Punkt dieser Evolute liegt auf Φ, weil sich in ihm zwei unendlich nahe Normalen von F_n schneiden, woraus auch folgt, dass E_∞ als der eine Hauptnormalschnitt für alle Punkte von c_n betrachtet werden muss.

Damit haben wir aber für jeden Punkt von c_n nur einen der beiden auf seiner Normale gelegenen Krümmungsmittelpunkte, und nur einen der beiden Hauptnormalschnitte berücksichtigt. Zu jedem Punkte von c_n gehört ausser dem mit E_∞ zusammenfallenden Hauptnormalschnitte, welcher einen Punkt auf r lieferte, noch ein zweiter zu E_∞ senkrecht zu denkender Hauptnormalschnitt, welcher den zweiten Krümmungsmittelpunkt liefert. Der Ort dieses letztern ist eine Curve r' auf E_∞, deren Ordnung wir zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke zählen wir wieder die Punkte, welche r' mit der Geraden h_∞ gemein hat, welche wir im Vergleich zu der Lage der Curven c_n und r' unendlich fern denken. Eine solche Gerade wird von c_n in n Punkten geschnitten, und ist also $n$fache Normale zu c_n, d. h. in h_∞ stehen auf der Ebene von c_n, welche der erste Hauptnormalschnitt für alle Punkte von c_n war, n zweite Hauptnormalschnitte senkrecht. Daher liegen in h_∞ n zweite Krümmungscentra. Ausserdem kann in h_∞ nur dann noch ein Punkt von r' liegen, wenn der zugehörige Flächenpunkt ein Wendepunkt seines zweiten Hauptnormalschnittes ist. Dieser Bedingung genügt jeder parabolische Punkt auf c_n, der nicht schon Wendepunkt des ersten Hauptnormalschnittes ist. Da nun die Ebene von c_n die parabolische Curve $k_{4n(n-2)}$ in $4n(n-2)$ Punkten schneidet, und $3n(n-2)$ Wendepunkte auf der Curve c_n liegen, also Wendepunkte des ersten Hauptnormalschnittes sind, so bleiben $n(n-2)$ parabolische Punkte übrig, welche Wendepunkte von zweiten Hauptnormalschnitten sind. Diese bestimmen daher auf h_∞ noch $n(n-2)$ andere Punkte von r'. r' hat demnach $n + n(n-2)$ Punkte mit h_∞ gemein, ist also von der Ordnung $n(n-1)$. Da aber jeder Punkt dieser Curve im Unendlichen liegt, und jede Normale im Unendlichen für den

Hauptnormalschnitt Rückkehrtangente*) ist, in jedem Krümmungscentrum also immer 3 Punkte vereinigt liegen, so ist die Curve r' als Rückkehrcurve auf der Fläche Φ bei der Beurtheilung der Ordnung derselben dreifach zu zählen.

Demnach besteht der ganze Schnitt von E_x mit Φ aus der Curve k von der Ordnung $4n(n-1)(n-2)$, der Curve r von der Ordnung $3n(n-1)$ und der dreifach zu zählenden Curve r' von der Ordnung $n(n-1)$. Also ist Φ von der Ordnung:

$$4n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+3n(n-1)=2n(n-1)(2n-1).$$

Um die Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche zu bestimmen, betrachten wir sie als die Brennfläche des Strahlensystems, welches von den sämmtlichen Normalen zu F_n gebildet wird, und benutzen den Satz, dass der Unterschied zwischen Ordnung und Classe der Brennfläche eines Strahlensystems n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe gleich $2(n-m)$ ist**). Da bekanntlich durch jeden Punkt $n(n^2-n+1)$ Normalen an F_n gezogen werden können, und in jeder Ebene $n(n-1)$ Normalen von F_n liegen, so ist der Unterschied zwischen der Ordnung und der Classe von Φ gleich:

$$2[n(n^2-n+1)-n(n-1)]=2n(n^2-2n+2),$$

und da wir $2n(n-1)(2n-1)$ als die Ordnungszahl von Φ gefunden haben, so ist diese Fläche von der Classe:

$$2n(n-1)(2n-1)-2n(n^2-2n+2)=2n(n^2-n-1).$$

Für $n=2$ und $n=3$ ergiebt sich, dass die Krümmungsmittelpunktsfläche einer quadratischen Fläche von der 12ten Ordnung und 4ten Classe, einer cubischen Fläche von der 60ten Ordnung und 30ten Classe ist.

---

*) Cf. Steiner, Ueber die algebraischen Curven und Flächen, Crelle's Journal, Bd. 49, pag. 339, 340.

**) Dieser Satz rührt von Herrn F. Klein her; vergl. S. Lie, Göttinger Nachrichten 1870, Nr. 4.

Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven.

Von F. E. Eckardt zu Reichenbach im Voigtland.

Die nachstehende Arbeit bildet einen Auszug aus einer Abhandlung, welche ich während der Jahre 1867 und 1868 niedergeschrieben und unter dem obigen Titel im Osterprogramm 1869 der Realschule II. Ordnung zu Reichenbach veröffentlicht habe. Ich legte damals den von mir erhaltenen Resultaten keinen besonderen Werth bei und unterliess daher, denselben durch Abdruck meiner Arbeit in einer Zeitschrift eine grössere Verbreitung zu geben. Als ich jedoch aus besonderer Veranlassung vor einiger Zeit meine Abhandlung mehreren Mathematikern zuschickte, wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass ich in der von mir angewandten Transformation einen speciellen Fall der insbesondere seit 1869 in allgemeinem Sinne und in Beispielen mehrfach behandelten rationalen Transformationen im Raume*) getroffen habe und dass mehrere der von mir gefundenen Resultate theils in neuester Zeit bekannt geworden, theils noch jetzt unbekannt seien. Ich erlaube mir daher, durch eine ausserdem an mich ergangene Aufforderung veranlasst, in Folgendem einen Auszug aus meiner damaligen Arbeit zu veröffentlichen, dem ich nur dann und wann einige mir bemerkenswerth erscheinende Zusätze, die mir bei der neuen Bearbeitung aufstiessen, zugefügt habe.

*) Vergl. De la Gournerie, surfaces réglées tétraèdralement symétriques, Paris 1867. — S. Lie, Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie, Verh. der Ges. der Wiss. zu Christiania, 1869. Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes, Gött. Nachr. 1870, Nr. 4. — Nöther, über die eindeutigen Raumtransformationen, Math. Ann. III, p. 547. 1871. — Cayley, on rational transformation between two spaces, Lond. Math. Soc. v. III, 1870. — Cremona, über die Abbildung algebraischer Flächen, Gött. Nachr. 1871, Nr. 5.

§ 1.

Sind α, β, γ, δ die *Viercbenencoordinaten* eines Punktes in Bezug auf ein Tetraëder $ABCD$, so bedeutet bekanntlich z. B. $\frac{\beta}{\alpha}$ das Verhältniss der Sinus der Winkel, in welche die durch jenen Punkt und die Kante CD gelegte Ebene den an dieser Kante liegenden Flächenwinkel theilt. Auf dieser Ebene liegen überhaupt alle Punkte, deren Coordinaten α und β denen des gegebenen Punktes direkt proportional sind. Dagegen finden sich alle Punkte, deren Coordinaten α und β denen des gegebenen Punktes indirekt proportional sind, auf einer Ebene, welche durch CD geht und mit ACD denselben Winkel einschliesst, als jene Ebene mit BCD. Diese neue Ebene und die 5 zu den übrigen Tetraëderkanten gehörigen entsprechend gebildeten Ebenen schneiden sich sämmtlich in einem Punkte, *dessen Coordinaten den reciproken Werthen von den Coordinaten des gegebenen Punktes proportional sind.*

Der so bestimmte Punkt fällt mit dem gegebenen nur dann zusammen, wenn derselbe Mittelpunkt einer der 8 Kugeln ist, welche die Flächen des Tetraëders berühren.

Construirt man auf die angegebene Weise zu allen Punkten einer Curve oder Fläche die entsprechenden Punkte, so bilden diese eine neue Curve oder Fläche, deren Gleichung man erhält, wenn man in der auf das Tetraëder bezogenen homogenen Gleichung des ursprünglichen Gebildes die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt.

§ 2.

Einer durch eine Kante des Tetraëders gehenden Ebene entspricht auf diese Weise eine Ebene durch dieselbe Kante; einer durch einen Eckpunkt des Tetraëders gehenden Ebene entspricht ein Kegel 2ten Grades, welcher jenen Eckpunkt zum Scheitel hat und die 3 in demselben zusammenlaufenden Kanten des Tetraëders enthält.

Einer beliebig liegenden Ebene:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0$$

endlich entspricht *eine Oberfläche dritten Grades:*

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0,$$

welche die 4 Eckpunkte des Tetraëders zu Doppelpunkten hat und die 6 Kanten desselben enthält. Eine Fläche dieser Art besitzt eine grosse Anzahl merkwürdiger Eigenschaften, von denen wir hier zunächst einige aus der Gleichung unmittelbar folgende anführen wollen.

Die Gleichungen:

$$\frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

stellen die 4 *Tangentialkegel* dar, welche man an die Fläche in den Doppelpunkten legen kann.

Je zwei dieser Kegel haben eine gemeinsame Kante und längs derselben eine *gemeinsame Tangentialebene*, welche zugleich die Fläche 3ten Grades längs dieser Kante berührt. So ist die Gleichung der Tangentialebene längs der Kante CD:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 0.$$

Bringt man die längs je zweier gegenüberliegender Kanten des Tetraëders an die Fläche gelegten Tangentialebenen zum Schnitt, so erhält man drei gerade Linien:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 0, \quad \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0;$$

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\gamma}{C} = 0, \quad \frac{\beta}{B} + \frac{\delta}{D} = 0;$$

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\delta}{D} = 0, \quad \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0;$$

welche zusammen in einer Ebene:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0$$

liegen.

Diese geraden Linien liegen aber ausserdem auf der Fläche selbst und sind nichts weiter, als die infolge unserer Transformation entsprechenden Linien zu denjenigen, welche die Punkte verbinden, in welchen die ursprüngliche Ebene je 2 gegenüberliegende Kanten des Tetraëders schneidet.

Jede Ebene, welche durch eine dieser 3 Linien geht, schneidet aus der Fläche noch einen Kegelschnitt aus und ist eine *Doppeltangentialebene* der Fläche in den Punkten, in welchen der Kegelschnitt und die gerade Linie sich begegnen. Die Ebene der 3 geraden Linien aber berührt die Fläche in 3 Punkten und ist daher eine *dreifache Tangentialebene* derselben.

Die 4 Tangentialkegel in den Doppelpunkten umhüllen sämmtlich eine Fläche 2ten Grades, welche die 6 Kanten des Tetraëders berührt und deren Gleichung ist:

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2} + \frac{\delta^2}{D^2} - \frac{2\alpha\beta}{AB} - \frac{2\alpha\gamma}{AC} - \frac{2\alpha\delta}{AD} - \frac{2\beta\gamma}{BC} - \frac{2\beta\delta}{BD} - \frac{2\gamma\delta}{CD} = 0.$$

Die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Fläche 3ten Grades zerfällt in 3 Kegelschnitte. Die Ebenen derselben haben die Gleichungen:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D} = 0 \quad \text{u. s. w.,}$$

und gehen durch je eine der drei oben erwähnten auf der Fläche 3ten Grades liegenden geraden Linien.

Jede Fläche 2ten Grades, welche durch vier ein räumliches Viereck bildende Kanten des Tetraëders geht, schneidet die Fläche 3ten Grades in einem Kegelschnitt. Es giebt 3 Schaaren solcher Flächen und daher auch 3 Schaaren von Kegelschnitten. Die Ebenen jeder Schaar bilden ein Ebenenbüschel, dessen Kante eine der oben erwähnten geraden Linien ist.

§ 3.

Der *unendlich fernen Ebene*, deren Gleichung bekanntlich:

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = 0$$

ist, wobei f_1, f_2, f_3, f_4 die Flächeninhalte der 4 Seitenflächen des Tetraëders sind, entspricht eine Fläche 3ten Grades:

$$\frac{f_1}{\alpha} + \frac{f_2}{\beta} + \frac{f_3}{\gamma} + \frac{f_4}{\delta} = 0,$$

welche sich durch eine grössere Anzahl merkwürdiger Eigenschaften auszeichnet und überhaupt in vielfacher Hinsicht für das Tetraëder eine ähnliche Stelle vertritt, wie für das Dreieck der umschriebene Kreis. So gelten für diese Fläche folgende leicht erweisbare Sätze:

Fällt man von einem beliebigen Punkte der Fläche auf die 4 Ebenen des Tetraëders Perpendikel, so liegen deren Fusspunkte in einer Ebene. (Entsprechender Satz für den Kreis: Die Fusspunkte der von einem Punkte eines Kreises auf die Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks gefällten Perpendikel liegen in einer geraden Linie.)

Die 28 Halbirungspunkte der Linien, welche je 2 Mittelpunkte der einem Tetraëder eingeschriebenen 8 Kugeln verbinden, liegen in der diesem Tetraëder zugehörigen eben besprochenen Fläche 3ten Grades. (Entsprechender Satz: Die 6 Halbirungspunkte der Linien, welche je 2 Mittelpunkte der einem Dreiecke eingeschriebenen 4 Kreise verbinden, liegen in dem diesem Dreiecke umschriebenen Kreise.)

Den Punkten, in welchen eine Curve oder Fläche dieser Oberfläche 3ten Grades begegnet, entsprechen die unendlich fernen Punkte des entsprechenden Gebildes.

§ 4.

Einer geraden Linie, welche durch einen Eckpunkt des Tetraëders geht, entspricht wieder eine durch diesen Eckpunkt gehende gerade Linie.

Einer geraden Linie, welche 2 einander gegenüberliegende Kanten des Tetraëders schneidet, entspricht wieder eine gerade Linie, welche diese Kanten verbindet.

Einer geraden Linie, welche eine Kante des Tetraëders schneidet, entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch die beiden Endpunkte dieser Kante geht und die gegenüberliegende Kante schneidet.

Einer beliebig liegenden geraden Linie endlich entspricht eine Raumcurve 3ten Grades, welche durch die 4 Eckpunkte des Tetraëders geht. Die Kanten des Tetraëders sind für dieselbe „Linien durch 2 Punkte." Legt man aber umgekehrt die 4 Fundamentalpunkte beliebig in eine Raumcurve 3ten Grades, so entspricht dieser Curve wieder eine gerade Linie. Man wird daher im Stande sein, aus gewissen Lehrsätzen über gerade Linien solche über Raumcurven 3ten Grades abzuleiten.

So ist ein sehr leicht zu erweisender Satz der folgende:

Das Doppelschnittverhältniss von 4 Ebenen, welche durch dieselbe Kante des Tetraëders gehen, ist dem der entsprechenden Ebenen gleich.

Mit Hilfe desselben gelangt man sofort zu den anharmonischen Eigenschaften der Curven 3ten Grades, also zu dem Satz: *Die Ebenen, welche eine „Linie durch 2 Punkte" einer Raumcurve 3ten Grades mit 4 festen Punkten derselben Curve verbinden, haben ein von der Lage jener Linie ganz unabhängiges Doppelschnittverhältniss.*

Man wählt beim Beweise 2 beliebige „Linien durch 2 Punkte" aus und nimmt die 4 Schnittpunkte derselben mit der Curve zu Fundamentalpunkten. Hierauf transformirt man die Curve 3ten Grades und die 2 Ebenenbüschel, welche durch 4 feste Punkte der Curve und durch jene 2 Kanten des Tetraëders gehen, und erhält dadurch eine gerade Linie und 2 Büschel von 4 Ebenen, welche durch dieselben 4 Punkte der geraden Linie gehen. Diese beiden Büschel haben aber gleiches Doppelschnittverhältniss, also gilt dies auch von den beiden ursprünglichen Büscheln. Da diese aber zwei ganz beliebig ausgewählte „Linien durch 2 Punkte" zu Kanten hatten, so ist der Satz vollständig erwiesen.

Die Tangenten der Curve in den Fundamentalpunkten werden bestimmt, indem man die entsprechenden Strahlen sucht zu den geraden Linien, welche die Eckpunkte des Tetraëders mit den Punkten verbinden, in welchen die der Curve 3ten Grades entsprechende gerade Linie die gegenüberliegenden Tetraëderflächen schneidet.

Jeder ebenen Curve entspricht eine solche, welche auf einer Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten liegt; nur dem ebenen Durchschnitt einer Fläche dieser Art entspricht, sobald die Fundamentalpunkte beibehalten werden, eine auf einer gleichartigen Fläche 3ten Grades liegende ebene Curve 3ten Grades. Insbesondere entspricht der Durchschnitt der Fläche:

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0$$

mit der Ebene:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0$$

sich selbst.

Die so erhaltenen Curven 3ten Grades gehen durch die 6 Eckpunkte eines vollständigen Vierseits und besitzen eine Reihe bemerkenswerther Eigenschaften, welche sich aus denen der Fläche 3ten Grades leicht ergeben.

So werden die Tangenten, die man in zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Vierseits an die Curve legen kann, sich in einem Punkte der Curve schneiden. Es giebt 3 derartige Tangentenpaare und die Schnittpunkte derselben liegen in einer geraden Linie.

§ 5.

Einer Fläche 2ten Grades, welche durch die 4 Fundamentalpunkte geht, entspricht wieder eine solche, *und ist insbesondere jene ein Kegel, so ist auch die entsprechende Fläche ein Kegel.*

Diese einfache Bemerkung wird uns zu einem wichtigen Satz über die Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten führen.

Durch 4 Punkte kann man, wie leicht zu erweisen ist, 2 Kegel 2ten Grades legen, welche eine gegebene Ebene berühren und einen in derselben gelegenen Punkt zum Scheitel haben.

Diesem Satze nun würde der folgende entsprechen:

Bei einer Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten lassen sich durch diese Punkte 2 Kegel 2ten Grades legen, welche einen in der Fläche liegenden Punkt zum Scheitel haben und die Fläche berühren.

Derselbe kann aber, wenn man nur noch eine kleine Betrachtung beifügt, in der besonders bemerkenswerthen Form ausgesprochen werden:

Der Kegel, welcher eine Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten berührt und dessen Scheitel in einem beliebigen Punkte der Fläche liegt, zerfällt in 2 Kegel 2ten Grades.

Es ist zum vollständigen Beweise dieses Satzes nur noch darzuthun, dass der Berührungskegel allein aus jenen 2 Kegeln bestehen müsse. Diess geschieht z. B., indem man bemerkt, dass der Tangentialkegel einer Fläche 3ten Grades im Allgemeinen vom 6ten Grade ist, aber vom 4ten Grade wird, wenn der Scheitel in der Fläche liegt. Jene 2 Kegel 2ten Grades machen aber zusammen einen Kegel 4ten Grades aus.

§ 6.

Um einige andere Sätze über Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten mittelst unserer Transformation einfacher beweisen zu können, wollen wir zunächst etwas genauer die Auflösung der Aufgabe betrachten:

Durch 4 Punkte im Raume Flächen 2ten Grades zu legen, welche eine gegebene Fläche 2ten Grades längs einer Curve berühren.

Es sei, nachdem jene 4 Punkte zu Fundamentalpunkten gewählt worden sind, die Gleichung der gegebenen Fläche:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2$$
$$+ 2E\alpha\beta + 2F\alpha\gamma + 2G\alpha\delta + 2H\beta\gamma + 2I\beta\delta + 2K\gamma\delta = 0.$$

Indem man dieselbe unter der Form

$$(\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{B} + \gamma\sqrt{C} + \delta\sqrt{D})^2 + 2(E - \sqrt{AB})\alpha\beta + \cdots = 0$$

schreibt, erkennt man leicht, dass die Fläche

$$(E - \sqrt{AB})\alpha\beta + (F - \sqrt{AC})\alpha\gamma + \cdots = 0$$

eine der gesuchten Flächen ist, und dass die Curve, längs welcher die Berührung stattfindet, in der Ebene

$$\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{B} + \gamma\sqrt{C} + \delta\sqrt{D} = 0$$

liegt. Ueberhaupt giebt es 8 *Flächen*, welche der Aufgabe genügen, und die Gleichungen der Ebenen, in welchen die Berührungscurven liegen, sind in der allgemeinen Form

$$\pm\alpha\sqrt{A} \pm \beta\sqrt{B} \pm \gamma\sqrt{C} \pm \delta\sqrt{D} = 0$$

enthalten. Diese Ebenen sind leicht zu construiren. Die Punkte, in welchen sie die Kanten des Tetraeders schneiden, sind nämlich die *Brennpunkte der Involutionen, welche auf jeder Kante durch die Endpunkte derselben und durch die Schnittpunkte der gegebenen Fläche mit ihr bestimmt werden.*

Die 8 Ebenen lassen sich in 2 Classen theilen, von denen die zweite diejenigen 4 enthält, in deren Gleichungen nur ein negatives Vorzeichen vorkommt, die erste aber die übrigen. Die Berührungslinien in den 4 Ebenen der 1ten Classe liegen auf der *Oberfläche* 4ten *Grades*:

$$(E\alpha\beta + F\alpha\gamma + G\alpha\delta + H\beta\gamma + I\beta\delta + K\gamma\delta)^2 = AB\alpha^2\beta^2 + AC\alpha^2\gamma^2$$
$$+ AD\alpha^2\delta^2 + BC\beta^2\gamma^2 + BD\beta^2\delta^2 + CD\gamma^2\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta\sqrt{ABCD};$$

die Linien in den 4 übrigen Ebenen auf einer Fläche derselben Art, deren Gleichung sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass das letzte Glied $+2\alpha\beta\gamma\delta\sqrt{ABCD}$ ist.

Jede der 8 Ebenen schneidet aus der ihr zugehörigen Fläche 4ten Grades noch einen Kegelschnitt aus. Die 8 auf diese Weise entstehenden weiteren Kegelschnitte sind die *Berührungscurven der Flächen* 2ten *Grades, welche durch die* 4 *Fundamentalpunkte gehen und die Fläche*

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2$$
$$- 2E\alpha\beta - 2F\alpha\gamma - 2G\alpha\delta - 2H\beta\gamma - 2I\beta\delta - 2K\gamma\delta = 0$$

berühren.

Sind aber die 4 Fundamentalpunkte die *Eckpunkte eines in Bezug auf die gegebene Fläche 2ten Grades sich selbst conjugirten Tetraeders*, ist also die Gleichung der Fläche einfacher:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$

so sind die beiden zugehörigen Flächen 4ten Grades gegeben durch die Gleichungen:

$$AB\alpha^2\beta^2 + AC\alpha^2\gamma^2 + AD\alpha^2\delta^2 + BC\beta^2\gamma^2 + BD\beta^2\delta^2 + CD\gamma^2\delta^2 \\ \mp 2\,\alpha\beta\gamma\delta\sqrt{ABCD} = 0.$$

Bei jeder dieser Flächen fallen die Kegelschnitte, in welchen sie von einer der ihr zugehörigen 4 Ebenen getroffen wird, zusammen und die Oberfläche wird von jeder dieser Ebenen längs eines Kegelschnittes berührt.

Dies geht auch aus der Form hervor, welche die Gleichung einer solchen Fläche dann annimmt, wenn man die Fundamentalebenen in die 4 ihr zugehörigen Ebenen verlegt. Setzt man z. B.:

$$\begin{aligned} \alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{B} + \gamma\sqrt{C} + \delta\sqrt{D} &= X, \\ \alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{B} - \gamma\sqrt{C} - \delta\sqrt{D} &= Y, \\ \alpha\sqrt{A} - \beta\sqrt{B} + \gamma\sqrt{C} - \delta\sqrt{D} &= Z, \\ \alpha\sqrt{A} - \beta\sqrt{B} - \gamma\sqrt{C} + \delta\sqrt{D} &= W, \end{aligned}$$

so wird die Gleichung der ersten 2 Flächen zu

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2)^2 - 4\,XYZW = 0,$$

woraus sofort das Gesagte hervorgeht.

Beachtenswerth ist ausserdem auch *der Fall, in welchem die gegebene Fläche 2ten Grades die 6 Kanten des Fundamentaltetraeders berührt.* Ist dann die Gleichung derselben:

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2} + \frac{\delta^2}{D^2} - \frac{2\,\alpha\beta}{AB} - \frac{2\,\alpha\gamma}{AC} - \frac{2\,\alpha\delta}{AD} - \frac{2\,\beta\gamma}{BC} - \frac{2\,\beta\delta}{BD} - \frac{2\,\gamma\delta}{CD} = 0,$$

so zerfällt die erste der Flächen 4ten Grades in die Ebene

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0$$

und in *eine Oberfläche* 3ten *Grades*, deren Gleichung:

$$\left(\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2} + \frac{\delta^2}{D^2} - \frac{2\,\alpha\beta}{AB} - \frac{2\,\alpha\gamma}{AC} - \frac{2\,\alpha\delta}{AD} - \frac{2\,\beta\gamma}{BC} - \frac{2\,\beta\delta}{BD} - \frac{2\,\gamma\delta}{CD}\right)\left(\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}\right)$$

sich zusammenziehen lässt zu

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0.$$

Aus der nicht reducirten Form dieser Gleichung geht der schon in § 2. erwähnte Satz hervor, dass unsere Fläche 2ten Grades die Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten in 3 Kegelschnitten schneidet.

Die Gleichung der anderen Fläche 4ten Grades:

$$\left(\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}+\frac{\delta^2}{D^2}-\frac{2\alpha\beta}{AB}-\cdots\right)\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)^2$$
$$+\left(-\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{\alpha}{A}-\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}-\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}-\frac{\delta}{D}\right)=0$$

dagegen lässt sich reduciren zu

$$\left(\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}+\frac{D}{\delta}\right)\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)=2.$$

Diese Fläche wird daher von jeder der 4 Ebenen

$$-\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}=0 \text{ u. s. w.}$$

längs einer geraden Linie berührt und die 4 Berührungslinien liegen in einer Ebene.

Drei der berührenden Flächen 2ten Grades sind:

$$\frac{\alpha\beta}{AB}+\frac{\gamma\delta}{CD}=0;\quad \frac{\alpha\gamma}{AC}+\frac{\beta\delta}{BD}=0;\quad \frac{\alpha\delta}{AD}+\frac{\beta\gamma}{BC}=0.$$

Jede dieser Flächen berührt also die Fläche 2ten Grades längs derselben Curve, in welcher sie die Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten schneidet.

Eine 4te berührende Fläche 2ten Grades ist:

$$\frac{\alpha\beta}{AB}+\frac{\alpha\gamma}{AC}+\frac{\alpha\delta}{AD}+\frac{\beta\gamma}{BC}+\frac{\beta\delta}{BD}+\frac{\gamma\delta}{CD}=0.$$

Die 4 übrigen Flächen endlich sind die Tangentialkegel der Fläche 3ten Grades in ihren 4 Doppelpunkten.

§ 7.

Wenn die gegebene Fläche 2ten Grades in 2 Ebenen zerfällt, so besteht die Berührungscurve einer jeden der 8 Flächen aus 2 geraden Linien. Unter allen Flächen 2ten Grades können aber nur die Kegelflächen von einer Ebene längs einer geraden Linie berührt werden; daher sind die 8 bestimmten Flächen 2ten Grades *Kegelflächen*, deren Scheitelpunkte auf der Schnittlinie der beiden Ebenen liegen. Man hat sonach den Satz:

Durch 4 Punkte kann man 8 Kegelflächen 2ten Grades legen, welche 2 Ebenen berühren.

Diesem Satze aber entspricht ein interessanter Satz für Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten. Zunächst ergiebt sich aus ihm durch eine Betrachtung, welche der in § 5. angestellten ähnlich ist, der Satz:

Wenn 2 Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten diese gemeinsam haben, so giebt es 8 Kegelflächen 2ten Grades, welche beide berühren.

Derselbe kann aber in der besonders bemerkenswerthen Form ausgesprochen werden:

Die gemeinschaftliche umhüllende abwickelbare Fläche zweier Flächen 3ten Grades mit 4 gemeinsamen Doppelpunkten zerfällt in 8 Kegel 2ten Grades, deren Scheitel in der Durchschnittscurve beider Flächen liegen.

Zum vollständigen Beweise dieses Satzes gehört nur noch, dass man zeigt, wie die Umhüllungsfläche eben nur aus jenen 8 Kegeln bestehen kann. Dies geschieht, indem man die *Classe der Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten* untersucht.

Die Classe einer Fläche wird bekanntlich bestimmt durch die Anzahl der Tangentialebenen, welche durch eine gerade Linie an die Fläche gelegt werden können. Es sei nun von einem der Punkte aus, in welchen eine beliebige gerade Linie der Fläche begegnet, der Tangentialkegel an die Fläche gelegt, welcher, wie bewiesen wurde, aus 2 Kegeln 2ten Grades besteht. Dann sind die durch jene Linien gehenden Tangentialebenen der Fläche auch Tangentialebenen dieses Kegels; ihre Anzahl ist also 4 und *eine Fläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten ist somit von der 4ten Classe.*

Da nun die gemeinsame Umhüllungsfläche zweier Flächen 4ter Classe von der 16ten Classe ist und da jene 8 Kegel zusammen eine Fläche 16ter Classe repräsentiren, so ist erwiesen, dass ausser ihnen keine weitere Fläche zur Umhüllungsfläche gehören kann.

§ 8.

Durch die Einfachheit ihrer Gleichung besonders ausgezeichnet ist die *Hesse'sche Fläche der Oberfläche 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten.*

Die allgemeine Gleichung der Hesse'schen Fläche für die Oberfläche $f = 0$ reducirt sich im vorliegenden Falle bedeutend, da die 4 Differentialquotienten

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2},\ \frac{d^2 f}{d\beta^2},\ \frac{d^2 f}{\partial\gamma^2},\ \frac{d^2 f}{d\delta^2}$$

verschwinden. Sie kann nämlich in Folge dessen in der sehr einfachen Form geschrieben werden:

$$\sqrt{\frac{d^2 f}{d\alpha\, d\beta}\cdot\frac{d^2 f}{d\gamma\, d\delta}}+\sqrt{\frac{d^2 f}{d\alpha\, d\gamma}\cdot\frac{d^2 f}{d\beta\, d\delta}}+\sqrt{\frac{d^2 f}{d\alpha\, d\delta}\cdot\frac{d^2 f}{d\beta\, d\gamma}}=0.$$

Durch wirkliche Berechnung der Differentialquotienten wird sie zu:

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right)\left(\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\gamma}{C}\right)\left(\frac{\beta}{B}+\frac{\delta}{D}\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}\right)}=0$$

und vereinfacht sich weiter nach Wegschaffung der Wurzeln zu:

$$\left(\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}+\frac{D}{\delta}\right)\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}\right)=4\,.$$

Diese Fläche 4ten Grades, die durch ihre Gleichung Aehnlichkeit mit einer in § 6. besprochenen Fläche besitzt, geht ebenfalls durch die Kanten des Tetraeders und hat die Ecken desselben zu Doppelpunkten, auch sind die Tangentialkegel in den Eckpunkten identisch mit denen der ursprünglichen Fläche.

Ferner liegen auf dieser Fläche eine Anzahl bemerkenswerther Linien. So finden sich darauf zunächst die geraden Linien, in welchen die Ebene

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}=0$$

den Flächen des Tetraeders begegnet. Die längs dieser Linien an die Fläche gelegten Tangentialebenen haben die Gleichungen:

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}-\frac{3\delta}{D}=0\,,$$

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}-\frac{3\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}=0 \text{ u. s. w.}$$

und schneiden sich sämmtlich in einem Punkte

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C}=\frac{\delta}{D}\,.$$

Ausserdem trifft jede dieser Berührungsebenen die Fläche noch in einem Kegelschnitt und jeder dieser Kegelschnitte liegt zugleich auf einem der Kegel, welche die Fläche in den Fundamentalpunkten berühren. Die 6 Schnittpunkte der Ebene

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}=0$$

mit den Kanten des Tetraeders sind ebenfalls Doppelpunkte der Fläche und die Gleichungen der Tangentialkegel in diesen Punkten sind:

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}-\frac{4}{\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}}=0 \text{ u. s. w.}$$

Die Tangentialebenen, die man längs der Tetraederkanten an die Fläche 3ten Grades legen kann, berühren auch die Hesse'sche Fläche längs derselben Kante. Ausserdem berühren diese Ebenen die Fläche auch noch einmal, z. B. die Ebene

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}=0$$

längs der Linie

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}=0\,,\qquad \frac{\gamma}{C}-\frac{\delta}{D}=0\,.$$

Somit liegen auch weitere 6 gerade Linien auf der Fläche, deren eine die eben erwähnte ist. Je 2 dieser Linien verbinden dieselben 2 Kanten des Tetraeders, und die Punkte, in welchen beide dieselbe

Kante treffen, bilden mit den Endpunkten derselben eine harmonische Punktreihe.

Die 6 eben betrachteten Linien sind Kanten eines Tetraeders, dessen Ecken wieder Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche sind und dessen 4 Ebenen die Gleichungen haben:

$$X = -\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0,$$

$$Y = \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0,$$

$$Z = \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0,$$

$$W = \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{D} - \frac{\delta}{D} = 0.$$

Wählt man diese 4 Ebenen zu Fundamentalebenen eines neuen Coordinatensystems, so erhält die Hesse'sche Fläche die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{W}\right)(X + Y + Z + W) = 4.$$

Die Form der Gleichung bleibt daher ganz dieselbe wie vorher. Man erkennt hieraus auch, *dass die vorliegende Fläche auch Hesse'sche Fläche ist für die andere Oberfläche* 3ten *Grades mit* 4 *Doppelpunkten:*

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{W} = 0$$

oder:

$$\frac{1}{-\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}} + \frac{1}{\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}}$$

$$+ \frac{1}{\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}} + \frac{1}{\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D}} = 0.$$

Die Durchschnittslinie dieser neuen Fläche 3ten Grades mit der Fläche

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0$$

zerfällt in 3 gerade Linien und 3 Kegelschnitte, was man am einfachsten erkennt, wenn man die Gleichung der neuen Fläche in der Form schreibt:

$$\left(\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} - \frac{\delta}{D}\right)\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D}\right)$$

$$= \frac{4\,\alpha\beta\gamma\delta}{ABCD}\left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta}\right).$$

Die Kegelschnitte sind dabei diejenigen, in welchen die Flächen zugleich der in § 2. mehrfach erwähnten, von den Tangentialkegeln der Doppelpunkte umhüllten Fläche 2ten Grades begegnen.

Unter den in § 2. besprochenen Flächen 2ten Grades, welche durch 4 Kanten des Fundamentaltetraeders gehen, sind 3, welche zugleich

4 Kanten des neuen Tetraeders enthalten. Eine derselben ist $\overset{\alpha\beta}{AB} + \overset{\gamma\delta}{CD} = 0$. (Vergl. § 6.)

Auch jede dieser Flächen geht durch je einen jener Kegelschnitte. Ferner wird auch die Hesse'sche Fläche von jeder dieser 3 Oberflächen in je 2 Kegelschnitten geschnitten. Man erhält so 6 Kegelschnitte, welche zu je zweien in derselben Ebene liegen, und zwar sind die 3 sich so ergebenden Ebenen diejenigen, in welchen auch die oben erwähnten 3 Kegelschnitte sich vorfinden.

§ 9.

Wendet man unsere Transformation auf eine Curve m^{ten} Grades an, so erhält man, wie sich sehr leicht zeigen lässt, *eine Curve vom* $3\,m^{\text{ten}}$ *Grade*. Die Zahl $3\,m$ reducirt sich jedoch um 1, wenn die ursprüngliche Curve einer Kante des Fundamentaltetraeders begegnet, und um 2, wenn sie durch eine Ecke desselben geht oder 2 Kanten schneidet.

Im Allgemeinen sind überdies die Ecken des Tetraeders $m$fache Punkte der transformirten Curve und die Tangenten derselben werden erhalten, wenn man die entsprechenden Strahlen sucht zu den Linien, welche jene Eckpunkte verbinden mit den m Punkten, in welchen die gegenüberstehenden Flächen der ursprünglichen Curve begegnen.

Es ist von besonderem Interesse, auch die noch übrigen Singularitäten der transformirten Curve kennen zu lernen, da diese für die ursprüngliche Curve zum Theil eine besondere Bedeutung haben.

Es sei daher resp. für die transformirte und die ursprüngliche Curve:

M und m der *Grad*, d. h. die Anzahl der Punkte, welche die Curve mit einer beliebigen Ebene gemein hat;

N und n die *Classe*, d. h. die Anzahl der Osculationsebenen, welche durch einen beliebigen Punkt gehen;

R und r der *Rang*, d. h. die Anzahl der Tangenten, welche eine willkürlich gewählte Linie schneiden;

A und α die *Anzahl der stationären Ebenen*;

B und β die *Anzahl der stationären Punkte*;

X und x die Zahl der „Punkte in zwei Tangenten", welche in einer gegebenen Ebene liegen;

Y und y die Zahl der „Ebenen durch 2 Tangenten", welche durch einen beliebigen Punkt gehen;

G und g die Zahl der „Linien in 2 Osculationsebenen", welche durch einen beliebigen Punkt gehen;

H und h die Zahl der „Linien durch 2 Punkte", welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Diese Singularitäten sind durch die bekannten Cayley'schen Relationen mit einander verbunden, so dass aus 3 derselben die übrigen sich ergeben.

Nun ist zunächst der *Grad* der transformirten Curve

$$M = 3\,m\,.$$

Ferner ist offenbar die *Anzahl der stationären Punkte* in beiden Curven gleich, also

$$B = \beta\,.$$

Weiter ergiebt sich leicht der *Rang* der Curve. Denn derselbe ist gleich der Classe des Kegels, welcher über der Curve steht und seinen Scheitel ausserhalb der Curve hat. Liegt aber der Scheitel in der Curve selbst und ist er ein einfacher Punkt, so ist die Classe des Kegels um 2, und ist er ein $m$facher Punkt, um $2\,m$ kleiner als der Rang. Die transformirte Curve nun ist vom $3\,m^{\text{ten}}$ Grade und hat in den Fundamentalpunkten 4 $m$fache Punkte. Der Kegel, welcher über dieser Curve steht und einen der 4 Punkte zum Scheitel hat, ist vom $2\,m^{\text{ten}}$ Grade, hat die 3 Kanten des Tetraeders, welche in diesem zusammenlaufen, zu $m$fachen Linien und besitzt ausserdem h Doppelkanten und β Cuspidalkanten. Die Classe dieses Kegels ist sonach:

$$2\,m\,(2\,m - 1) - 3\,m\,(m - 1) - 2\,h - 3\,\beta = m\,(m + 1) - 2\,h - 3\,\beta,$$

und somit der Rang der Curve, welcher um $2\,m$ grösser ist:

$$R = m\,(m + 3) - 2\,h - 3\,\beta = r + 4\,m\,.$$

Hieraus ergeben sich die übrigen Singularitäten mit Hülfe der Cayley'schen Formeln:

$$H = m\,(4\,m - 3) + h,$$
$$N = n + 6\,m,$$
$$A = \alpha + 8\,m,$$
$$X = x + 4\,m\,(r + 2\,m - 2),$$
$$Y = y + 4\,m\,(r + 2\,m - 3),$$
$$G = g + m\,(18\,m + 6\,n - 17).$$

Wie bereits oben erwähnt, haben diese Grössen für die ursprüngliche Curve ihre besondere Bedeutung. *So kann man z. B. durch* 5 *Punkte*

$$H = h + m\,(4\,m - 3)$$

Curven 3ten *Grades legen, welche eine gegebene Curve* m^{ten} *Grades* 2*mal schneiden.*

§ 10.

Wenn man eine Curve oder Fläche zu mehreren Malen hinter einander auf unsere Weise transformirt, so gehen complicirtere Gestalten hervor. Werden insbesondere bei allen Transformationen 2 der

Fundamentalpunkte fest beibehalten, so entspricht einer geraden Linie nach n maliger Transformation *eine Curve* $(2n + 1)^{ten}$ *Grades mit 2 festen n fachen Punkten, welche ausserdem durch $2n$ feste Punkte geht. Einer Curve m^{ten} Grades entspricht eine solche $(2n + 1)\,m^{ten}$ Grades mit 2 festen mn fachen und $2n$ festen m fachen Punkten.*

Einer Ebene entspricht nach n maliger Transformation *eine Fläche* $(2n + 1)^{ten}$ *Grades mit zwei $2n$ fachen und $2n$ Doppelpunkten. Einer Fläche m^{ten} Grades dagegen entspricht eine Fläche $(2n + 1)\,m^{ten}$ Grades mit zwei $2mn$ fachen und $2n$ $(2m)$ fachen Punkten.*

Bereits in § 4. ist der Satz über die anharmonischen Eigenschaften der Curven 3ten Grades mit Hülfe unserer Transformation abgeleitet worden; man kann aber noch weiter gehen, wenn man den Begriff des Doppelschnittverhältnisses von 4 Flächen m^{ten} Grades, welche durch dieselbe Schnittcurve gehen, definirt als das unveränderliche Doppelschnittverhältniss der 4 Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf jene 4 Flächen. Es lässt sich alsdann nämlich leicht zeigen, dass dies Doppelschnittverhältniss der 4 transformirten Flächen dem der ursprünglichen Flächen gleich ist.

§ 11.

Während die vorhergehenden Untersuchungen sämmtlich Vierebenencoordinaten voraussetzten, sollen im Folgenden *Vierpunktcoordinaten* angenommen werden.

Sind α, β, γ, δ die Coordinaten einer Ebene, d. h. ihre Abstände von den 4 Fundamentalpunkten A, B, C, D, und ist L der Punkt, in welchem dieselbe der Tetraederkante AB begegnet, so ist

$$AL : BL = \alpha : \beta\,.$$

Durch diesen Punkt L gehen alle Ebenen, deren Coordinaten α und β denen jener Ebene direct proportional sind.

Alle Ebenen dagegen, deren Coordinaten α und β zu denen jener Ebene indirect proportional sind, gehen durch einen 2ten Punkt L', welcher erhalten wird, wenn man $AL' = BL$ oder $BL' = AL$ macht. Dabei müssen L und L' entweder beide innerhalb AB oder beide ausserhalb AB und zwar im letzteren Falle auf verschiedenen Seiten von A und B liegen.

Construirt man nun auf gleiche Weise entsprechende Punkte in den 5 übrigen Tetraederkanten, so kann man durch die 6 so erhaltenen Punkte eine Ebene legen, *deren Coordinaten alsdann proportional sind zu den reciproken Werthen von denen der gegebenen Ebene.*

Acht Ebenen giebt es, welche mit den ihnen auf diese Weise entsprechenden Ebenen zusammenfallen. Diese sind:

1) die unendlich ferne Ebene;
2) die 3 Ebenen, welche die Mittelpunkte von 4 ein räumliches Viereck bildenden Tetraederkanten verbinden;
3) die 4 Ebenen, welche durch die Mittelpunkte dreier in derselben Ecke zusammenstossender Kanten gehen.

Bestimmt man zu sämmtlichen Tangentialebenen einer Oberfläche die entsprechenden Ebenen, so umhüllen diese eine neue Oberfläche, deren Gleichung in Vierpunktcoordinaten man erhält, wenn man in derjenigen der ursprünglichen Fläche die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt.

§ 12.

Durch eine Gleichung 1ten Grades zwischen α, β, γ und δ:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0$$

wird ein Punkt bestimmt. Einem solchen entspricht im Allgemeinen eine *Oberfläche* 3ter *Classe*:

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0.$$

Ausgenommen sind dabei nur die Fälle, in welchen der Punkt in einer Kante oder in einer Fläche des Tetraeders liegt. Im ersteren Falle entspricht ihm wieder ein Punkt, im letzteren ein Kegelschnitt, welcher in derselben Fläche liegt.

Die im allgemeinen Falle erhaltene Oberfläche berührt jede der Fundamentalebenen längs eines Kegelschnittes und die Gleichungen dieser Kegelschnitte sind:

$$\frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Diese Kegelschnitte sind den Dreiecksflächen des Tetraeders einbeschrieben und je 2 berühren die nämliche Kante in einem und demselben Punkte. Die 6 so sich ergebenden Punkte sind *Spitzen* der Fläche.

Verbindet man die auf je 2 sich nicht schneidenden Kanten liegenden Spitzen, so erhält man 3 gerade Linien, deren Gleichungspaare sind:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 0, \quad \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\gamma}{C} = 0, \quad \frac{\beta}{B} + \frac{\delta}{D} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\delta}{D} = 0, \quad \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

Diese Linien liegen auf der Fläche und sind Doppellinien derselben; in jedem Punkte der Linien lassen sich 2 Tangentialebenen an die Fläche legen. Ferner geht aus den Gleichungen hervor, *dass*

sich die 3 Doppellinien in einem Punkte schneiden, dessen Gleichung ist:

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}=0.$$

Derselbe ist ein 3*facher Punkt der Oberfläche* und die Coordinaten seiner Tangentialebenen sind bestimmt durch

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=-\frac{\gamma}{C}=-\frac{\delta}{D},$$
$$\frac{\alpha}{A}=-\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C}=-\frac{\delta}{D},$$
$$\frac{\alpha}{A}=-\frac{\beta}{B}=-\frac{\gamma}{C}=\frac{\delta}{D}.$$

Die Kegelschnitte, längs welchen die Fläche von den Tetraederebenen berührt wird, liegen zusammen auf einer Fläche 2ter *Classe, welche die* 6 *Kanten des Tetraeders berührt* und deren Gleichung ist:

$$\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}+\frac{\delta^2}{D^2}-\frac{2\alpha\beta}{AB}-\frac{2\alpha\gamma}{AC}-\frac{2\alpha\delta}{AD}-\frac{2\beta\gamma}{BC}-\frac{2\beta\delta}{BD}-\frac{2\gamma\delta}{CD}=0.$$

Diese und die Fläche 3ter *Classe haben ferner zur gemeinsamen Umhüllenden* 3 *Kegel* 2ten *Grades, deren Scheitel durch die Gleichungen*

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}-\frac{\gamma}{C}-\frac{\delta}{D}=0 \quad \text{u. s. w.}$$

bestimmt sind.

Dieselben Kegel umhüllen zugleich eine 2te Fläche 3ter Classe, deren Gleichung

$$-\frac{1}{\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{A}-\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}}$$
$$+\frac{1}{\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}-\frac{\gamma}{C}+\frac{\delta}{D}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}-\frac{\delta}{D}}=0$$

ist. *Dieselbe hat mit jener Fläche* 3ter *Classe die* 3 *Doppellinien gemeinschaftlich und die* 4 *ihr zugehörigen Kegelschnitte liegen auf derselben Fläche* 2ter *Classe, als die jener Fläche.*

Jede Fläche 2ten Grades, welche durch 4 ein räumliches Viereck bildende Kanten des Tetraeders geht, hat mit der Fläche 3ter Classe als gemeinsame Umhüllende einen Kegel 2ter Classe, dessen Scheitel in einer der Doppellinien der Fläche liegt.

Alle diese Sätze sind reciprok zu denen, welche oben für Flächen 3ten Grades mit 4 Doppelpunkten nachgewiesen wurden. Die hier behandelten Flächen aber sind nichts weiter, als die unter dem Namen *der Steiner'schen Flächen* bekannten Flächen 4ten Grades oder 3ter Classe, deren Gleichung in Vierebenencoordinaten gewöhnlich in der Form gegeben wird:

$$A\beta^2\gamma^2+B\gamma^2\alpha^2+C\alpha^2\beta^2=2D\alpha\beta\gamma\delta.$$

Ist insbesondere das Fundamentaltetraeder regulär, so stellt die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=0$$

in Vierpunktcoordinaten eine Steiner'sche Fläche dar, welche von den 4 Fundamentalebenen in Kreisen berührt wird, und deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten in der Form gegeben werden kann:

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=2\,c\,xyz\,.$$

§ 13.

Einem Büschel von Ebenen mit gemeinsamer Durchschnittslinie entspricht eine abwickelbare Fläche 3[ter] *Classe.* Die Rückkehrkante dieser Fläche ist eine Curve 3[ter] Classe, also auch 3[ten] Grades, welche die 4 Seitenflächen des Tetraeders zu Osculationsebenen hat. Die Kanten des Tetraeders sind sonach Linien in 2 Osculationsebenen der Curve.

Ueberhaupt entspricht einer abwickelbaren Fläche m^{ter} Classe eine solche der $3\,m^{ten}$ Classe, deren Rückkehrkante von jeder Tetraederfläche m mal osculirt wird.

Der gemeinsamen umhüllenden developpablen Fläche zweier Oberflächen entspricht die umhüllende Fläche der entsprechenden Oberflächen. Nun ist offenbar die umhüllende Fläche zweier Flächen 1[ter] Classe, d. i. zweier Punkte, ein Büschel von Ebenen, welche durch die Verbindungslinie beider Punkte gehen. Versteht man daher unter 2 demselben Tetraeder eingeschriebenen Steiner'schen Flächen 2 solche, welche die längs eines Kegelschnittes berührenden Ebenen gemeinsam haben, so ergiebt sich der Satz:

Die gemeinschaftliche abwickelbare Umhüllungsfläche zweier demselben Tetraeder eingeschriebenen Steiner'schen Flächen ist von der 3[ten] *Classe und die Seitenflächen des Tetraeders sind Osculationsebenen ihrer Rückkehrkante.*

Die 2 wichtigen Sätze, welche in §§ 5. und 7. für die Flächen 3[ten] Grades mit 4 Doppelpunkten bewiesen worden sind, haben auch ihre Analoga für Steiner'sche Flächen, und diese lauten:

Die Linie, in welcher eine Steiner'sche Fläche durch eine Tangentialebene geschnitten wird, zerfällt in 2 Kegelschnitte.

Wenn 2 Steiner'sche Flächen demselben Tetraeder eingeschrieben sind, so besteht ihre gemeinsame Durchschnittslinie aus 8 Kegelschnitten, deren Ebenen die gemeinschaftliche Umhüllungsfläche berühren.

Auch die anharmonischen Eigenschaften lassen sich hier in ganz ähnlicher Weise auf die entsprechenden Gebilde übertragen, wie bei Vierebenencoordinaten. So gelangt man von den Eigenschaften des Ebenenbüschels ausgehend sofort zu dem Satz:

Das Doppelschnittverhältniss der 4 Punkte, in welchen eine in 2 beliebigen Osculationsebenen einer Curve 3ter Classe liegende gerade Linie von 4 festen Osculationsebenen geschnitten wird, ist constant.

§ 14.

Will man etwa bei der Discussion der Steiner'schen Flächen statt der Vierpunktcoordinaten die Vierebenencoordinaten zu Grunde legen, so bietet sich in den meisten Fällen als bequemste Form der Gleichung der vollkommenen Symmetrie halber jedenfalls die folgende dar:

$$\sqrt{a\alpha} + \sqrt{b\beta} + \sqrt{c\gamma} + \sqrt{d\delta} = 0.$$

Auch hier berühren die 4 Ebenen des Tetraeders die Fläche längs der 4 Kegelschnitte:

$$\sqrt{b\beta} + \sqrt{c\gamma} + \sqrt{d\delta} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Ferner erkennt man aus der von den Wurzeln der befreiten Gleichung der Oberfläche:

$$[a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + d^2\delta^2 - 2ab\alpha\beta - 2ac\alpha\gamma - \cdots]^2 = 64\,abcd\,\alpha\beta\gamma\delta$$

sofort, dass die 4 Kegelschnitte sämmtlich auf der Oberfläche 2ten Grades

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + d^2\delta^2 - 2ab\alpha\beta - 2ac\alpha\gamma - \cdots = 0$$

liegen.

Der Mittelpunkt der Steiner'schen Fläche oder der Schnittpunkt ihrer Doppellinien wird bestimmt durch die Gleichung:

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta,$$

während die Doppellinien selbst gegeben sind durch die Gleichungspaare:

$$a\alpha - b\beta = 0, \quad c\gamma - d\delta = 0;$$
$$a\alpha - c\gamma = 0, \quad b\beta - d\delta = 0;$$
$$a\alpha - d\delta = 0, \quad b\beta - c\gamma = 0.$$

Die durch je 2 Doppellinien gelegten 3 Ebenen dagegen haben die Gleichungen:

$$X = a\alpha + b\beta - c\gamma - d\delta = 0,$$
$$Y = a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta = 0,$$
$$Z = a\alpha - b\beta - c\gamma + d\delta = 0.$$

Führt man ausser diesen noch die 4te Ebene

$$W = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

ein und wählt alsdann X, Y, Z und W zu Fundamentalebenen, so erhält man die Gleichung der Fläche unter der bekannten Form:

$$Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 = 2\,XYZW,$$

während durch

$$Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 + X^2 Y^2 = 2\,X\,Y\,Z\,W$$

die in § 12. erwähnte zu jener conjugirte Steiner'sche Fläche dargestellt wird.

Aus der von Wurzeln befreiten Gleichung der Steiner'schen Fläche geht noch ein Satz hervor über die 8 Kegelschnitte, in welchen sich 2 demselben Tetraeder eingeschriebene Steiner'sche Flächen schneiden. Es zeigt sich nämlich, *dass von ihnen* 4 *auf der einen und* 4 *auf der anderen der durch die Gleichung*

$$\sqrt{a'b'c'd'}\,(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + d^2\delta^2 - 2\,a\,b\,\alpha\beta - \cdots)$$
$$= \pm\sqrt{a\,b\,c\,d}\,(a'^2\alpha^2 + b'^2\beta^2 + c'^2\gamma^2 + d'^2\delta^2 - 2\,a'b'\,\alpha\beta - \cdots)$$

dargestellten beiden Flächen 2ten *Grades liegen.*

Reichenbach im Voigtlande, October 1871.

Ueber eine besondere Curve 3ter Ordnung nnd eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung.

Von H. Schröter in Breslau.

Es giebt eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen ebenen Curve 3ter Ordnung, welche sich der Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Strahlbüschel am nächsten anschliesst und unmittelbar zu denjenigen Eigenschaften der Curve 3ter Ordnung hinführt, welche zu den bekanntesten und wichtigsten gehören. Diese Erzeugungsart liefert auch einfache Constructionen der Curve, deren Punkte z. B. allein mittelst des Lineals und eines ein für alle Mal zu zeichnenden Kegelschnittes (oder Kreises) in beliebiger Anzahl und auf continuirliche Weise gefunden werden, so dass man sich ohne grosse Mühe ein anschauliches Bild der Curve herstellen kann. Es scheint durch diese Erzeugungsart ein gelegentlicher Ausspruch Steiner's bestätigt zu werden (Crelle's Journal Bd. 47, S. 6), „*dass das eigentliche Wesen vieler Eigenschaften der Curven 3ten Grades vornehmlich auf der sogenannten Involution beruht.*“ Zu dieser Erzeugungsweise wird man von selbst hingeführt durch eine besondere Curve 3ter Ordnung, den Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar von 4 gemeinschaftlichen Tangenten, und diese besondere Curve nimmt dadurch einiges Interesse in Anspruch, dass sie gewissermassen in der Theorie der Curven 3ter Ordnung dieselbe Stelle einnimmt, wie der Kreis unter den Kegelschnitten. Obgleich nun sowohl diese besondere Curve 3ter Ordnung*), als auch die obige Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung den Geometern keineswegs unbekannt sind, so scheint es doch vielleicht nicht überflüssig, den angedeuteten Gegenstand durch einfache synthetische Betrachtung klar zu legen und dadurch dem Studium der ebenen Curven 3ter Ordnung einen leichteren Zugang zu verschaffen.

---

*) Die in Rede stehende Curve findet sich in Fiedler-Salmon's Kegelschnitten (2. Auflage, Seite 355 und 397) erwähnt, wo einige besondere Punktes von ihr angegeben sind und ihre Gleichung aufgestellt wird.

A. Die Brennpunktscurve einer Kegelschnittschaar.

1. Bekanntlich gehören die 3 Strahlenpaare, welche von irgend einem Punkte P der Ebene nach den 3 Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits hingehen, demselben Strahlsysteme an, oder bilden eine Involution von Strahlenpaaren; wir können ein solches Strahlsystem das dem Punkte P in Bezug auf das vollständige Vierseit *zugehörige* Strahlbüschel nennen; denken wir uns die ganze Kegelschnittschaar diesem vollständigen Vierseit einbeschrieben, so sind alle Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte dieser Schaar Strahlenpaare desselben dem Punkte P zugehörigen Strahlsystems. Ist insbesondere das einem Punkte P in Bezug auf ein vollständiges Vierseit zugehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges, d. h. ein solches, dessen sämmtliche Strahlenpaare dieselben Winkelhalbirenden (Asymptoten) haben, so muss dieser Punkt P Brennpunkt eines gewissen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes sein; dies folgt aus bekannten Focaleigenschaften der Kegelschnitte, wonach das durch 2 feste Tangenten auf einer veränderlichen 3ten Tangente abgeschnittene Stück von einem Brennpunkt aus gesehen unter constantem Winkel (oder Nebenwinkel) erscheint; hat nun das dem Punkte P in Bezug auf das vollständige Vierseit zugehörige Strahlsystem die Eigenschaft, ein hyperbolisch-gleichseitiges zu sein und nehmen wir 3 von den Seiten des vollständigen Vierseits zu Tangenten eines Kegelschnittes, welcher P zu einem Brennpunkte hat, wodurch dieser vollständig und eindeutig bestimmt wird, so berührt er nach dem angezogenen Satze auch die 4te Seite des Vierseits.

Die Aufgabe, den Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar zu finden, lässt sich hiernach auch so aussprechen: *Den Ort eines Punktes P zu finden, für welchen das aus den Tangentenpaaren an eine Kegelschnittschaar gebildete Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges wird.*

2. Um diesen Ort näher zu erforschen, gehen wir von einem vollständigen Vierseit aus, dessen 3 Paar Gegenecken ab, $a'b'$, $a''b''$ seien und denken uns eine Kegelschnittschaar demselben einbeschrieben. Der Ort ihrer Brennpunkte geht offenbar durch die 3 Paar Gegenecken selbst hindurch, weil diese als besondere Brennpunktspaare für unendlich schmale Kegelschnitte (oder Punktenpaare) der Schaar auftreten. Ueberhaupt gruppiren sich die Punkte des gesuchten Ortes zu Paaren und wir wollen die beiden Brennpunkte eines und desselben Kegelschnittes der Schaar ein Paar *conjugirte Punkte* des Ortes nennen. Nehmen wir 2 beliebige Kegelschnitte der Schaar mit den Brennpunktpaaren AB, $A'B'$ heraus, so bilden die beiden Strahlenpaare von einer Ecke des vollständigen Vierseits, z. B. von a

nach den Punktenpaaren AB, $A'B'$ gezogen und das durch a gehende Seitenpaar (Tangentenpaar beider Kegelschnitte) 3 Strahlenpaare desselben hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystems; betrachten wir aber AB, $A'B'$ als 2 Paar Gegenecken eines neuen vollständigen Vierseits, dessen drittes Eckenpaar $A''B''$ ist, nämlich:

$$(AA', BB') = A'', \qquad (AB', BA') = B'',$$

so müssen auch (nach 1.) aA'' und aB'' ein Strahlenpaar dieses Strahlsystems sein; dasselbe gilt für jeden der übrigen 5 Eckpunkte $ba'b'a''b''$; liegen nun $aa'a''$ in einer Seite des gegebenen vollständigen Vierseits und wir denken uns einen Kegelschnitt, welcher $A''B''$ zu Brennpunkten hat und die Seite $aa'a''$ berührt, wodurch er vollständig und eindeutig bestimmt wird, so muss derselbe auch die 3 anderen Seiten des ersten Vierseits berühren, also der gegebenen Schaar angehören; denn die 3 durch $aa'a''$ gehenden 2ten Tangenten dieses Kegelschnittes können wegen der symmetrischen Lage des Tangentenpaares zu dem Strahlenpaare nach den Brennpunkten nichts anderes sein, als die 3 übrigen Seiten des vollständigen Vierseits. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Sind AB, $A'B'$ die Brennpunktpaare zweier beliebiger einem vollständigen Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte und bestimmt man die Schnittpunkte

$$(AA', BB') = A'', \qquad (AB', BA') = B'',$$

so sind $A''B''$ die Brennpunkte eines 3ten demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes.

Dieser Satz ist noch einer Verallgemeinerung fähig; wenn wir nämlich AB, $A'B'$ als 2 Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits auffassen und statt des 3ten Paares die Brennpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eines beliebigen diesem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes nehmen, welcher also die 4 Verbindungslinien AA', AB', BA', BB' berührt, so gilt für die Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ genau dasselbe Raisonnement, wie vorhin für die Punkte $A''B''$, so dass wir folgenden Satz aussprechen können:

Sind AB, $A'B'$ die Brennpunktpaare zweier beliebiger einem vollständigen Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte und man nimmt einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher die 4 Verbindungslinien AA', AB', BA', BB' berührt, so sind die Brennpunkte desselben $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zugleich ein Brennpunktspaar eines 3ten dem ursprünglichen Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes.

3. Aus dem Vorigen ergiebt sich ein bequemes Mittel, Punktenpaare der gesuchten Ortscurve durch blosses Verbinden von Punkten in unzähliger Menge aber in discreter Lage zu erlangen, sobald ausser dem vollständigen Vierseit nur noch ein beliebiges Brennpunktpaar AB bekannt ist; denn aus 2 Brennpunktpaaren kann man allemal

ein drittes finden; man combinirt also zunächst AB mit jedem der Paare ab, $a'b'$, $a''b''$ und gelangt dadurch zu 3 neuen Paaren, die man in passender Weise wieder unter einander und mit den früheren combiniren kann u. s. f. In praktischer Beziehung empfiehlt sich dies Verfahren, weil man bald so viel Punkte des Ortes erhält, dass dieselben ein annäherndes Bild des Verlaufes der Curve gewähren; wir schliessen aber auch zugleich aus dieser Construction, dass der gesuchte Ort eine *Curve 3ter Ordnung* sein wird, weil wir unzählig viele Gerade finden, welche 3 Punkte des Ortes enthalten. Auch lässt sich zeigen, dass, wenn wir irgend 2 Punkte des Ortes AA' mit einander verbinden, diese Gerade nur noch einen einzigen 3ten Punkt des Ortes A'' enthält, nämlich den Schnittpunkt

$$(AA',\ BB') = A'',$$

wo B und B' die conjugirten Punkte zu A und A' (oder die 2ten Brennpunkte) bedeuten.

In der That, wäre auf der Geraden AA' ausser dem Punkte A'' noch ein 4ter Punkt A''' des Ortes vorhanden und dessen conjugirter B''', so würden BB''', $B'B'''$, $B''B'''$ die Gerade AA' ebenfalls in 3 neuen Punkten des Ortes treffen müssen, deren conjugirte mit den vorigen Punkten BB'.. verbunden wiederum neue Schnittpunkte auf AA' liefern würden, die dem Orte angehören u. s. f.; folglich gäbe es auf der Geraden AA' unzählig viele Punkte des Ortes, was widersinnig ist.

Da nach dem in 2. bewiesenen Satze jeder Kegelschnitt, welcher dem vollständigen Vierseit mit den 3 Paar Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ einbeschrieben ist, ein Brennpunktspaar hat, welches zugleich Brennpunktspaar eines gewissen dem ursprünglichen Vierseit mit den Gegenecken ab, $a'b'$, $a''b''$ einbeschriebenen Kegelschnittes ist, so fällt der gesammte Ort der Brennpunkte für die dem einen Vierseit einbeschriebene Kegelschnittschaar mit dem für die andere zusammen und wir können an Stelle des ursprünglichen Vierseits ab, $a'b'$, $a''b''$ ein beliebiges anderes AB, $A'B'$, $A''B''$ setzen, dessen Gegenecken 3 Paare conjugirter Punkte sind und von denen 2, A und A', beliebig auf der Ortscurve zu wählen, die übrigen von ihnen abhängig sind. Da solche vollständige Vierseite, wie AB, $A'B'$, $A''B''$ in unendlicher Anzahl hergestellt werden können, so erhalten wir unendlich viele Kegelschnittschaaren in der Ebene, welche sämmtlich denselben Ort der Brennpunkte haben; der Zusammenhang zwischen diesen Schaaren wird später erörtert werden; wir bemerken zunächst folgendes Ergebniss:

Irgend ein Punkt der Brennpunktscurve mit sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte derselben verbunden liefert ein ihm zugehöriges hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem.

4. Da auf diese Weise jedem Punkte der Brennpunktscurve ein bestimmtes hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem zugehört, so liegt es nahe, die 2 conjugirten Punkten der Curve zugehörigen Strahlsysteme zu untersuchen, welche in einer sehr einfachen Abhängigkeit von einander stehen.

Nehmen wir eines jener vollständigen Vierseite heraus, dessen 3 Paar Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ Paare conjugirter Punkte der Curve sind und bilden das Diagonaldreieck:

$$(A'B',\ A''B'') = x, \quad (A''B'',\ AB) = y, \quad (AB,\ A'B') = z,$$

fällen aus x ein Perpendikel auf AB, dessen Fusspunkt C sei, so ist C offenbar ein Punkt der Ortscurve; denn die 4 von C nach $A'B'zx$ gehenden Strahlen sind harmonisch gelegen, ebenso wie die nach $A''B''yx$ gehenden; 2 zugeordnete von solchen 4 harmonischen Strahlen stehen aber senkrecht auf einander, foglich halbiren sie die Winkel zwischen den anderen beiden zugeordneten Strahlen und wir erkennen, dass das dem Punkte C in Bezug auf das vollständige Vierseit zugehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges ist, dessen einer Doppelstrahl CAB, mithin der andere Cx ist. Wir schliessen hieraus folgenden Satz:

In jedem vollständigen Vierseit, dessen 3 Paar Gegenecken Paare von conjugirten Punkten der Brennpunktscurve sind, bilden die Diagonalen ein Dreiseit, dessen Höhenfusspunkte auf der Brennpunktscurve liegen. (Wir erhalten dadurch aufs Neue unendlich viele Tripel von Punkten des gesuchten Ortes.)

Es ist ferner ersichtlich, dass auf AB der Höhenfusspunkt C der einzige Punkt des Ortes sein muss, denn gäbe es noch einen zweiten C', so müsste auch sein zugehöriges Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges sein und da ein Doppelstrahl $C'AB$ ist, so müsste der andere senkrecht darauf stehen; er müsste aber auch durch x gehen; folglich gäbe es 2 Senkrechte aus x auf AB, was widersinnig ist. Da nun C der 3te Schnittpunkt der Diagonale AB mit der Curve ist und die in C auf AB errichtete Senkrechte unverändert bleibt, wenn wir AB festhalten, aber in dem vollständigen Vierseit das andere Eckenpaar $A'B'$ und mit ihm also auch das 3te $A''B''$ variiren, so bleibt der Schnittpunkt $x = (A'B',\ A''B'')$ auf einer Geraden und wir erhalten den Satz:

Von dem einem Punkte A der Brennpunktscurve zugehörigen Strahlsystem durchbohrt jedes Strahlenpaar dieselbe in 2 Paaren conjugirter Punkte $A'B'$ und $A''B''$, deren Verbindungslinien sich in einem veränderlichen Punkte x

$$(A'B',\ A''B'') = x$$

schneiden; dieser durchläuft eine bestimmte gerade Linie L, welche,

wenn B der conjugirte Punkt zu A ist, auf der Verbindungslinie AB senkrecht steht in dem 3ten Schnittpunkte derselben C mit der Brennpunktscurve. Diese Geraden L und AB sind die Asymptoten des dem Punkte C zugehörigen Strahlsystems.

Aus dieser Eigenschaft erkennen wir die Abhängigkeit, in welcher die zweien conjugirten Punkten zugehörigen Strahlsysteme von einander stehen. Sind A und B 2 conjugirte Punkte des Ortes und denken wir uns die ihnen zugehörigen Strahlsysteme hergestellt, deren Strahlenpaare so auf einander bezogen werden sollen, dass entsprechende Strahlenpaare solche heissen, welche nach einem beliebigen aber demselben Paare conjugirter Punkte $A'B'$ von A und von B aus hingehen und die sich daher noch in einem 2ten Paare conjugirter Punkte $A''B''$ schneiden müssen, dann entspricht jedem Strahlenpaar des Strahlsystems (A) ein bestimmtes Strahlenpaar des Strahlsystems (B) und umgekehrt und der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare ist die Brennpunktscurve. Das Entsprechen der Strahlenpaare von den beiden Systemen (A) und (B) kann nun zurückgeführt werden auf ein Entsprechen gewöhnlicher projectivischer Strahlbüschel; wenn wir nämlich Ax und Bx ziehen, so ist Ax der zugeordnete 4te harmonische Strahl zu AB und dem Strahlenpaare des Strahlsystems (A), Bx der zugeordnete 4te harmonische Strahl zu BA und dem entsprechenden Strahlenpaare des Strahlsystems (B); Ax und Bx beschreiben aber gewöhnliche projectivische Strahlbüschel, welche perspectivisch liegen und L zu ihrem perspectivischen Durchschnitt haben; folglich stehen auch die Strahlsysteme (A) und (B) in projectivischer Beziehung. Bekanntlich reducirt man ein Kegelschnittbüschel auf ein einfaches Strahlbüschel, indem man die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels herstellt; ein Strahlsystem ist nichts anderes, als ein specielles Kegelschnittbüschel und wird in gleicher Weise auf ein einfaches Strahlbüschel reducirt; 2 Kegelschnittbüschel heissen projectivisch, wenn die Strahlbüschel, auf welche sie reducirt sind, in projectivischer Beziehung stehen; sie erzeugen dann eine allgemeine Curve 4ten Grades; ebenso erzeugen 2 projectivische Strahlsysteme eine Curve 4ten Grades, welche indessen die beiden Mittelpunkte zu Doppelpunkten haben muss; sind nun insbesondere, indem man von irgend einem Punkte in der Verbindungslinie der Mittelpunkte die Polaren in Bezug auf beide Strahlsysteme nimmt, die dadurch erhaltenen reducirenden Strahlbüschel perspectivisch, so fallen in die Verbindungslinie der Mittelpunkte Theile (Strahlen) entsprechender Strahlenpaare; die Curve 4ten Grades zerfällt daher in eine Gerade, die Verbindungslinie der Mittelpunkte, und eine Curve 3ten Grades, welches hier die Brennpunktscurve ist. Wir haben also folgenden Satz:

Die Brennpunktscurve ist das Erzeugniss zweier projectivischer (hyperbolisch-gleichseitiger) Strahlsysteme, welche so liegen, dass in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen.

Wir wollen 2 solche projectivische Strahlsysteme *halbperspectivisch liegend* nennen.

Nach dem Vorigen kann die Brennpunktscurve in mannichfachster Weise durch 2 projectivische Strahlsysteme in halbperspectivischer Lage erzeugt werden, indem man irgend ein Paar conjugirter Punkte zu Mittelpunkten und je 2 nach einem anderen Paare conjugirter Punkte hinlaufende Strahlenpaare zu entsprechenden der beiden erzeugenden Strahlsysteme nimmt. Umgekehrt, sind 2 hyperbolisch-gleichseitige Strahlsysteme in halbperspectivischer Lage gegeben, also der perspectivische Durchschnitt der beiden reducirenden Strahlbüschel bekannt, so kann man zu jedem Strahlenpaar des einen Systems das entsprechende des anderen auf folgende Art finden:

Sind AB die Mittelpunkte der beiden Strahlsysteme, L der perspectivische Durchschnitt der reducirenden Strahlbüschel und nimmt man irgend einen Punkt x desselben, betrachtet das Strahlenpaar AB, Ax und die Asymptoten des Strahlsystems (A) als 2 Strahlenpaare eines dadurch bestimmten neuen Strahlsystems, dessen Asymptoten ll' man ermittelt, macht man dasselbe für B, indem man BA und Bx als ein Strahlenpaar, die Asymptoten des Strahlsystems (B) als ein 2tes Strahlenpaar zur Bestimmung eines neuen Strahlsystems nimmt, dessen Asymptoten mm' seien, so sind ll' und mm' entsprechende Strahlenpaare der beiden die Brennpunktscurve erzeugenden Strahlsysteme (A) und (B), d. h. sie schneiden sich in 2 Paaren conjugirter Punkte der Curve. Diese Construction kommt darauf hinaus, bei 2 concentrischen hyperbolischen Strahlsystemen das gemeinschaftliche Strahlenpaar zu finden (Steiner's Vorlesungen II. S. 61 und 163); da ein solches bekanntlich auch imaginär sein kann, so können auch imaginäre Strahlenpaare einander entsprechen oder ein reelles einem imaginären.

5. Die Mittelpunkte zweier die Brennpunktscurve erzeugenden Strahlsysteme sind nicht ganz willkürlich zu wählen, sondern sie sind selbst ein Paar conjugirter Punkte oder ein Brennpunktspaar eines der gegebenen Schaar angehörigen Kegelschnittes; hieraus folgt unmittelbar eine charakteristische Eigenschaft von ihnen in Bezug auf die Curve, welche den gesammten Ort aller Brennpunkte bildet. Seien nämlich A und B die Mittelpunkte zweier erzeugenden Strahlsysteme, C der 3te Schnittpunkt der Verbindungslinie AB mit der Brennpunktscurve und D sein conjugirter, d. h. C und D ein Brennpunktspaar eines gewissen Kegelschnittes der ursprünglichen Schaar, dann lassen

sich auch C und D als die Mittelpunkte zweier neuen erzeugenden Strahlsysteme auffassen und es muss dem Strahlenpaare DA, DB der Doppelstrahl CA, CB entsprechend sein; diese beiden entsprechenden Strahlenpaare bilden allemal, wie wir wissen, ein vollständiges Vierseit, dessen beide übrigen Eckenpaare auf der Curve liegen und in unserem Falle degenerirt das Vierseit in ein Dreiseit, weil CA und CB zusammenfallen, folglich müssen DA und DB die Tangenten der Curve in A und B sein oder dieselbe in je 2 zusammenfallenden Schnittpunkten treffen. Wir schliessen also:

Jedes Brennpunktspaar eines Kegelschnittes der Schaar ist ein solches Punktenpaar der Brennpunktscurve, dass seine beiden Tangenten sich auf der Curve selbst schneiden, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, ein Brennpunktspaar auf der Curve hat denselben Tangentialpunkt. Hiernach sind also die Brennpunktspaare conjugirte Punkte in dem Sinne, wie sie bei der Tripelcurve auftreten (Steiner's Vorlesungen II. § 62.) oder correspondirende Punkte (Durège, die ebenen Curven 3ter Ordnung, Nr. 378).

Da die 2te Asymptote des dem Punkte C zugehörigen Strahlsystems ebenfalls der Brennpunktscurve in einem Paar conjugirter Punkte begegnet, deren Tangenten sich in D schneiden, so bilden die 4 aus einem Punkte D der Brennpunktscurve an dieselbe gelegten Tangenten 2 Strahlenpaare des dem Punkte D zugehörigen hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystems.

Ein besonderes Brennpunktspaar der Kegelschnittschaar ist der Brennpunkt P der einzigen ihr einbeschriebenen Parabel und der unendlich entfernte Punkt Q_∞ derjenigen Geraden, welche die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schaar enthält; bestimmen wir die beiden erzeugenden Strahlsysteme, welche diesen Punkten P und Q_∞ zugehören, indem wir eines jener vollständigen Vierseite, dessen 3 Paar Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ 3 Paare conjugirter Punkte der Curve sind, herausnehmen und sowohl P als auch Q_∞ mit letzteren verbinden; das Strahlsystem (P) bietet dabei nichts Eigenthümliches dar, wohl aber das Strahlsystem (Q_∞), dessen Strahlenpaare sämmtlich aus Parallelen zur Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ bestehen, die paarweise von ihr gleich weit abstehen; die eine Asymptote desselben ist also die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ selbst und die andere die unendlich entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, wie aus der Grundeigenschaft des Strahlsystems hervorgeht. Das projectivische Entsprechen dieser beiden erzeugenden Strahlsysteme wird dadurch hergestellt, dass wir den 3ten Schnittpunkt R auf der Verbindungslinie PQ_∞ mit der Curve ermitteln und in ihm eine Senkrechte auf PQ_∞ errichten. Auf dieser Geraden L lassen wir einen veränderlichen Punkt x laufen, dann beschreiben Px und $Q_\infty x$ die reducirenden Strahlbüschel, zu welchen die zugehörigen Strahlenpaare

der Strahlsysteme (P) und (Q_∞) in der oben (4.) angegebenen Weise gefunden werden. Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn x selbst der unendlich entfernte Punkt von L wird; dann wird das eine Strahlenpaar des Systems (Q_∞) die Asymptote $\mathfrak{G}_\infty$ und das entsprechende Strahlenpaar des Systems (P) erhalten wir, indem wir einmal PQ_∞ und Px_∞ ziehen, die offenbar auf einander senkrecht stehen, andererseits die beiden zu einander senkrechten Asymptoten des hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystems (P) hinzunehmen und diese beiden Strahlenpaare zur Bestimmung eines neuen Strahlsystems wählen, dessen Asymptoten bekanntlich, da es ein circulares Strahlsystem ist, nach den beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkten hingehen; diese beiden imaginären Asymptoten bilden das entsprechende Strahlenpaar zu dem Doppelstrahl $\mathfrak{G}_\infty$; wir schliessen also folgenden Satz:

Der Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar geht durch die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen, welche als ein Paar conjugirter Punkte dieser Curve 3[ter] *Ordnung aufzufassen sind, indem sie denselben reellen Tangentialpunkt in dem Brennpunkte der einzigen Parabel der Schaar haben.*

Dies war übrigens auch vorauszusehen, weil die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen allemal als ein Brennpunktspaar für jeden Kegelschnitt in der Ebene aufzufassen sind (Steiner's Vorlesungen II. Seite 483).

Hierdurch documentirt sich ein particulärer Charakter der Brennpunktscurve, welcher ihr eine ähnliche Stellung zur allgemeinen Curve 3[ter] Ordnung anweist, wie dem Kreise zum allgemeinen Kegelschnitt.

6. Durch das besondere Brennpunktspaar PQ_∞ wird man zu einer ganz elementaren Construction der Brennpunktscurve geführt, welche ein specieller Fall ist von der Chasles'schen Erzeugungsart einer Curve 3[ter] Ordnung vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit demselben projectivischen Strahlbüschels.*) Wir wollen diese Zurückführung hier in Kürze einschalten:

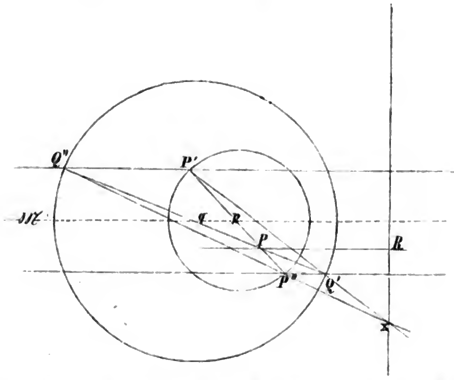
Nehmen wir zu dem besonderen Brennpunktspaar PQ_∞ ein beliebiges zweites $P'Q'$, so ist von ihm ein drittes $P''Q''$ abhängig:

$$(P'P,\ Q'Q_\infty) = P'', \qquad (PQ',\ P'Q_\infty) = Q'',$$

so dass man also ein vollständiges Vierseit erhält, dessen 2 Seiten $P'Q''$ und $P''Q'$ zu $\mathfrak{M}$ parallel laufen, während die anderen beiden $P'P''$ und $Q'Q''$ sich in P schneiden. Da $P'Q'$ und $P''Q''$ Brennpunktspaare von 2 Kegelschnitten der Schaar sind, deren Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ ist, so werden die Strecken $P'Q'$ und $P''Q''$ durch $\mathfrak{M}$ halbirt

*) Diese Construction ist nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Prof. Durège demselben vor längerer Zeit von Herrn Prof. Küpper angegeben worden.

und wegen der Parallelität von $P'Q''$ und $Q'P''$ werden auch die Strecken $P'P''$ und $Q'Q''$ durch $\mathfrak{M}$ halbirt; diese auf $\mathfrak{M}$ liegenden Mitten seien p und q; man ziehe $(P'Q', P''Q'') = x$ und aus x eine Senkrechte auf PQ_∞, welche in R ihren Fusspunkt habe, dann ist nach 4. R der 3te Schnittpunkt von PQ_∞ mit der Curve und wenn



wir diese Senkrechte wie früher mit L bezeichnen, so ist RPQ_∞ und L das Asymptotenpaar des Strahlsystems, welches dem Punkte R in Bezug auf die Curve zugehört; die Gerade L muss daher selbst ein Paar conjugirter Punkte der Curve enthalten, welche, gleichviel ob reell oder imaginär, vertreten werden können durch ein Punktsystem auf L, als dessen Doppelpunkte sie erscheinen. Da nun nach dem Früheren dieses Paar conjugirter Punkte auf L harmonisch getrennt werden muss durch jedes Asymptotenpaar eines Strahlsystems, welches irgend einem Punkte der Curve zugehört, so bestimmen die Asymptoten aller dieser Strahlsysteme auf L Punktenpaare eines Punktsystems, dessen Doppelpunkte die gesuchten conjugirten Punkte sind. Um aber die Asymptoten der Strahlsysteme, welche den Punkten $P'P''$, $Q'Q''$ zugehören, zu erhalten, beschreibe man über $P'P''$ als Durchmesser einen Kreis, welcher p zum Mittelpunkte hat und die Gerade $\mathfrak{M}$ in 2 Punkten trifft, die mit P' und P'' verbunden die gesuchten Asymptoten für die Strahlsysteme (P') und (P'') liefern; ebenso beschreibt man über $Q'Q''$ als Durchmesser einen Kreis, welcher q zum Mittelpunkte hat und dessen Schnittpunkte mit $\mathfrak{M}$ 2 Punkte liefern, durch welche die Asymptoten der Strahlsysteme (Q') und (Q'') laufen. Die Punktenpaare, in welchen die so gefundenen Asymptoten der Strahlsysteme (P'), (P'') etc. die Gerade L treffen, haben eine

leicht erkennbare Beziehung zu den um p und q beschriebenen Kreisen; da nämlich die Gerade L auf einem Durchmesser des Kreises (p) senkrecht steht, also ihr Pol in Bezug auf den Kreis in diesem Durchmesser liegt, so werden die beiden Strahlen, welche von irgend einem Peripheriepunkte dieses Kreises P' nach den Endpunkten des Durchmessers hingehen, die Gerade L in einem Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kreis treffen müssen (Steiner's Vorlesungen II. § 31.); dasselbe gilt für die übrigen Strahlsysteme $P''Q'Q''$; wir schliessen also, dass das besondere Punktsystem, welches auf der Geraden L die beiden conjugirten Punkte der Brennpunktscurve zu Doppelpunkten hat, sowohl für den Kreis (p), als auch für den Kreis (q) das diesen Kreisen zugehörige ist (l. c. § 29. und 30.), d. h. aus sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte in Bezug auf diese Kreise besteht. Hieraus folgt aber, dass die beiden Kreise p und q die Gerade L zur reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Secante haben oder durch die beiden auf L befindlichen conjugirten Punkte der Brennpunktscurve hindurchgehen müssen; für den Fall, dass dieselben reell sind, ist dies sogleich ersichtlich; die vorige Betrachtung abstrahirt aber davon. Jetzt halten wir das Paar conjugirter Punkte P und Q_∞ fest, variiren aber das zweite willkürlich gewählte $P'Q'$, also auch das dritte $P''Q''$; dann folgt aus dem Vorigen, dass die Kreise p und q eine Kreisschaar bilden und die Schnittpunkte jedes Kreises $P'P''$ mit einem nach dem festen Punkte P gehenden Durchmesser die Brennpunktscurve erzeugen; wir erhalten also die Küpper'sche Construction:

Hat man in der Ebene eine Kreisschaar und zieht die durch einen festen Punkt P gehenden Durchmesser, so beschreiben die Schnittpunkte derselben mit den Kreisen unsere Brennpunktscurve.

Da eine Kreisschaar ein specielles Kegelschnittbüschel und das von P nach den Mittelpunkten der Kreise hingehende Strahlbüschel offenbar mit der Kreisschaar projectivisch ist, so ist diese Construction ein besonderer Fall der Chasles'schen Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung.

Wir bemerken noch, dass, wenn der Punkt P insbesondere in der Mittelpunktslinie der Kreisschaar liegt, die Curve 3ter Ordnung in einen Kreis und eine Gerade zerfallen muss.

7. Die nach dem Früheren in unzähliger Menge vorhandenen vollständigen Vierseite, welche der Brennpunktscurve einbeschrieben sind und deren Gegenecken Paare conjugirter Punkte derselben sind, bieten unendlich viele Schaaren von einbeschriebenen Kegelschnitten dar, deren Brennpunktscurve immer dieselbe bleibt. Jede dieser Schaaren besitzt eine einzige Parabel und sämmtliche Parabeln müssen sich zu einer *confocalen Parabelschaar* gruppiren, welche P und Q_∞ zu

Brennpunkten hat. Ueberhaupt ordnen sich die den unendlich vielen Vierseiten einbeschriebenen Kegelschnitte gleichzeitig zu Schaaren confocaler Kegelschnitte, woraus eine neue Erzeugungsart unserer Brennpunktscurve hervorgeht:

Die Brennpunktscurve ist vollständig bestimmt, sobald man von ihr 2 beliebige Paare conjugirter Punkte AB, $A'B'$ kennt oder als gegeben annimmt, denn sie ist der Ort aller solcher Punkte, für welche die nach den Punktenpaaren AB, $A'B'$ hingezogenen Strahlenpaare ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem bilden. Denkt man sich daher irgend 2 Kegelschnitte, deren einer AB, der andere $A'B'$ zu Brennpunkten hat, so wird jeder Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten derselben der Brennpunktscurve angehören. Wir haben daher folgende Erweiterung des Hauptsatzes in 2.:

Nimmt man aus einer Kegelschnittschaar 2 beliebige Kegelschnitte mit den Brennpunkten AB und $A'B'$ heraus und denkt sich 2 andere mit diesen confocale Kegelschnitte, so werden die gemeinschaftlichen Tangenten der letzteren ein vollständiges Vierseit bilden, dessen 3 Paar Gegenecken Brennpunktspaare für 3 Kegelschnitte der ursprünglichen Schaar sind.

Denken wir uns nun den ersten Kegelschnitt mit den Brennpunkten AB fest und verändern den zweiten, indem wir ihn die ganze Schaar confocaler Kegelschnitte mit den unverändert bleibenden Brennpunkten $A'B'$ durchlaufen lassen, so erhalten wir folgende Erzeugungsart unserer Brennpunktscurve:

Hat man eine Schaar confocaler Kegelschnitte und einen beliebigen derselben nicht angehörigen festen Kegelschnitt und bestimmt allemal die 4 gemeinschaftlichen Tangenten dieses Kegelschnittes mit jedem der confocalen Kegelschnitte, so durchlaufen die 3 Paar Gegenecken aller dieser vollständigen Vierseite eine und dieselbe Curve 3ter Ordnung, indem jedes Paar Gegenecken ein Paar conjugirter Punkte der Curve ist; diese Curve hat die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen zu conjugirten Punkten. Oder auch:

Hat man 2 verschiedene Schaaren confocaler Kegelschnitte und bestimmt für je 2 Kegelschnitte derselben die 4 gemeinschaftlichen Tangenten, so durchlaufen die 3 Paare Gegenecken solcher vollständigen Vierseite ein und dieselbe Curve 3ter Ordnung, welche etc.

8. Die Kegelschnittschaaren, welche allen jenen in mannichfachster Weise herzustellenden Vierseiten AB, $A'B'$, $A''B''$ einbeschrieben sind, stehen noch in einem anderen eigenthümlichen Zusammenhang, welcher aufgesucht werden soll. Nehmen wir z. B. ein Vierseit mit den 3 Paar Gegenecken ab, $a'b'$, $a''b''$ und 2 beliebige ihm einbeschriebene Kegelschnitte, deren Brennpunkte AB, $A'B'$ seien und die bekanntlich ein 3tes Brennpunktspaar

$$(AA', BB') = A'', \qquad (AB', BA') = B''$$

$A''B''$ mitbestimmen, so sind AB, $A'B'$, $A''B''$ die 3 Paar Gegenecken eines 2[ten] vollständigen Vierseits; für beide ist die Brennpunktscurve dieselbe. Das 2[te] Vierseit ist durch die beiden auf der Curve willkürlich zu wählenden Punkte AA', deren Verbindungslinie A'' enthält und eine Seite desselben ist, vollständig bestimmt. Denken wir uns den einzigen Kegelschnitt ermittelt, welcher dem ersten vollständigen Vierseit einbeschrieben ist und ausserdem noch die Seite $AA'A''$ berührt, durch welche 5 Tangenten er gerade bestimmt wird; seien seine beiden Brennpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, dann müssen diese zugleich Brennpunkte eines gewissen dem 2[ten] Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes sein; da aber der vorige Kegelschnitt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zu Brennpunkten hat und eine Seite des 2[ten] Vierseits $AA'A''$ berührt, wodurch er gerade bestimmt wird, so muss er selbst die 3 übrigen Seiten des 2[ten] vollständigen Vierseits berühren, d. h.:

Hat man ein vollständiges Vierseit und die beiden Brennpunktspaare AB, $A'B'$ zweier beliebiger demselben einbeschriebenen Kegelschnitte, so berühren die 4 Seiten des Vierseits und die 4 Verbindungslinien AA', AB', BA', BB' alle 8 denselben Kegelschnitt.

Hieraus ergiebt sich zwischen den in der angegebenen Weise auftretenden Kegelschnittschaaren der eigenthümliche Zusammenhang, *dass irgend 2 Schaaren einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt haben* und hieraus folgt, dass sie ein Gebilde constituiren, welches das polar gegenüberstehende ist von einem Kegelschnittnetz (Steiner's Vorlesungen II, § 62); ein solches Gebilde wollen wir ein *Kegelschnittgewebe* nennen. In der That, nehmen wir 2 beliebige Kegelschnitte K und K' heraus, welche einer jener Schaaren angehören und dieselbe bestimmen; lassen wir einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die Schaar durchlaufen, so bestimmen die Brennpunkte desselben die betrachtete Brennpunktscurve $C^{(3)}$; fügen wir einen Kegelschnitt K'' hinzu, welcher nicht der Schaar angehört, sondern einem 2[ten] Vierseit AB, $A'B'$, $A''B''$ einbeschrieben ist, welches durch irgend 2 Brennpunktspaare der ersten Schaar AB, $A'B'$ bestimmt wird, dann erhalten wir durch die beiden Kegelschnitte $K''\mathfrak{K}$ als Bestimmungsstücke eine veränderliche Kegelschnittschaar, welche immer dieselbe Brennpunktscurve liefert und alle Kegelschnitte, die hieraus hervorgehen, erschöpfen in gewisser Anordnung die sämmtlichen Kegelschnitte des Gewebes. Die gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Kegelschnitte des Gewebes bestimmen ein veränderliches vollständiges Vierseit, dessen 3 Paar Gegenecken auf der $C^{(3)}$ liegen und dessen 3 Diagonalen nach der Theorie der Tripelcurve (l. c.) eine Curve 3[ter] Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$, das polare Nebengebilde der Tripelcurve umhüllen, denn die 3 Diagonalen eines solchen Vierseits sind zugleich die gemeinschaftlichen Tripelstrahlen

je zweier Kegelschnitte des Gewebes; diese Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist die Cayley'sche Curve der als Hesse'sche Curve aufgefassten Brennpunktscurve $C^{(3)}$ und wird von den sämmtlichen Asymptoten der den Punkten der letzteren zugehörigen Strahlsysteme umhüllt; wir haben also den Satz:

Die grossen Axen, welche die Brennpunktspaare sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar enthalten, umhüllen eine Curve 3ter Classe.

Dies gilt ebenso auch für die 2ten Axen der Kegelschnitte mit den imaginären Brennpunkten; dann, wie wir gesehen haben, ordnen sich die Kegelschnitte des Gewebes auch zu Schaaren confocaler Kegelschnitte; für eine Schaar confocaler Kegelschnitte bilden aber die beiden gemeinschaftlichen Axen und die unendlich entfernte Gerade das gemeinschaftliche Tripel von Strahlen, und da die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ alle diese Tripel umhüllen muss, so können wir allgemein sagen:

Die Axenpaare einer Kegelschnittschaar umhüllen eine Curve 3ter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$, die Brennpunktspaare liegen auf einer Curve 3ter Ordnung $C^{(3)}$; diese beiden Curven stehen in der Beziehung der Cayley'schen und Hesse'schen zu einander. Die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ hat $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente, was einen particulären Charakter von ihr anzeigt.

Die weitere Untersuchung, welche keinen wesentlichen Unterschied darbietet in dem Fall der allgemeinen Curve 3ter Ordnung, welche nach Analogie der Brennpunktscurve durch 2 beliebige projectivische Strahlsysteme in halb perspectivischer Lage erzeugt wird, wollen wir in dem 2ten Theile führen.

B. Die allgemeine Curve dritter Ordnung als Erzeugniss zweier projectivischer Strahlsysteme in halb-perspectivischer Lage.

9. Nehmen wir 2 beliebige Strahlsysteme (Strahleninvolutionen) mit den Mittelpunkten O und P und setzen die Strahlenpaare in eine derartige gegenseitig eindeutige Abhängigkeit von einander (Projectivität), dass der Verbindungsstrahl der Mittelpunkte ein Theil entsprechender Strahlenpaare ist (halb-perspectivische Lage), so werden die je 4 Schnittpunkte aller entsprechenden Strahlenpaare auf einer Curve 3ter Ordnung liegen, welche das Erzeugniss der beiden Strahlsysteme genannt wird; denn die beiden Strahlsysteme sind specielle Kegelschnittbüschel, welche in projectivische Beziehung gesetzt, im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung erzeugen; in unserem Falle trennt sich aber, weil in die Verbindungslinie der Mittelpunkte Theile entsprechender Strahlenpaare zusammenfallen, diese Gerade OP ab und es bleibt als übriger Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare nur eine Curve 3ter Ordnung.

Das gegenseitig eindeutige oder projectivische Entsprechen der beiden Strahlsysteme (O) und (P) kann dadurch vermittelt werden,

dass wir zu einem Strahlenpaare $x\xi$ des Strahlsystems (O) und zu OP den 4ten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Strahl $\mathfrak{x}$ und ebenso zu einem Strahlenpaar $y\eta$ des 2ten Strahlsystems (P) und zu PO den zugeordneten 4ten harmonischen Strahl $\mathfrak{y}$ nehmen, wodurch wir die beiden Strahlsysteme (O) und (P) auf einfache Strahlbüschel $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ reduciren; setzen wir nun die Strahlbüschel $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ in projectivische Beziehung, so haben wir dadurch auch die beiden Strahlsysteme in projectivische Beziehung gebracht, indem jetzt jedem Strahlenpaare $(x\xi)$ ein einziges bestimmtes Strahlenpaar $(y\eta)$ und umgekehrt entspricht; in unserem Falle aber sollen sich die Strahlsysteme noch in halb perspectivischer Lage befinden, woraus hervorgeht, dass sich die beiden reducirenden Strahlbüschel $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ in perspectivischer Lage befinden müssen, also eine bestimmte Gerade L zu ihrem perspectivischen Durchschnitt haben. Demnach gestaltet sich die Construction entsprechender Strahlenpaare folgendermassen:

Wir lassen einen veränderlichen Punkt p auf einer Geraden L laufen, betrachten die beiden Strahlen OP und Op als die Asymptoten (Doppelstrahlen) eines hyperbolischen Strahlsystems; dieses Strahlsystem hat mit dem gegebenen Strahlsystem (O) ein gemeinschaftliches Strahlenpaar $x\xi$ (über die Ermittelung desselben siehe Steiner's Vorlesungen II. Seite 61 und 163); ebenso ziehen wir Pp und betrachten PO und Pp als die Asymptoten eines hyperbolischen Strahlsystems, welches mit dem gegebenen Strahlsystem (P) ein gemeinschaftliches Strahlenpaar $y\eta$ besitzt; die beiden so ermittelten Strahlenpaare $x\xi$ und $y\eta$ sind allemal entsprechende und ändern sich mit der Veränderung von p auf L; der gesammte Ort der 4 Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare ist nun die zu untersuchende Curve; diese 4 Schnittpunkte zerfallen aber in 2 zusammengehörige Paare; wenn nämlich $x\xi$ und $y\eta$ entsprechende Strahlenpaare der beiden Strahlsysteme sind, so haben wir 2 Paare von Schnittpunkten:

$$(x,\, y) \quad \text{und} \quad (\xi,\, \eta)$$
$$(x,\, \eta) \quad \text{und} \quad (\xi,\, y);$$

jedes dieser Paare soll *ein Paar conjugirter Punkte der Curve* genannt werden; auf diese Weise erhalten wir unendlich viele Paare conjugirter Punkte auf der Curve und es ist ersichtlich, dass die Mittelpunkte OP der Strahlsysteme auch als ein Paar conjugirter Punkte auftreten; zu jedem beliebigen Punkte des Ortes A giebt es einen einzigen bestimmten conjugirten Punkt B, der so gefunden wird, dass man OA und PA zieht und die anderen beiden Strahlen, welche mit diesen zusammen Strahlenpaare der gegebenen Strahlsysteme (O) und (P) bilden, ermittelt; ihr Schnittpunkt ist dann B. Eine charakteristische Eigenschaft zweier in solcher Art conjugirter Punkte der Curve 3ter

Ordnung werden wir sogleich kennen lernen. Vorher erwähnen wir noch eine einfache Construction der durch 2 projectivische, in halbperspectivischer Lage befindliche Strahlsysteme erzeugten Curve 3ter Ordnung, indem wir eine andere Reduction der Strahlsysteme auf Strahlbüschel vornehmen; legt man durch den Mittelpunkt eines Strahlsystems einen beliebigen Kegelschnitt, so durchbohren die Strahlenpaare des Strahlsystems bekanntlich den Kegelschnitt in Punktenpaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt laufen, also ein einfaches Strahlbüschel bilden, welches zur projectivischen Beziehung des Strahlsystems verwendet werden kann (Steiner's Vorlesungen II. S. 155). Hiernach gestaltat sich die Construction der Curve 3ter Ordnung folgendermassen:

Man nehme 4 beliebige Punkte $OPop$ in der Ebene an, ziehe durch den Schnittpunkt (Oo, Pp) eine beliebige Gerade 𝔊 und lege durch O und P irgend einen Kegelschnitt K (oder Kreis), dann ist die Maschine fertig, mit deren Hülfe man allein mittels des Lineals in continuirlicher Weise Punkte einer Curve 3ter Ordnung durch Zeichnung finden kann. Man lasse einen veränderlichen Punkt x die Gerade 𝔊 durchlaufen, ziehe ox und px, welche Strahlen den Kegelschnitt K in Punktenpaaren $a\alpha$ und $b\beta$ treffen, die Strahlenpaare Oa, $O\alpha$ und Pb, $P\beta$ schneiden sich in 4 Punkten einer Curve 3ter Ordnung, welche bei der Veränderung von x durch die Gesammtheit dieser Schnittpunkte erzeugt wird.

Diese im Eingange erwähnte Construction, deren Richtigkeit evident ist, empfiehlt sich durch ihre Einfachheit für die praktische Zeichnung einer Curve 3ter Ordnung, von welcher man schnell genug so viele Punkte findet, dass man sich ein deutliches Bild ihres Verlaufes zu machen im Stande ist.

10. Haben wir irgend 2 entsprechende Strahlenpaare $x\xi$ und $y\eta$ der beiden erzeugenden Stahlsysteme (O) und (P), deren Schnittpunkte 2 Paare conjugirter Punkte der Curve:

$$(xy) \quad \text{und} \quad (\xi\eta)$$
$$(x\eta) \quad \text{und} \quad (\xi y)$$

bestimmen, so erhellt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits, dass der Diagonalpunkt

$$[(xy,\ \xi\eta),\quad (x\eta,\ \xi y)] = p$$

auf der oben (9.) mit L bezeichneten Geraden liegen muss, also:

Der Schnittpunkt der Verbindungslinien zweier solcher Paare conjugirter Punkte der Curve, welche von 2 entsprechenden Strahlenpaaren der erzeugenden Strahlsysteme (O) und (P) bestimmt werden, durchläuft eine feste Gerade L.

Die Gerade L trifft insbesondere die Verbindungslinie OP in

einem Punkte R, welcher der Curve 3ter Ordnung angehören muss, also ihr 3ter Schnittpunkt mit OP ist; denn nach der oben ausgeführten Construction bestimmt jeder Punkt p der Geraden L 2 entsprechende Strahlenpaare $x\xi$ und $y\eta$ der erzeugenden Strahlsysteme (O) und (P); gelangt nun p insbesondere in die Lage des Schnittpunkts R von L mit OP, so degenerirt das im Allgemeinen aus den 4 Strahlen $x\xi$, $y\eta$ gebildete vollständige Vierseit in ein Dreiseit, indem OR und PR zusammenfallen, die beiden übrigen Theile dieser Strahlenpaare mögen sich in S schneiden, d. h. OR und OS, PR und PS sind 2 entsprechende Strahlenpaare der erzeugenden Strahlsysteme, die ja einen Strahl in OPR gemeinschaftlich haben; von diesen beiden entsprechenden Strahlenpaaren OP, OS und PO, PS sind die 4 Schnittpunkte 2 Paare conjugirter Punkte der Curve; das eine Schnittpunktspaar ist aber O und P selbst, das andere Schnittpunktspaar ist S und der unbestimmt werdende Punkt auf den beiden zusammengefallenen Geraden OP; da aber nach dem vorigen Satze der Schnittpunkt der Verbindungslinien dieser beiden Paare auf der Geraden L liegen muss, also der Punkt R ist, in welchem OP die Gerade L trifft, so muss auch die Verbindungslinie von S mit seinem conjugirten Punkte durch R gehen; der conjugirte Punkt von S muss aber auf OP liegen, folglich ist es der Punkt R selbst. Wir haben also nachgewiesen, dass der Schnittpunkt $(OP, L) = R$ ein Punkt der Curve ist und seinen conjugirten in S hat. Hieraus folgt zugleich, dass SO und SP die Tangenten der Curve in O und P sein müssen, weil das aus 2 entsprechenden Strahlenpaaren gebildete vollständige Vierseit, dessen 3 Paar Gegenecken 3 Paare conjugirter Punkte der Curve sein müssen, in diesem Falle in ein Dreiseit degenerirt ist, also in O und P 2 von jenen 3 Paaren zusammengefallen sind. Die beiden Mittelpunkte der erzeugenden Strahlsysteme, welche selbst ein Paar conjugirter Punkte der Curve 3ter Ordnung sind, besitzen hiernach die Eigenschaft, dass ihre beiden Tangenten an der Curve sich in einem 3ten Punkte der Curve schneiden, oder, wie man sich kürzer ausdrückt: *Die beiden conjugirten Punkte O und P der Curve haben denselben Tangentialpunkt*, eine Eigenschaft, welche, wie wir sogleich sehen werden, für sämmtliche Paare conjugirter Punkte der Curve gilt.

11. Sind AB irgend ein Paar conjugirter Punkte der Curve, d. h. OA, OB und PA, PB entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Strahlsysteme (O) und (P), welche sich noch in einem 2ten Paare conjugirter Punkte:

$$(OA,\ PB) = \mathfrak{A}, \quad (OB,\ PA) = \mathfrak{B}$$

treffen müssen, dann liegt der Schnittpunkt

$$(AB, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = p$$

auf der Geraden L; wir können aber diesen Schnittpunkt p noch kürzer definiren als den 4[ten] harmonischen Punkt auf der Verbindungslinie AB, welcher zu A, B und (AB, OP) dem letzteren harmonisch zugeordnet ist.

Nehmen wir jetzt ein beliebiges zweites Paar conjugirter Punkte des Ortes $A'B'$, für welche dasselbe gilt, nämlich der 4[te] harmonische Punkt p' zu

$$A', \quad B', \quad (A'B', OP),$$

auf der Geraden L sich findet und ziehen wir die Verbindungslinien:

$$(AA', BB') = A'', \qquad (AB', A'B) = B'',$$

so dass wir ein vollständiges Vierseit mit den 3 Paar Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ erhalten; dann werden die sowohl von O als auch von P nach diesen 3 Punktepaaren hin gezogenen Strahlenpaare den gegebenen Strahlsystemen (O) und (P) angehören; denn sie bilden Strahlsysteme, welche dem vollständigen Vierseit zugehören (1.), und da 2 Strahlenpaare schon den erzeugenden Strahlsystemen (O) und (P) angehören, so muss dies auch mit dem 3[ten] Paar der Fall sein; folglich gehören OA'', OB'' dem Strahlsystem (O), PA'', PB'' dem Strahlsystem (P) an; aber noch mehr: es sind dies auch entsprechende Strahlenpaare der beiden projectivischen Strahlsysteme; denn bezeichnen wir die 4[ten] harmonischen Punkte wie vorher durch p, p', p'', so dass also

$$\begin{array}{llll} A, & B, & (AB, OP), & p \\ A', & B', & (A'B', OP), & p' \\ A'', & B'', & (A''B'', OP), & p'' \end{array}$$

je 4 harmonische Punkte sind, so müssen p, p', p'' auf einer Geraden liegen nach folgendem bekannten Satze:

Schneidet man ein vollständiges Vierseit mit den 3 Paaren von Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ durch eine beliebige Transversale (OP) und construirt auf jeder der 3 Diagonalen den zum Schnittpunkte zugeordneten 4[ten] harmonischen Punkt p, p', p'', während je ein Eckenpaar das andere Paar zugeordneter Punkte ist, so liegen p, p', p'' auf einer Geraden. (Es ist dies ein specieller Fall des allgemeinen Satzes, dass die Pole einer Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schaar auf einer 2[ten] Geraden liegen, welche die conjugirte zu jener in Bezug auf die Schaar heisst; siehe Steiner's Vorlesungen II. Seite 333.)

Da nun die Gerade pp' der perspectivische Durchschnitt L der beiden einfachen projectivischen Strahlbüschel ist, auf welche die erzeugenden Strahlsysteme (O) und (P) reducirt wurden, und da auch p'' auf L liegt, so folgt durch die Umkehrung der eben benutzten

Schlussfolge, dass auch OA'', OB'' und PA'', PB'' entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Strahlsysteme, also $A''B''$ selbst ein 3tes Paar conjugirter Punkte der Ortscurve sein müssen. Wir haben also folgenden fundamentalen Satz erhalten:

Sind AB und $A'B'$ irgend 2 Paare conjugirter Punkte der Ortscurve 3ter Ordnung, so erhält man allemal ein drittes von ihnen abhängiges Paar conjugirter Punkte $A''B''$ durch die Schnittpunkte:

$$(AA',\ BB') = A'', \qquad (AB',\ BA') = B''.$$

12. Die 3 Punktepaare AB, $A'B'$, $A''B''$ sind die 3 Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits, welches der Ortscurve einbeschrieben ist und aus 3 Paaren conjugirter Punkte derselben besteht. Solche vollständige Vierseite lassen sich in unzähliger Menge herstellen durch successives Verbinden von immer 2 Paaren conjugirter Punkte, die wieder durch neue ersetzt werden. Andererseits erhalten wir aus demselben Satze eine einfache Construction des 3ten Schnittpunktes der Curve mit einer Geraden, welche irgend 2 Punkte AA' derselben verbindet: Man bestimme nämlich zu A und A' die conjugirten Punkte B und B', dann ist der Schnittpunkt $(AA',\ BB') = A''$ der gesuchte 3te Schnittpunkt. Diese Construction wird nur in einem Falle illusorisch, wenn nämlich die beiden Curvenpunkte, auf deren Verbindungslinie der 3te Schnittpunkt gesucht wird, selbst ein Paar conjugirter Punkte AB sind; in diesem Falle werden wir uns so helfen: Sei C der gesuchte 3te Schnittpunkt der Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte AB mit der Curve und D der conjugirte Punkt zu C; dann haben wir 2 Paare conjugirter Punkte AB und CD, folglich nach dem vorigen Satze ein 3tes Paar, in welchem die 4 Verbindungslinien AC, BC, AD, BD die Curve schneiden müssen; dieses 3te Paar ist aber offenbar nichts anderes, als A und B selbst, folglich müssen AD und BD Tangenten an der Curve in A und B sein, weil ihre 3ten Schnittpunkte mit A und B zusammenfallen. Hieraus folgt einerseits die Construction des gesuchten 3ten Schnittpunktes C: Man ziehe in den beiden conjugirten Punkten A und B die Tangenten der Curve, welche sich in einem 3ten Punkte derselben D treffen müssen und bestimme zu D den conjugirten Punkt C, welches der gesuchte ist; andererseits folgt eine wichtige Eigenschaft irgend zweier conjugirter Punkte des Ortes:

Die Tangenten in jedem Paare von conjugirten Punkten der Curve schneiden sich in einem Punkte, welcher selbst auf ihr liegt; oder 2 conjugirte Punkte der Curve haben allemal denselben Tangentialpunkt. Diese Eigenschaft, welche vorhin nur für die beiden Mittelpunkte der erzeugenden Strahlsysteme erkannt war, gilt also jetzt allgemein für jedes Paar conjugirter Punkte.

13. Aus dem allgemeinen Satze in 11. folgt ferner, dass, wenn wir irgend einen Punkt Ω der Curve mit einem Paare conjugirter Punkte AB verbinden, diese Strahlen der Curve zum 3ten Male in einem neuen Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ begegnen müssen, nämlich ΩA in $\mathfrak{A}$ und ΩB in $\mathfrak{B}$, und dass zugleich der Schnittpunkt

$$(A\mathfrak{B},\, B\mathfrak{A}) = \Pi$$

auf der Curve liegt und der conjugirte Punkt zu Ω ist. Fügen wir ein beliebiges 2tes Paar conjugirter Punkte $A'B'$ hinzu und machen dieselbe Construction, so schneiden $\Omega A'$ in $\mathfrak{A}'$, $\Omega B'$ in $\mathfrak{B}'$ und der Schnittpunkt

$$(A'\mathfrak{B}',\, B'\mathfrak{A}') = \Pi$$

muss der frühere Punkt Π sein, weil es zu Ω nur einen conjugirten Punkt Π auf der Curve giebt. Wir haben jetzt durch Ω 2 Strahlenpaare, auf welchen 4 Paare conjugirter Punkte liegen:

$$AB;\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B};\quad A'B';\quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'.$$

Diese Paare lassen sich in gewisser Weise zu zweien verbinden und dadurch nach dem allgemeinen Satze neue Paare conjugirter Punkte gewinnen, nämlich:

AB und $A'B'$
$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$
AB und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$
$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $A'B'$;

wir erhalten mithin vermittelst des vorigen Satzes zunächst 4 neue Paare conjugirter Punkte, welche mit Ω verbunden 4 neue Strahlenpaare liefern; diese gehören offenbar ein und demselben Strahlsystem an, welches schon bestimmt ist durch die beiden ersten Strahlenpaare; andererseits haben wir auch durch Π in ganz gleicher Weise 2 Strahlenpaare, welche ein Strahlsystem bestimmen, und diesem müssen ebenfalls die 4 Strahlenpaare angehören, welche nach den 4 neuen Paaren conjugirter Punkte hingehen. Diese Construction kann man nun fortsetzen, indem man die neu gewonnenen Paare conjugirter Punkte zweckmässig zu je zweien mit einander verbindet oder mit den früheren und daraus nach dem obigen Satze wieder neue Paare ableitet, bis ins Unendliche fort. Dadurch erhält man in (Ω) und (Π) als Mittelpunkten 2 Strahlsysteme, welche zunächst nur gewisse discret gelegene Strahlenpaare aufweisen, aber in unbegrenzter Anzahl. Fasst man die Strahlenpaare dieser beiden Strahlsysteme als entsprechend auf in der Weise, dass je 2 von Ω und Π nach demselben Paare conjugirter Punkte hingehende Strahlenpaare sich entsprechen sollen, so ist leicht zu erkennen, dass diese beiden Strahlsysteme (Ω) und (Π) in projectivischer Beziehung stehen; sie lassen sich nämlich in der früher angegebenen Weise auf 2 Strahlbüschel reduciren, welche perspectivisch

liegen; bestimmt man zu AB und dem Schnittpunkte von AB mit $\Omega\Pi$ den 4ten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt π, ebenso zu $A'B'$ und dem Schnittpunkt $(A'B', \Omega\Pi)$ den zugeordneten 4ten harmonischen Punkt π', so bestimmen $\pi\pi'$ eine Gerade Λ, welche der perspectivische Durchschnitt jener beiden projectivischen Strahlbüschel ist; es sind nämlich $\Omega\pi$ und $\Pi\pi$ die respectiven 4ten harmonischen Strahlen mit je 2 entsprechenden Strahlenpaaren der Strahlsysteme (Ω) und (Π) und der Verbindungslinie $\Omega\Pi$; wenn wir nun für jedes aus zweien neu abgeleitete 3te Strahlenpaar dieselbe Construction ausführen, so muss der Schnittpunkt zweier solcher 4ter harmonischer Strahlen π'' immer auf derselben Geraden bleiben, welche schon durch π und π' bestimmt wird, wie dies aus dem in 11. angeführten Satze über das vollständige Vierseit folgt. Da hiernach die reducirenden Strahlbüschel perspectivisch liegen, so müssen die Strahlsysteme (Ω) und (Π) projectivisch sein und sich in halb perspectivischer Lage befinden; sie erzeugen mithin nach 9. eine Curve 3ter Ordnung, welche mit unserer ursprünglichen Curve unzählig viele Punktenpaare gemein hat, folglich identisch mit ihr zusammenfällt.

Hiernach haben wir folgendes bemerkenswerthe Resultat gewonnen:

Die durch 2 projectivische, in halb-perspectivischer Lage befindliche Strahlsysteme erzeugte Curve 3ter Ordnung besitzt die Eigenschaft, dass irgend 2 conjugirte Punkte derselben als Mittelpunkte zweier anderer erzeugender Strahlsysteme angenommen werden können, deren entsprechende Strahlenpaare allemal nach 2 conjugirten Punkten der Curve hingehen; solche 2 Strahlsysteme befinden sich immer in projectivischer Beziehung und halb-perspectivischer Lage, so dass in die Verbindungslinie der Mittelpunkte allemal Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen, deren zugehörige andere Theile (Strahlen) sich in dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkte der Mittelpunkte auf der Curve selbst schneiden und die Curve in den Mittelpunkten berühren.

Hieraus springt die Analogie in die Augen, welche diese Erzeugung der Curve 3ter Ordnung mit der Erzeugung des Kegelschnittes durch 2 projectivische Strahlbüschel darbietet, aber auch der Unterschied, welcher darin besteht, dass die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlsysteme nicht ganz willkürlich auf der Curve angenommen werden dürfen.

Wir bemerken noch den aus der vorigen Untersuchung fliessenden Satz:

Zu jedem Punkte der Curve 3ter Ordnung Ω gehört ein bestimmtes Strahlsystem, welches gebildet wird von den Strahlenpaaren, die aus Ω nach sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte der Curve hinlaufen; jedes Strahlenpaar des dem Punkte Ω zugehörigen Strahlsystems trifft

die Curve ausser in dem einen Paare conjugirter Punkte AB noch in einem 2ten Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und der Schnittpunkt ihrer Verbindungslinien

$$(AB, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \pi$$

bewegt sich auf einer geraden Linie Λ, *während der Schnittpunkt*

$$(A\mathfrak{B}, \mathfrak{A}B) = \Pi$$

allemal derselbe feste Punkt der Curve bleibt, welcher der conjugirte Punkt zu Ω *ist.* Wir können noch hinzufügen, indem wir jetzt das Ergebniss, welches in 10. nur für die beiden anfänglich als erzeugende gewählten Strahlsysteme galt, allgemein aussprechen:

Die Gerade Λ *trifft die Verbindungslinie* $\Omega\Pi$ *in dem* 3ten *Schnittpunkte mit der Curve*, dessen conjugirter der gemeinschaftliche Tangentialpunkt der Mittelpunkte der erzeugenden Strahlsysteme ist.

14. Sind AB, $A'B'$, $A''B''$ die 3 Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits, welches der Curve einbeschrieben und aus 3 Paaren conjugirter Punkte besteht, so wird nach 11. das irgend einem Punkte O der Curve zugehörige Strahlsystem nicht nur die 3 Strahlenpaare OA, OB; OA', OB'; OA'', OB'' enthalten, sondern auch jedes Tangentenpaar aus O an irgend einen Kegelschnitt, welcher jenem vollständigen Vierseit einbeschrieben werden kann, muss ein Strahlenpaar des dem Punkte O zugehörigen Strahlsystems sein und umgekehrt: Jedes Strahlenpaar des dem Punkte O zugehörigen Strahlsystems muss ein Tangentenpaar eines gewissen Kegelschnittes der Schaar sein, welche dem Vierseit AB, $A'B'$, $A''B''$ einbeschrieben ist. Fassen wir nun ein 2tes Vierseit derselben Art auf A_1B_1, $A_1'B_1'$, $A_1''B_1''$, welches durch 2 willkürlich auf der Curve gewählte Punkte A_1A_1' schon vollständig bestimmt wird, so gilt auch für dieses dieselbe Eigenschaft.

Ein Kegelschnitt, welcher die Seiten des ersten Vierseits berührt und zugleich eine Seite des 2ten $A_1A_1'A_1''$ zur Tangente hat, so dass er durch diese 5 Tangenten gerade bestimmt wird, muss auch die übrigen 3 Seiten des 2ten Vierseits berühren; denn das Tangentenpaar an ihn aus irgend einem Punkte O der Curve ist ein Strahlenpaar des dem Punkte O zugehörigen Strahlsystems, folglich auch ein Tangentenpaar eines gewissen, dem 2ten Vierseit einbeschriebenen Kegelschnittes und dasselbe gilt für irgend einen 2ten Punkt O' der Curve; durch die beiden Tangentenpaare aus O und O' und eine Seite $A_1A_1'A_1''$ des Vierseits ist aber dieser Kegelschnitt der dem 2ten Vierseit einbeschriebenen Schaar vollständig bestimmt und fällt mit dem vorigen zusammen; wir erhalten daher folgenden Satz:

Hat man irgend 2 vollständige Vierseite der Curve 3ter *Ordnung einbeschrieben, deren Paare von Gegenecken conjugirte Punkte der Curve sind, so berühren die 8 Seiten derselben einen und denselben Kegelschnitt.*

Hieraus ergiebt sich zwischen den unendlich vielen Kegelschnittschaaren, welche jenen Vierseiten AB, $A'B'$, $A''B''$; A_1B_1 ... einbeschrieben werden können, ein eigenthümlicher Zusammenhang der Art, dass *je 2 dieser Schaaren allemal einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt haben* und hieraus geht hervor, dass die Kegelschnitte sämmtlicher Schaaren ein Gebilde constituiren, welches polar gegenübersteht dem Kegelschnittnetze (Steiner's Vorlesungen II. § 62.) und ein *Kegelschnittgewebe* genannt werden soll; in der That, nehmen wir 2 beliebige Kegelschnitte des Gewebes heraus, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche eine Schaar $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}']$ bestimmen und ausserdem irgend einen der Schaar nicht angehörigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ des Gewebes; sei ferner $\mathfrak{K}_x$ ein ganz willkürlicher Kegelschnitt des Gewebes, dann werden auch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_x$ eine Schaar bestimmen, welche dem Gewebe angehört und die beiden Schaaren $[\mathfrak{K}\mathfrak{K}']$ und $[\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_x]$ müssen nach dem vorigen Satze einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt K haben; folglich wird auch umgekehrt, wenn wir $\mathfrak{K}_1$ festhalten und den veränderlichen Kegelschnitt K die ganze Schaar $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}']$ durchlaufen lassen, in der durch K und $\mathfrak{K}_1$ bestimmten veränderlichen Kegelschnittschaar jeder Kegelschnitt $\mathfrak{K}_x$ des Gewebes enthalten sein. Diese Erzeugung des Kegelschnittgewebes ist aber genau die polar gegenüberstehende der Erzeugung des Kegelschnittnetzes (l. c. Seite 546). Ferner folgt nun aus der Theorie der Tripelcurve, dass die von sämmtlichen gemeinschaftlichen Tripelstrahlen je zweier Kegelschnitte des Gewebes umhüllte Curve (das polare Nebengebilde der Tripelcurve eines Netzes) eine Curve 3ter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, welche wir *Tripelstrahlencurve* nennen wollen.

Die gemeinschaftlichen Tripelstrahlen aller jener Kegelschnittschaaren des Gewebes sind aber identisch mit den Diagonalen aller jener vollständigen Vierseite AB, $A'B'$, $A''B''$, d. h. die Verbindungslinien von Paaren conjugirter Punkte der ursprünglichen Curve $C^{(3)}$; wir haben also das Ergebniss:

Die Verbindungslinien aller Paare conjugirter Punkte unserer Curve $C^{(3)}$ umhüllen eine Curve 3ter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche als Tripelstrahlencurve eines Kegelschnittgewebes auftritt, das von den Kegelschnitten gebildet wird, die allen obigen Vierseiten AB, $A'B'$, $A''B''$ einbeschrieben werden können.

15. Nimmt man eine dem Gewebe angehörige Kegelschnittschaar heraus und legt aus einem beliebigen Punkte O der Curve die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Schaar, so bilden dieselben das dem Punkte O zugehörige Strahlsystem; nehmen wir den conjugirten Punkt P zu O und legen ebenfalls aus P die Tangentenpaare an dieselbe Kegelschnittschaar des Gewebes, so erhalten wir das dem Punkte P zugehörige Strahlsystem in Bezug auf die Curve; es ist

nun leicht zu erkennen, dass diese beiden Strahlsysteme in projectivischer Beziehung und halb-perspectivischer Lage sich befinden, sobald man je 2 Tangentenpaare aus O und P an denselben Kegelschnitt der Schaar sich entsprechen lässt. Dies geht nämlich unmittelbar daraus hervor, dass die Pole p einer Geraden (OP) in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar sich auf einer neuen (conjugirten) Geraden (L) befinden; sei x der Pol von OP in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar, so wird das Tangentenpaar aus O an den Kegelschnitt harmonisch getrennt durch die Strahlen OP und Ox, ebenso das Tangentenpaar aus P an denselben Kegelschnitt harmonisch getrennt durch PO und Px; da nun x die Gerade L durchläuft, so beschreiben Ox und Px 2 projectivische Strahlbüschel in perspectivischer Lage, folglich die Tangentenpaare aus O und P an die Kegelschnitte der Schaar 2 projectivische Strahlsysteme in halbperspectivischer Lage, die erzeugenden beiden Strahlsysteme (O) und (P) für die Curve 3ter Ordnung. Wir können hiernach folgende neue Erzeugungsart der Curve 3ter Ordnung aussprechen:

Legt man aus 2 beliebigen Punkten O und P der Ebene die Tangentenpaare an sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar, so erzeugen die 4 Schnittpunkte je zweier an denselben Kegelschnitt gelegten Tangentenpaare eine Curve 3ter Ordnung, für welche sowohl die beiden Mittelpunkte O, P, als auch jedes Schnittpunktspaar entsprechender Tangentenpaare conjugirte Punkte sind. Oder auch so:

Hat man irgend zweien Vierseiten AB, $A'B'$, $A''B''$ und A_1B_1, $A_1'B_1'$, $A_1''B_1''$, deren Gegenecken Paare conjugirter Punkte einer Curve 3ter Ordnung sind, 2 beliebige Kegelschnitte einbeschrieben, so bilden die 4 gemeinschaftlichen Tangenten derselben ein neues Vierseit, dessen 3 Paar Gegenecken ebenfalls conjugirte Punkte der Curve sind.

Dies lässt sich noch allgemeiner so ausdrücken, dass man sagt: Die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kegelschnitte eines Gewebes bilden vollständige Vierseite, deren Paare von Gegenecken immer conjugirte Punkte ein und derselben Curve 3ter Ordnung sind. Nach dem Obigen lässt sich auch der Satz aussprechen:

Der Ort eines Punktes, für welchen die 3 Tangentenpaare an 3 beliebig gegebene Kegelschnitte, die nicht derselben Schaar angehören, in Involution stehen (oder demselben Strahlsysteme angehören), ist eine Curve 3ter Ordnung $C^{(3)}$, deren zugehörige Cayley'sche $\mathfrak{K}^{(3)}$ die Tripelstrahlencurve desjenigen Kegelschnittgewebes ist, welches die 3 gegebenen Kegelschnitte bestimmen.

16. Verbindet man irgend ein Paar conjugirter Punkte OP der Curve $C^{(3)}$ zu einer Tangente der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, so ist nach dem Vorigen die Gerade L, welche als perspectivischer Durchschnitt derjenigen beiden Strahlbüschel auftritt, auf welche die erzeugenden Strahlsysteme

(O) und (P) reducirt werden, gleichzeitig die conjugirte Gerade zu OP in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Gewebes; wir wollen 2 solche Gerade wie OP und L 2 *conjugirte Strahlen des Gewebes* oder 2 *conjugirte Tangenten der Curve* $\mathfrak{K}^{(3)}$ nennen, denn es ist klar, dass auch die Gerade L eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(3)}$ sein oder 2 conjugirte Punkte von $C^{(3)}$ verbinden muss; ist nämlich R der Schnittpunkt von OP mit L, so liegt dieser (13.) auf der Curve $C^{(3)}$ und das ihm zugehörige Strahlsystem hat den Strahl ROP zu einer Asymptote (Doppelstrahl); die andere Asymptote muss mithin der 4[te] harmonische Strahl zu diesem sein mit irgend einem anderen Strahlenpaar zusammen und da die Diagonalen eines beliebigen Vierseits, dessen eines Paar Gegenecken OP ist und dessen Seiten von 2 entsprechenden Strahlenpaaren der erzeugenden Strahlsysteme (O) und (P) gebildet werden (nach 13.) sich auf L schneiden, so folgt aus den harmonischen Eigenschaften des Vierseits, dass L die andere Asymptote des dem Punkte R zugehörigen Strahlsystems ist. Wir können dies Ergebniss so ausdrücken:

Zu jedem Punkte der Curve 3[ter] Ordnung $C^{(3)}$ gehört ein bestimmtes Strahlsystem, dessen Strahlenpaare nach sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte der Curve hingehen; die Gesammtheit der Asymptoten (Doppelstrahlen) dieser Strahlsysteme umhüllt eine Curve 3[ter] Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$ und die beiden Asymptoten eines solchen Strahlsystems sind allemal conjugirte Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, d. h. conjugirte Strahlen in Bezug auf alle Kegelschnitte des Gewebes, als dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ auftritt.

Die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ kann daher auch als der Ort einer solchen Geraden aufgefasst werden, deren Pole in Bezug auf irgend 3 nicht derselben Schaar angehörige Kegelschnitte (durch welche das Gewebe vollständig bestimmt wird) wieder auf einer Geraden liegen und solche 2 Gerade sind conjugirte Strahlen in Bezug auf alle Kegelschnitte des Gewebes.

17. Denken wir uns irgend eine Tangente der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, d. h. die Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte OP der Curve $C^{(3)}$ und verbinden wir irgend einen Punkt X der Curve $C^{(3)}$ mit O und P, so werden XO und XP 2 conjugirte Strahlen des Strahlsystems sein, welches dem Punkte X in Bezug auf die Curve $C^{(3)}$ zugehört. Die Asymptoten dieses Strahlsystems werden aber harmonisch getrennt durch das Strahlenpaar XO, XP; also auch umgekehrt: Die Punkte O und P werden harmonisch getrennt durch das Asymptotenpaar des dem willkürlichen Punkte X der Curve $C^{(3)}$ zugehörigen Strahlsystems, oder, was dasselbe ist, durch ein Paar conjugirter Strahlen des Gewebes. Wir haben daher folgenden Satz:

Auf jeder Tangente der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ bestimmen die sämmtlichen Paare conjugirter Strahlen des Gewebes Punktenpaare, welche ein

Punktsystem bilden; die Asymptotenpunkte (Doppelpunkte) dieses Punktsystems sind ein Paar conjugirter Punkte der Curve $C^{(3)}$.

Fassen wir nun 2 conjugirte Strahlen des Gewebes oder 2 conjugirte Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ins Auge, jede mit dem auf ihr befindlichen Punktsysteme, deren Asymptotenpunkte OP und $O'P'$ seien; der Schnittpunkt beider heisse R; er liegt auf der Curve $C^{(3)}$ und hat die beiden Strahlen zu Asymptoten des ihm zugehörigen Strahlsystems; der conjugirte Punkt zu R auf der Curve $C^{(3)}$ sei S und es werden R und S durch jedes Paar conjugirter Strahlen harmonisch getrennt. Wir können nun die beiden auf den Trägern $OP = l$ und $O'P' = l'$ befindlichen Punktsysteme in der Weise zu einander in Beziehung setzen, dass wir als entsprechende Punktenpaare derselben allemal solche auffassen, welche durch ein und dasselbe beliebige Asymptotenpaar auf ihnen ausgeschnitten werden; dann zeigt es sich, dass die beiden so auf einander bezogenen Punktsysteme der Träger l und l' in projectivischer Beziehung stehen und in dem Schnittpunkte ihrer Träger Punkte zweier entsprechender Punktenpaare vereinigt haben. In der That, sind m und m' irgend ein Paar conjugirter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche sich in o und die beiden Träger l und l' in entsprechenden Paaren conjugirter Punkte der auf ihnen befindlichen Punktsysteme treffen, so müssen m und m' durch R und S harmonisch getrennt werden, d. h. S liegt auf dem 4ten harmonischen Strahl zu mm' und oR, d. h. wenn wir von dem Schnittpunkt R der beiden Träger den 4ten harmonischen Punkt nehmen in Bezug auf je 2 entsprechende Punktenpaare der beiden Punktsysteme, so läuft die Verbindungslinie dieser 4ten harmonischen Punkte durch einen festen Punkt S. Verändern wir also das Paar mm', so durchlaufen jene 4ten harmonischen Punkte einfache Punktreihen, auf welche die Punktsysteme reducirt werden, und da diese einfachen Punktreihen perspectivisch liegen, indem ihr Projectionspunkt S ist, so müssen die beiden Punktsysteme selbst projectivisch sein und in halb-perspectivischer Lage sich befinden.

Wir haben nunmehr einen Kreis der Betrachtung geschlossen, indem wir wieder zurückgekommen sind zu derjenigen Erzeugungsart der Curve 3ter Classe, welche polar gegenübersteht der Erzeugungsart der Curve 3ter Ordnung, von welcher wir ausgingen, so dass wir einmal für die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ohne Weiteres die polaren Eigenschaften von allen denjenigen als gültig aussprechen dürfen, welche wir bisher für die Curve $C^{(3)}$ bewiesen haben, anderseits aber auch die Curve $C^{(3)}$ als identisch mit der Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes nachgewiesen haben und den Zusammenhang der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ als den der Hesse'schen und Cayley'schen erkennen. Wir können also folgende Sätze aussprechen:

Hat man 2 projectivische Punktsysteme, bei welchen in dem Schnittpunkte ihrer Träger Punkte zweier entsprechender Paare vereinigt sind, so erzeugen dieselben eine Curve 3ter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$, indem die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punktenpaare $x\xi$ und $y\eta$, also die Geraden xy, $\xi\eta$ und $x\eta$, ξy allemal 2 Paare conjugirter Tangenten dieser Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind. Ferner:

Hat man irgend 2 Paare conjugirter Tangenten dieser Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, so bestimmen dieselben als 2 Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks aufgefasst ein 3tes Paar Gegenseiten, welche ebenfalls ein Paar conjugirter Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind.

Zwei conjugirte Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ haben allemal die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte selbst eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist u. s. w.

18. Die Tangente in irgend einem Punkte O der Curve $C^{(3)}$ ist bekanntlich derjenige Strahl, welcher in dem zugehörigen Strahlsysteme (O) der 2te Theil des Strahlenpaares ist, von dem OP ein Theil (wenn P den conjugirten Punkt zu O auf der Curve $C^{(3)}$ bedeutet); die Tangente in O und OP werden daher harmonisch getrennt durch die beiden Asymptoten des Strahlsystems (O); wir können also auch die Tangente in O so construiren, dass wir die beiden Asymptoten des Strahlsystems (O) herstellen, den conjugirten Punkt P mit O verbinden und den 4ten harmonischen Strahl, der dem letzteren zugeordnet ist, aufsuchen; dieser ist die gesuchte Tangente. In analoger Weise wird für die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ der Berührungspunkt auf jeder Tangente gefunden; ist nämlich diese Tangente die Verbindungslinie der conjugirten Punkte OP und schneidet sie die Curve $C^{(3)}$ zum 3ten Male in R, so ist der zugeordnete 4te harmonische Punkt T zu R und OP der gesuchte Berührungspunkt.

Dies vorausgeschickt, können wir nun, da jedem Punkte der Curve $C^{(3)}$ ein bestimmtes Strahlsystem zugehört, nach solchen Punkten t derselben fragen, für welche das zugehörige Strahlsystem insbesondere ein *parabolisches* wird, d. h. ein Strahlsystem, dessen beide Asymptoten zusammenfallen; sei t ein solcher Punkt und die beiden Asymptoten des zugehörigen Strahlsystems in die eine Gerade tvw zusammengefallen, wo v und w conjugirte Punkte der Curve sein müssen; sei ferner u der conjugirte Punkt von t, also uv und uw die Tangenten in v und w, dann wird die Tangente in t die zugeordnete 4te harmonische sein müssen zu tu und den beiden Asymptoten; da diese beiden aber zusammenfallen, so muss auch die 4te harmonische hineinfallen, d. h. tvw muss Tangente in t sein; folglich muss v mit t zusammenfallen und daher u mit w; anderseits ist aber auch tvw eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(3)}$ und ihr Berührungspunkt der 4te harmonische Punkt zu t zugeordnet; da nun t und v zusammenfallen, so muss dieser 4te

harmonische Punkt auch hineinfallen; es ist also der Punkt t gleichzeitig ein Punkt der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ und die Tangente in t gleichzeitig eine Tangente für beide Curven; da nun $\mathfrak{K}^{(3)}$ eine Curve 3ter Classe, also allgemein 6ten Grades ist, mithin 18 Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ haben muss, welche paarweise in den Punkten t zusammenfallen, so haben wir dies Ergebniss:

Das einem jeden Punkte der Curve $C^{(3)}$ zugehörige Strahlsystem kann insbesondere 9mal ein parabolisches werden und zwar geschieht dies in denjenigen 9 Punkten t, in welchen die Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ sich schneiden und gleichzeitig berühren.

Ferner folgt, da uw schon von selbst eine Tangente der Curve $C^{(3)}$ in w ist und für den besonderen Punkt t, dessen Strahlsystem ein parabolisches wird, nicht allein t mit v, sondern auch u mit w zusammenfällt, dass die Tangente in w 3 zusammenfallende Punkte mit der Curve $C^{(3)}$ gemein haben muss, also eine Wendetangente und w ein Wendepunkt der Curve $C^{(3)}$ ist; wir haben daher das Resultat:

Die Tangenten in den besonderen 9 Punkten t schneiden die Curve $C^{(3)}$ in neun 3ten Schnittpunkten w, welches die Wendepunkte der Curve sind.

Anderseits folgt für die Curve 3ter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche in jedem Punkte t 2 zusammenfallende Tangenten besitzt und daher noch eine dritte durch diesen Punkt gehende Tangente haben muss, das polar gegenüberstehende Ergebniss von selbst:

*Aus jedem der besonderen 9 Punkte t lässt sich noch eine 3te Tangente an die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ legen; diese 9 Tangenten sind die Rückkehrtangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$.**)

Eine zweite der vorigen nahestehende Frage findet ihre Beantwortung in dem ersten Theile A. unserer Betrachtungen; wir können nämlich fragen:

Giebt es Punkte auf der Curve $C^{(3)}$, für welche das zugehörige Strahlsystem ein hyperbolich-gleichseitiges wird?

Denken wir uns ein beliebiges vollständiges Vierseit AB, $A'B'$, $A''B''$ der Curve $C^{(3)}$ einbeschrieben, dessen 3 Paar Gegenecken Paare conjugirter Punkte der Curve sind, so erhalten wir das irgend einem Punkte X derselben zugehörige Strahlsystem, indem wir X mit AB, $A'B'$, $A''B''$ durch Strahlenpaare verbinden. Nun ist (nach A.) der Ort eines Punktes Y, für welchen die Strahlenpaare YA, YB; YA', YB'; YA'', YB'' ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem con-

---

*) Hierdurch berichtigt sich ein in Steiner's Vorlesungen II. S. 553 von mir begangener Irrthum, den zu verbessern ich die Gelegenheit ergreife. Der dort begangene Fehler beruht auf einer falschen Auffassung des Ueberganges zur Grenzlage, wie leicht zu erkennen ist.

stituiren, eine gewisse Curve 3ter Ordnung (Brennpunktscurve), welche mit unserer $C^{(3)}$ ausser den 6 Ecken des vollständigen Vierseits im Allgemeinen nur noch 3 Punkte gemein haben kann, welche bekanntlich so liegen müssen, dass sie mit je 3 nicht auf einer Seite des vollständigen Vierseits befindlichen Ecken desselben auf je einem Kegelschnitt gelegen sind. Wir schliessen also:

Es giebt im Allgemeinen auf einer Curve $C^{(3)}$ 3 Punkte von der Art, dass die ihnen zugehörigen Strahlsysteme hyperbolisch-gleichseitig werden.

Die analogen besonderen Fälle für die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche aus der polaren Nebenbetrachtung sich ergeben, brauchen nur angedeutet zu werden:

Es giebt 9 besondere Tangenten T der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, für welche das auf ihnen befindliche, der Curve zugehörige Punktsystem ein parabolisches wird; dies sind die Tangenten in den obigen Punkten t, in welchen die beiden Curven $\mathfrak{K}^{(3)}$ und $C^{(3)}$ sich berühren.

Soll ein Punktsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges werden, so muss ein Asymptotenpunkt im Unendlichen liegen; da nun die Curve $C^{(3)}$ im Allgemeinen 3 unendlich entfernte Punkte hat, deren conjugirte 3 bestimmte Punkte sind, so folgt:

Es giebt 3 besondere Tangenten der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, für welche das auf ihnen befindliche der Curve zugehörige Punktsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges wird; diese sind den 3 Asymptoten der Curve $C^{(3)}$ parallel und gehen durch die den unendlich entfernten Punkten der letzteren conjugirten Punkte.

19. Wir können nun auch für die durch 2 projectivische Strahlsysteme in halb perspectivischer Lage erzeugte Curve 3ter Ordnung das Kegelschnittnetz herstellen, dessen Tripelcurve sie ist, indem wir die polare Construction von derjenigen ausführen, durch welche wir aus dem Kegelschnittgewebe zur Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ gelangten.

Verbinden wir irgend 2 conjugirte Punkte OP der Curve $C^{(3)}$ zu einem Strahle $l = OP$, so giebt es einen bestimmten zu l conjugirten Strahl l', den man entweder dadurch finden kann, dass man den 3ten Schnittpunkt R von OP mit $C^{(3)}$ aufsucht und von dem Strahlsystem (R), welches diesem Punkte zugehört und dessen eine Asymptote l ist, die andere Asymptote l' ermittelt, oder auch dadurch, dass man O und P als die Mittelpunkte zweier die $C^{(3)}$ erzeugenden Strahlsysteme auffasst und für jedes Paar von entsprechenden Strahlenpaaren, welche sich in 2 Paaren conjugirter Punkte AB, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ schneiden, die Verbindungslinien AB und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zieht und ihren Schnittpunkt $(AB, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = p$ verfolgt, welcher die gerade Linie l' durchläuft. Nimmt man von den unzählig vielen in solcher Weise ermittelten

conjugirten Strahlenpaaren irgend 2 heraus, l und l', m und m', und bestimmt die 4 Schnittpunkte:

$$(l,\ m),\quad (l,\ m'),\quad (l',\ m),\quad (l',\ m'),$$

so gehört das Kegelschnittbüschel, welches allemal durch 4 solche Punkte als Grundpunkte gelegt werden kann, ein und demselben Kegelschnittnetze an, dessen Tripelcurve die ursprüngliche $C^{(3)}$ ist.

Von einem solchen vollständigen Viereck, welches aus 2 beliebigen Paaren conjugirter Strahlen als 2 Paaren von Gegenseiten ll', mm' bestimmt wird, liegen nicht nur die beiden Diagonalpunkte:

$$(l,\ l') \text{ und } (m,\ m'),$$

sondern auch der 3te Diagonalpunkt:

$$[(lm,\ l'm'),\quad (lm',\ ml')]$$

auf der Curve $C^{(3)}$; denn diese 2 Paare conjugirter Strahlen bestimmen nach 17. ein 3tes Paar conjugirter Strahlen:

$$(lm,\ l'm') \text{ und } (lm',\ ml'),$$

deren Schnittpunkt also auch auf der Curve 3ter Ordnung liegen muss. Die 3 Diagonalpunkte eines solchen vollständigen Vierecks sind aber ein gemeinschaftliches Tripel für das Kegelschnittbüschel des Netzes und *die Curve $C^{(3)}$ ist daher auch der Ort aller gemeinschaftlichen Tripelpunkte für je 2 Kegelschnitte des Netzes.*

Bemerken wir endlich noch, dass irgend ein Paar conjugirter Punkte op der Curve $C^{(3)}$ sowohl durch das Asymptotenpaar ll', als auch durch das Asymptotenpaar mm' harmonisch getrennt werden muss, so folgt, dass op ein Paar conjugirter Punkte sein muss in Bezug auf alle Kegelschnitte des vorigen Büschels, d. h. die Polaren von o sämmtlich durch p laufen und umgekehrt; dies gilt aber für alle übrigen Kegelschnitte des Netzes in gleicher Weise und wir sehen daher, dass *unsere Curve $C^{(3)}$ erscheint als der Ort aller solcher Punkte o, deren Polaren in Bezug auf 3 nicht demselben Büschel angehörige Kegelschnitte (welche das Netz gerade bestimmen) durch ein und denselben Punkt p laufen.* Hierdurch ist nun die Identität von $C^{(3)}$ mit der Tripelcurve vollständig nachgewiesen.

Von besonderer Art wird das Kegelschnittnetz, dessen Tripelcurve die in dem ersten Theile A. von uns betrachtete Brennpunktscurve ist; da nämlich in diesem Falle die allen Punkten der Curve zugehörigen Strahlsysteme hyperbolisch-gleichseitige sind, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen, so bestehen die Vierecke, welche vorhin als Grundpunkte von Kegelschnittbüscheln des Netzes auftraten, aus den je 4 Punkten, in welchen sich 2 rechtwinklige Strahlenpaare treffen; ein solches vollständiges Viereck hat aber noch ein drittes rechtwinkliges Seitenpaar und die 4 Ecken sind bekanntlich die Grund-

punkte eines Kegelschnittbüschels, welches aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht (Steiner's Vorlesungen II. S. 234). Wir haben daher folgendes Resultat:

Das besondere Kegelschnittnetz, dessen Tripelcurve die in A. *betrachtete Brennpunktscurve ist, besteht aus lauter gleichseitigen Hyperbeln.*

20. Zwischen den Kegelschnitten des Gewebes, dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist und den Kegelschnitten des Netzes, dessen Tripelpunktcurve $C^{(3)}$ ist, muss wegen des Zusammenhanges der Hesse'schen Curve $C^{(3)}$ mit der Cayley'schen $\mathfrak{K}^{(3)}$ ebenfalls ein gewisser Zusammenhang bestehen, welcher gestattet, die einen aus den anderen herzuleiten.

In der That, nehmen wir 3 beliebige Kegelschnitte des Gewebes $\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2\,\mathfrak{K}_3$, welche nicht derselben Schaar angehören, also zur Bestimmung des Gewebes gerade ausreichen, heraus, so bestimmen je 2 derselben eine Kegelschnittschaar:

$$[\mathfrak{K}_2,\ \mathfrak{K}_3],\quad [\mathfrak{K}_3,\ \mathfrak{K}_1],\quad [\mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2],$$

jede dieser Schaaren hat ein gemeinschaftliches Tripeldreiseit:

$$u_1\,v_1\,w_1,\qquad u_2\,v_2\,w_2,\qquad u_3\,v_3\,w_3$$

und dies sind 9 Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche dieselbe gerade bestimmen.

Fassen wir das erste Dreiseit $u_1\,v_1\,w_1$ auf und bezeichnen die Ecken desselben durch

$$p_1 = (v_1\,w_1),\quad q_1 = (w_1\,u_1),\quad r_1 = (u_1\,v_1),$$

so ist p_1 der Pol von u_1 in Bezug auf jeden der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$; denken wir uns den Pol von u_1 in Bezug auf den 3ten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ ermittelt und mit p_1 verbunden, so muss diese Verbindungslinie $\mathfrak{u}_1$ der conjugirte Strahl zu u_1 in Bezug auf die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ sein, d. h. u_1 und $\mathfrak{u}_1$ schneiden sich in einem Punkte x_1 der Curve $C^{(3)}$ und sind die Asymptoten des Strahlsystems, welches dem Punkte x in Bezug auf die Curve $C^{(3)}$ zugehört. Dasselbe machen wir nun mit den beiden anderen Geraden v_1 und w_1, d. h. wir verbinden ihre Pole in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ resp. mit q_1 und r_1 und erhalten dadurch 2 Gerade $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{w}_1$, welche die conjugirten Strahlen zu v_1 und w_1 sind und diese in y_1 und z_1 treffen. Die 3 Strahlen $\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1$ müssen sich aber in einem und demselben Punkte s_1 schneiden, denn es sind die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Polen der gegenüberliegenden Seiten in Bezug auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ (Steiner's Vorlesungen II. Seite 160), folglich sind $p_1\,q_1\,r_1\,s_1$ die 4 Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen 3 Paar Gegenseiten aus 3 Paaren conjugirter Strahlen der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ bestehen; das Diagonaldreieck dieses vollständigen Vierecks ist $x_1\,y_1\,z_1$.

Aus den früheren Untersuchungen geht aber hervor, dass 2 conjugirte Strahlen in Bezug auf die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, wie u_1 und $\mathfrak{u}_1$, nichts

anderes sind, als ein specieller Kegelschnitt (ein Linienpaar), welcher dem Kegelschnittnetze angehört, dessen Tripelcurve $C^{(3)}$ ist; wir haben also hier 3 Kegelschnitte dieses Netzes, welche demselben Büschel angehören, dessen Tripeldreieck $x_1\,y_1\,z_1$ und dessen Grundpunkte $p_1\,q_1\,r_1\,s_1$ sind. Wir haben also folgendes Ergebniss:

Zu den 3 Seiten irgend eines Tripeldreiseits in einem Kegelschnittgewebe giebt es 3 conjugirte Strahlen, welche sich in einem Punkte s schneiden; sind $p\,q\,r$ die Ecken des Dreiseits, so bilden $p\,q\,r\,s$ die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, welches dem mit dem Gewebe zusammenhängenden Kegelschnittnetze angehört. Das Diagonaldreieck $x\,y\,z$ dieses vollständigen Vierecks $p\,q\,r\,s$ ist mithin ein Tripeldreieck des Netzes.

Zugleich folgt der polar gegenüberstehende Satz:

Zu den Ecken $x\,y\,z$ eines Tripeldreiecks des Kegelschnittnetzes giebt es 3 conjugirte Punkte, welche auf einer Geraden T liegen; sind $X\,Y\,Z$ die Seiten des Dreiecks, so bilden $X\,Y\,Z\,T$ ein vollständiges Vierseit, dem eine Kegelschnittschaar einbeschrieben werden kann, welche dem mit dem Netze zusammenhängenden Kegelschnittgewebe angehört.

Die Tripeldreiseite des Gewebes $u\,v\,w$ und die Tripeldreiecke des Netzes $x\,y\,z$ lassen sich hiernach in solche Verbindung setzen, dass jedem Dreiseit $u\,v\,w$ ein bestimmtes Dreieck $x\,y\,z$ einbeschrieben oder auch umgekehrt jedem Dreieck $x\,y\,z$ ein bestimmtes Dreiseit $u\,v\,w$ umbeschrieben ist.

Die soeben ausgeführte Construction, welche von dem ersten Tripeldreiseit $u_1\,v_1\,w_1$ ausging, lässt sich in ganz gleicher Weise auch für die beiden anderen Dreiseite $u_2\,v_2\,w_2$ und $u_3\,v_3\,w_3$ ausführen und wir erhalten demnach 3 Tripeldreiecke

$$x_1\,y_1\,z_1\,,\quad x_2\,y_2\,z_2\,,\quad x_3\,y_3\,z_3\,,$$

welche die Curve $C^{(3)}$ vollständig bestimmen, sowie 3 vollständige Vierecke:

$$p_1\,q_1\,r_1\,s_1\,,\quad p_2\,q_2\,r_2\,s_2\,,\quad p_3\,q_3\,r_3\,s_3$$

als Grundpunkte von 3 Kegelschnittbüscheln, welche das Kegelschnittnetz bestimmen, dessen Tripelcurve $C^{(3)}$ ist.

Zur Bestimmung dieses Kegelschnittnetzes gelangen wir indessen noch einfacher durch folgende Bemerkung:

Da je 2 Büschel in einem Netze einen Kegelschnitt gemeinschaftlich haben müssen, so liegen die 8 Punkte $p_2q_2r_2s_2$ und $p_3q_3r_3s_3$ auf einem Kegelschnitte des Netzes, der schon mehr als bestimmt ist durch die Ecken der beiden Tripeldreiseite $p_2\,q_2\,r_2$, $p_3\,q_3\,r_3$, welche bekanntlich als 2 Tripel in Bezug auf denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ selbst auf einem Kegelschnitte liegen müssen. Wir kommen daher zu folgendem Schluss:

Sind $\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2\,\mathfrak{K}_3$ 3 *Kegelschnitte, welche nicht derselben Schaar angehören und zur Bestimmung eines Kegelschnittgewebes dienen; sind ferner die gemeinschaftlichen Tripeldreiseite je zweier derselben* $\mathfrak{K}_2\,\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_3\,\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2$ *ermittelt, so liegen die* 6 *Ecken je zweier dieser Dreiseite auf* 3 *neuen Kegelschnitten* $C_1\,C_2\,C_3$, *welche ein Kegelschnittnetz bestimmen; dieses Kegelschnittnetz und jenes Kegelschnittgewebe haben zu ihren Tripelcurven die Hesse'sche* $C^{(3)}$ *und die mit ihr zusammenhängende Cayley'sche* $\mathfrak{K}^{(3)}$.

In ganz analoger Weise gelangt man von einem gegebenen Kegelschnittnetze, dessen Tripelcurve $C^{(3)}$ ist, zu demjenigen Kegelschnittgewebe, dessen Tripelcurve die zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist.

Breslau im October 1871.

Ueber die Curve 3ter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet.

Von H. Durège in Prag.

Herr Salmon*) hat gezeigt, dass die Brennpunkte der Kegelschnitte, welche vier feste Geraden berühren (oder dem nämlichen Vierseit einbeschrieben sind), eine Curve 3ter Ordnung erfüllen, welche durch die imaginären Kreispunkte geht. Dazu machte Herr Schröter die wichtige Bemerkung, dass die Brennpunkte jedes Kegelschnittes der gegebenen Schaar ein Paar conjugirter Pole auf jener Curve 3ter Ordnung bilden. Man kann sich hievon überzeugen, wenn man nach Herrn Salmon's Vorgange aus den imaginären Kreispunkten Tangentenpaare an die Kegelschnitte der gegebenen Schaar sich gelegt denkt, wodurch man zwei projectivische Strahleninvolutionen erhält, und erkennt dann, dass die imaginären Kreispunkte selbst zwei conjugirte Pole auf der Curve sind, was sich erwarten lässt, da diese Punkte als Brennpunkte jedes Kegelschnittes angesehen werden können. Diese Eigenschaft führt aber zu einer höchst einfachen Construction jener Curve, welche auch erlaubt, zu jedem Brennpunkte den dazu gehörigen zweiten Brennpunkt desselben Kegelschnittes leicht zu finden.

1.

Ordnet man die Kegelschnitte zweier Büschel einander projectivisch zu, so ist der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Kegelschnitte im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung, welche durch die Basispunkte beider Büschel hindurchgeht. Man kann aber ein System von Strahlenpaaren, die alle durch denselben Punkt gehen, dann als einen Kegelschnittbüschel betrachten, dessen Basispunkte in einen Punkt zusammenfallen, wenn die Strahlenpaare eine Involution bilden.**) Ordnet man daher die Strahlenpaare zweier Involutionen einander projectivisch zu***), so ist der geometrische Ort

*) Salmon's Kegelschnitte, deutsch von Fiedler. 2. Aufl. pag. 355 und 397.

**) Vergl. des Verfassers „Curven 3ter Ordnung“ art. 127. Anm.

***) Vergl. Cremona, Curve piane. art. 23.

der Durchschnitte entsprechender Strahlenpaare im Allgemeinen auch eine Curve 4[ter] Ordnung, welche in diesem Falle, wie man leicht sieht, in den Scheiteln der Involutionen Doppelpunkte besitzt. Für die gegenwärtige Betrachtung kommt es aber darauf an, den Fall näher ins Auge zu fassen, dass diese Curve 4[ter] Ordnung in eine Gerade und eine Curve 3[ter] Ordnung zerfällt; wir wollen daher zunächst untersuchen, wann dies eintreten kann.

Herr Siebeck *) hat gezeigt, dass wenn man die Kegelschnitte zweier Büschel auf alle möglichen Arten einander projectivisch zuordnet, es drei Arten der Zuordnung giebt, bei welchen der geometrische Ort der Durchschnitte in eine Curve 3[ter] Ordnung und eine Gerade zerfällt. Diese drei Geraden (von Herrn Siebeck das Chordaldreieck genannt) sind die Diagonalen eines vollständigen Vierseits, dessen gegenüberliegende Eckenpaare xx', yy', zz' die einzigen Punktepaare sind, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte beider Büschel zugleich conjugirte Pole bilden. Diese Punktepaare kann man nun, wenn die Kegelschnittbüschel aus Strahleninvolutionen, die Kegelschnitte also aus Strahlenpaaren bestehen, leicht auffinden. Sind nämlich o und o' die Scheitel der beiden Involutionen, so geht die Polare jedes Punktes m der Ebene in Bezug auf irgend ein Strahlenpaar der Involution $[o]$ durch o hindurch, denn sie ist der in Bezug auf das betrachtete Strahlenpaar zu om harmonisch zugeordnete Strahl; mithin ist o der conjugirte Pol zu jedem Punkte m in Bezug auf die Strahlenpaare der Involution $[o]$; und umgekehrt kann in Bezug auf diese jeder Punkt der Ebene als conjugirter Pol von o betrachtet werden. Ebenso ist für jeden Punkt m der Scheitel o' der anderen Involution der conjugirte Pol in Bezug auf die letztere. Hieraus folgt, dass jeder Punkt m der Ebene, der nicht mit o oder o' zusammenfällt, in Bezug auf die beiden Involutionen zwei verschiedene conjugirte Pole besitzt, nämlich o und o'. Es können daher nur die Punkte o und o' die geforderte Eigenschaft besitzen, conjugirte Pole zu sein in Bezug auf beide Involutionen zugleich; und diese Punkte besitzen diese Eigenschaft auch wirklich, denn o' ist einmal conjugirter Pol zu o in Bezug auf $[o']$, dann aber auch in Bezug auf $[o]$, da als solcher jeder Punkt der Ebene genommen werden kann. Demnach fallen die drei oben erwähnten Punktepaare xx', yy', zz' in dem vorliegenden Falle in das eine Punktepaar oo' zusammen, und die drei Diagonalen des von diesen Punktepaaren gebildeten vollständigen Vierseits fallen in die Gerade oo'.

Wenn daher die durch die Durchschnitte zweier projectivischer

*) Siebeck, De triangulo, cujus latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum conjugatos (Ann. di matematica. Ser. II. Tomo 2. pag. 67).

Strahleninvolutionen erzeugte Curve 4ter Ordnung in eine Curve 3ter Ordnung und eine Gerade zerfällt, so ist die Gerade allemal die Verbindungslinie oo' der Scheitel der Involutionen. Sobald also dieses Zerfallen eintritt, liegen immer alle vier Schnittpunkte je zweier entsprechender Strahlenpaare auf der Curve 3ter Ordnung, welche auch die Scheitel o und o' enthält, da diese Punkte dann in der Art als Doppelpunkte der Curve 4ter Ordnung auftreten, dass durch sie sowohl die Gerade als auch die Curve 3ter Ordnung hindurchgeht. In der Geraden oo' aber sind zwei Strahlen, die entsprechenden Strahlenpaaren angehören, vereinigt. Umgekehrt ist klar, dass allemal, wenn die letztere Eigenschaft stattfindet, die Gerade oo' einen Theil des geometrischen Ortes bilden muss, und dass die beiden Involutionen dann eine Curve 3ter Ordnung erzeugen. Es tritt hier das Nämliche ein, was bei der perspectivischen Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel stattfindet, dass nämlich die Verbindungslinie der Scheitel einen Theil der erzeugten Curve bildet. Wegen dieser Analogie will ich zwei projectivische Strahleninvolutionen, bei welchen in der Verbindungslinie der Scheitel zwei Strahlen, die entsprechenden Strahlenpaaren angehören, vereinigt sind, der Kürze wegen und in Ermangelung eines besseren Ausdrucks *perspectivisch liegend* nennen, wiewohl diese Bezeichnung nicht ganz zutreffend ist. Damit können wir dann sagen: Zwei projectivische Strahleninvolutionen erzeugen durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlenpaare dann und *nur dann* eine Curve 3ter Ordnung, wenn sie perspectivisch liegen.

Theilt man nun bei zwei solchen Involutionen die vier Durchschnitte zweier entsprechender Strahlenpaare dergestalt in zwei Paare, dass die zu einem Paare zusammengefassten Punkte nicht auf demselben Strahle liegen, so bilden diese beiden Paare und die Scheitel der Involutionen allemal die gegenüberliegenden Ecken eines der Curve einbeschriebenen vollständigen Vierseits. Mithin sind jene Durchschnittpaare und auch die Scheitel drei demselben Systeme angehörige conjugirte Polepaare auf der Curve; und da bei jedem solchen von den entsprechenden Strahlenpaaren gebildeten Vierseit die Punkte o, o' immer dieselben bleiben, so gehören alle so entstehenden Punktepaare als Polepaare demselben Systeme an. Fasst man insbesondere das Polepaar ins Auge, welches aus dem dritten Durchschnittspunkte von oo' mit der Curve und dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkte von o und o' besteht, so folgt, dass die dem gemeinschaftlichen Strahle oo' in den beiden Involutionen conjugirten Strahlen die Tangenten in o und o' an der Curve sind.

Man kann aber auch umgekehrt zeigen, *dass jede Curve 3ter Ordnung durch zwei projectivische und perspectivisch liegende Strahleninvolutionen erzeugt werden kann.* Denn ist C eine gegebene Curve 3ter Ord-

nung, so fasse man sie auf eine der drei möglichen Arten als eine Hesse'sche Curve auf und betrachte das dieser Auffassung entsprechende System der conjugirten Pole auf der Curve. Dann bilden die von irgend einem Curvenpunkte nach den Polepaaren gehenden Strahlenpaare conjugirte Paare einer Involution. Sind nun oo', aa', bb' irgend drei Polepaare, und nimmt man noch das vierte Paar dazu, welches aus dem Tangentialpunkte t eines dieser Paare, z. B. o, o' und dem Punkte t' besteht, in welchem oo' die Curve trifft, so sind $o\,(to', aa', bb')$ und $o'\,(to, aa', bb')$ je drei Strahlenpaare zweier Involutionen. Diese kann man der Reihe nach als einander projectivisch entsprechend annehmen, und dadurch ist dann die projectivische Zuordnung der Strahlenpaare von $[o]$ und $[o']$ bestimmt. Diese beiden projectivischen Involutionen liegen auch perspectivisch, denn die in oo' vereinigten Strahlen gehören den entsprechenden Paaren $o\,(to')$ und $o'\,(to)$ an; sie erzeugen also nach dem Früheren eine Curve 3ter Ordnung, C', welche mit der gegebenen Curve C die Punkte oo', aa', bb' und t gemein hat, und zwar sowohl in o als auch in o' zwei Punkte, da die Strahlen ot und $o't$ in o und o' sowohl C als auch C' berühren. Man kann aber noch andere, beiden Curven gemeinsame Punkte angeben. Denn schneiden sich die Strahlenpaare $o\,(aa')$ und $o'\,(aa')$ aufs Neue in α, α', so liegen diese Punkte zunächst auf C', aber da oo', aa', $\alpha\alpha'$ die gegenüberliegenden Eckenpaare eines vollständigen Vierseits bilden, so sind $\alpha\alpha'$ auch conjugirte Pole auf C. Dasselbe gilt von den Punkten $\beta\beta'$, in denen $o\,(bb')$ und $o'\,(bb')$ sich treffen. Demnach haben die Curven C und C' nicht bloss die oben erwähnten 9 Punkte, sondern auch α, α', β, β', im Ganzen also 13 Punkte, gemeinschaftlich, und folglich ist die durch die Involution erzeugte Curve C' mit der gegebenen C identisch.

2.

Man erhält nun projectivische Strahleninvolutionen, wenn man aus zwei beliebigen Punkten o und o' Tangentenpaare an die Kegelschnitte einer Schaar (welche vier feste Geraden berühren) legt. Die projectivische Zuordnung ist dann der Art, dass je zwei Tangentenpaare, welche denselben Kegelschnitt berühren, einander entsprechen. Solche zwei Involutionen liegen auch allemal perspectivisch; denn da ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt ist, so giebt es unter den Kegelschnitten der Schaar einen, K, welchen die Gerade oo' berührt, und an diesen geht dann sowohl von o als auch von o' noch eine Tangente, sodass bei den beiden an K gelegten Tangentenpaaren (welche entsprechende Strahlenpaare bilden) zwei Tangenten mit oo' zusammenfallen. Demnach ist der geometrische Ort der Durchschnitte der

von zwei festen Punkten o, o' an die Kegelschnitte einer Schaar gelegten Tangentenpaare eine Curve 3ter Ordnung, auf welcher sowohl je zwei Durchschnittspunkte, die nicht auf derselben Tangente liegen, als auch o und o' conjugirte Pole desselben Systems sind.

Nimmt man nun statt der beliebigen Punkte o und o' die imaginären Kreispunkte ω und ω' als diejenigen an, von welchen die Tangentenpaare ausgehen, sodass je zwei von ω und ω' an denselben Kegelschnitt gelegte Tangenten (welche conjugirt imaginäre Strahlen bilden) sich in den Brennpunkten dieses Kegelschnittes treffen, so folgt, dass der geometrische Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar eine durch die imaginären Kreispunkte gehende Curve ist, auf welcher die Brennpunktpaare und die imaginären Kreispunkte conjugirte Pole in demselben Systeme sind. Da nun aber zwei conjugirte Pole stets einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben, so folgt weiter, dass der (reelle) Durchschnitt der beiden imaginären Asymptoten (welcher Punkt nach dem Vorgange des Herrn Eckardt*) das *Centrum* der Curve genannt werden möge) auf der Curve liegt. *Demnach ist der geometrische Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar eine durch die imaginären Kreispunkte gehende Curve 3ter Ordnung von der speciellen Natur, dass das Centrum der Curve auf ihr selbst liegt.*

Diese Eigenschaft macht es möglich, diese Curve auf eine höchst einfache Weise zu construiren.

3.

Schon die allgemeinen durch die imaginären Kreispunkte gehenden Curven 3ter Ordnung lassen eine einfache Constructionsweise zu.**) Für den speciellen Fall aber, dass das Centrum auf der Curve selbst liegt, hat Herr Küpper schon vor längerer Zeit eine noch viel einfachere Erzeugungsweise angegeben, welche sich aus folgender Betrachtung ergiebt.

Seien $ABoo'$ die vier Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, und

$$p = (AB,\ oo'), \qquad q = (Ao,\ Bo'), \qquad r = (Ao',\ Bo)$$

die Ecken des dem vollständigen Viereck $ABoo'$ zugehörigen Diagonaldreiecks. Dann liegen die Pole der Geraden oo' in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels auf der Geraden qr; denn auf dieser Geraden schneiden sich die in o und o' an jeden Kegelschnitt gelegten Tangenten, und diese Tangentendurchschnitte sind eben die Pole von oo'. Da also die z. B. in o an die Kegelschnitte gelegten Tangenten

*) Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik. Bd. 10. p. 321.

**) Vgl. Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik. Bd. 14. p. 368.

durch jene Pole hindurchgehen, so liegt dieser Tangentenbüschel mit der von den Polen gebildeten Punktreihe perspectivisch, und da der Tangentenbüschel mit dem Kegelschnittbüschel projectivisch ist, so ist auch die Punktreihe der Pole projectivisch mit dem Kegelschnittbüschel. Legt man also nun aus einem beliebigen Punkte f Strahlen nach jenen Polen, so erhält man einen mit dem Kegelschnittbüschel projectivischen Strahlbüschel; diese beiden Büschel erzeugen dann eine Curve 3ter Ordnung, welche durch $ABoo'$ und f geht. Dabei entspricht einem Kegelschnitte K des Büschels derjenige Strahl aus f, welcher durch den Pol von oo' in Bezug auf K geht. Daraus folgt dann noch, dass die Strahlen fo und fo' die Curve 3ter Ordnung in o und o' berühren. Denn dem durch den Basispunkt o gehenden Strahle fo entspricht derjenige Kegelschnitt K, welcher die Curve in o berührt. Aber die Tangente an K in o geht durch den Pol von oo' in Bezug auf K, und durch denselben Pol geht auch der dem K entsprechende Strahl fo, also fällt fo mit der Tangente an K in o zusammen, welche zugleich in o Tangente an der Curve ist. Ebenso beweist man, dass fo' die Curve in o' berührt.

Nimmt man nun statt der Punkte o und o' die imaginären Kreispunkte ω und ω', so verwandelt sich der Kegelschnittbüschel in einen Kreisbüschel (ein System von Chordalkreisen), die Gerade $\omega\omega'$ wird die unendlich ferne Gerade, und deren Pole sind die Mittelpunkte der Kreise. Die Tangenten fo und fo' endlich gehen in die imaginären Asymptoten $f\omega$ und $f\omega'$ der Curve über, und daher wird f das Centrum der Curve, welches also auf der Curve selbst liegt. Man erhält hieraus den Satz: Legt man aus einem festen Punkte f Strahlen durch die Mittelpunkte der Kreise, die einem Chordalsystem angehören, so ist der geometrische Ort der Durchschnitte jedes Strahles mit dem Kreise, durch dessen Mittelpunkt er geht, eine Curve 3ter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte, durch die gemeinschaftlichen Punkte der Chordalkreise und durch f geht, und auf welcher f das Centrum ist. Ausserdem sieht man leicht, dass eine auf diese Weise erzeugte Curve noch folgende Eigenschaften hat (vgl. Fig. 1.): Die reelle Asymptote ist der Centrallinie der Chordalkreise parallel und liegt von dieser ebenso weit entfernt, wie das Centrum auf der entgegengesetzten Seite. Eine aus dem Centrum mit der reellen Asymptote parallel laufende Gerade trifft die Curve in demselben Punkte, wie die Chordale des Kreisbüschels. Die Tangente im Centrum geht nach dem Durchschnitt der reellen Asymptote mit der Curve.

Nun kann man aber auch leicht zeigen, dass jede durch die imaginären Kreispunkte ω, ω' gehende Curve 3ter Ordnung, deren Centrum f auf ihr selbst liegt, auf die eben angegebene Art erzeugt werden kann, und ist dann im Stande, das dazu erforderliche System von

Chordalkreisen zu finden. Denn zieht man bei einer gegebenen Curve dieser Art, C, aus f eine Parallele $f\omega''$ zu der reellen Asymptote (ω'' bedeute den reellen unendlich fernen Punkt der Curve), schneidet mit dieser die Curve in g, und mit einer aus g senkrecht gegen die reelle Asymptote gezogenen Geraden in A und B, so liegt den vier Punkten A, B, ω, ω' der Punkt f gegenüber, denn AB schneidet die Curve in g, $\omega\omega'$ in ω'', und $g\omega''$ in f. Dieser Punkt ist also der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, welcher mit dem Kreisbüschel $[AB\,\omega\omega']$ die Curve erzeugt, und jeder durch f gelegte Strahl schneidet die Curve in zwei Punkten, die mit A und B in einem Kreise liegen. Diese den Kreisen entsprechenden Strahlen können aber keine anderen sein, als die nach der obigen Erzeugungsweise durch die Mittelpunkte der Kreise gehenden; d. h. erzeugt man auf die letztere Art eine Curve C', so muss diese mit C identisch sein. Denn die beiden Curven C und C' haben zunächst nach dem Obigen folgende Punkte gemeinschaftlich: in jedem der Punkte ω und ω' zwei, und ausserdem f, A, B, g, ω'', also im Ganzen neun. Ausser diesen kann man noch einen zehnten gemeinschaftlichen Punkt finden. Bezeichnet nämlich α den Durchschnitt der reellen Asymptote der Curve C' mit dieser Curve, so liegt α den vier Punkten $fg\,\omega\omega'$ gegenüber, da sowohl fg als auch $\omega\omega'$ die C' in ω'' schneiden. Da nun ausserdem f den Punkten $AB\,\omega\omega'$ gegenüberliegt, so haben alle Curven 3ter Ordnung, die durch die 8 Punkte $fg\,\omega\omega'$ und $AB\,\omega\omega'$ gelegt werden können, auch noch den Punkt mit einander gemein, in welchem αf die C' trifft, mithin geht auch C durch diesen Punkt. Dieser fällt, weil nach dem Obigen αf die C' in f berührt, mit f zusammen, also haben C und C' in f nicht bloss einen, sondern zwei Punkte gemein, und C und C' sind in der That identisch.

Hienach hat also jede durch die imaginären Kreispunkte gehende Curve 3ter Ordnung, deren Centrum f auf der Curve selbst liegt, die Eigenschaft, dass, wenn man durch f Strahlen zieht, welche die Curve in xy, $x'y'$, ... schneiden, die Mittelpunkte der Strecken xy, $x'y'$, ... auf einer mit der reellen Asymptote parallelen Geraden liegen. Diese Gerade möge die *Mittellinie* der Curve heissen. Schlägt man ferner über den Strecken xy, $x'y'$, ... als Durchmesser Kreise, so bilden diese ein System von Chordalkreisen; und dieses ist durch zwei solche Kreise vollständig bestimmt.

4.

Man sieht nun leicht, dass diese Construction sich bei der Curve anwenden lässt, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet. Zunächst erhellt sofort, dass das Centrum f dieser Curve der Brennpunkt der in der Schaar enthaltenen Parabel

ist, denn diese berührt die unendlich ferne Gerade $\omega\omega'$; die aus ω und ω' an die Parabel gehenden Tangenten, welche sich in dem Brennpunkte der Parabel schneiden, sind daher in den beiden Involutionen $[\omega]$ und $[\omega']$ die zu $\omega\omega'$ conjugirten Strahlen; diese aber berühren nach dem Früheren auch die Curve in ω und ω', sie sind also die imaginären Asymptoten der Curve und ihr Durchschnitt das Centrum. Die Mittellinie ist ferner die Gerade M, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des vollständigen Vierseits verbindet. Denn diese Gerade enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schaar als die Pole der unendlich fernen Geraden und ist daher nach dem zweiten unendlich fernen Brennpunkte f' der Parabel gerichtet. Sind nun a, a' ein Paar gegenüberliegender Ecken des gegebenen vollständigen Vierseits, so sind dies zugleich die Brennpunkte des aus diesen Punkten bestehenden Kegelschnittes der Schaar. Demnach bilden aa' und ff' zwei Paare conjugirter Pole unserer Curve, und folglich sind auch die Durchschnitte

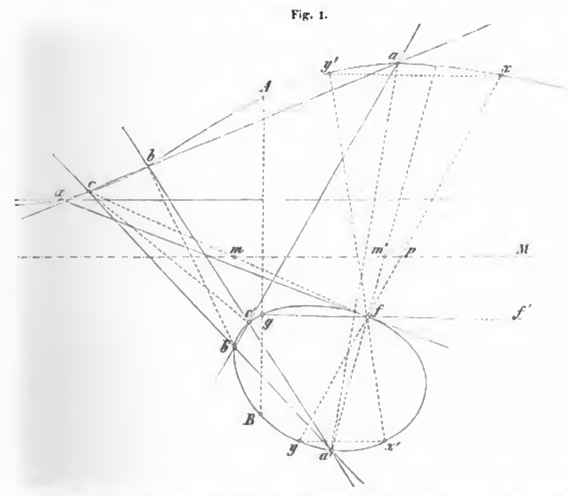
$$h = (af,\ a'f'), \qquad h' = (af',\ a'f)$$

conjugirte Pole und also auch zwei Curvenpunkte. Aber af' und $a'f'$ laufen mit der Geraden M parallel, und M halbirt aa', also halbirt sie auch ah und $a'h'$, und da diese Strahlen durch f gehen, so ist M die Mittellinie der Curve. Zugleich bestimmen die über ah und $a'h'$ als Durchmesser construirten Kreise das System der Chordalkreise, welche zur Construction der Curve dienen. Zu bemerken ist, dass zur Bestimmung der Chordalkreise nicht nothwendig zwei gegenüberliegende Ecken des Vierseits gewählt werden müssen, denn ist b irgend eine andere Ecke des Vierseits und daher auch ein Punkt der Curve, und schneidet man die M mit fb in m, so ist nach dem Früheren der um m mit dem Radius mb beschriebene Kreis ebenfalls ein dem Systeme angehöriger.

Hienach ist nun die Construction der Curve in Fig. 1. folgendermassen ausgeführt: Es seien aa', bb', cc' die gegenüberliegenden Ecken des gegebenen Vierseits. Man bestimmt zuerst die Gerade M, welche die Mittelpunkte der Diagonalen aa', bb', cc' verbindet; sodann den Brennpunkt f der dem Vierseit einbeschriebenen Parabel, welcher, da er der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der vier Kreise ist, welche den vier in dem Vierseit enthaltenen Dreiecken umschrieben sind, durch zwei dieser Kreise gefunden wird. Nun zieht man aus f Strahlen nach irgend zwei Ecken des Vierseits, z. B. fc und fa', schneidet mit diesen die Mittellinie M in m und m' und beschreibt um m und m' Kreise mit den Radien mc und $m'a'$. Die Schnittpunkte derselben, A und B, sind die gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Chordalkreise. (Schneiden sich diese beiden Kreise nicht, so bestimmen sie immerhin das System der Chordalkreise, nur ist dann die Construction der Curve

etwas umständlicher). Jetzt kann die Curve gezeichnet werden, indem man auf jedem durch f gehenden Strahle die auf ihm liegenden Curvenpunkte bestimmt. Ist z. B. fp ein solcher Strahl, der die Mittellinie M in p schneidet, so macht man $pA = pB = px = py$, und x und y sind die gesuchten Punkte der Curve. (Sind die Punkte A und B

Fig. 1.



imaginär, so hat man denjenigen Kreis des Systems zu suchen, dessen Mittelpunkt in p liegt, und mit diesem den Strahl fp in x und y zu schneiden.)

Nachdem auf diese Weise die Curve gezeichnet ist, ist nun jeder Punkt x derselben ein Brennpunkt für einen Kegelschnitt der gegebenen Schaar, und man findet dann den zweiten Brennpunkt x' desselben Kegelschnittes, indem man die Curve mit einer aus x parallel zu M gezogenen Geraden in y' schneidet und dann $y'f$ zieht. Die letztere Gerade trifft die Curve in dem gesuchten zweiten Brennpunkte x'. Oder man schneidet zuerst mit xf in y und zieht aus y eine Parallele zu M. Diese trifft die Curve ebenfalls in x'. Die Punkte y, y' sind dann auch die Brennpunkte eines Kegelschnittes der Schaar. Die Richtigkeit hievon erhellt unmittelbar, da die mit M parallel gezogenen Geraden nach dem unendlich fernen Brennpunkte f' der Parabel gerichtet sind, sodass die von x nach den conjugirten Polen f, f' gehenden Geraden die Curve in zwei conjugirten Polen

(d. h. zwei zusammengehörigen Brennpunkten) y und y' treffen müssen, und der Schnittpunkt $x' = (yf', y'f)$ der zu x conjugirte Pol, also der zweite Brennpunkt ist.

5.

Von Interesse ist noch die nähere Betrachtung des speciellen Falles, dass die projectivische Zuordnung der Strahlenpaare zweier perspectivisch liegender Involutionen der Art ist, dass die Doppelstrahlen einander entsprechen. In diesem Falle zerfällt die erzeugte Curve 3ter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Dies lässt sich direct zeigen, indem man leicht erkennen kann, dass in diesem Falle jede der beiden Involutionen in zwei Strahlenbüschel zerlegt werden kann, der Art, dass die vier so entstehenden Strahlenbüschel alle unter einander projectivisch sind. Zwei dieser Strahlenbüschel (die nicht denselben Mittelpunkt haben) aber liegen perspectivisch und erzeugen eine Gerade, die beiden anderen einen Kegelschnitt. Es genügt jedoch, darauf hinzuweisen, dass die erzeugte Curve 3ter Ordnung in dem in Rede stehenden Falle zwei Doppelpunkte haben muss. Im Allgemeinen nämlich entspricht einem Doppelstrahle der einen Involution $[o]$ ein Strahlenpaar der anderen $[o']$. Die Strahlen des Letzteren schneiden den Doppelstrahl in je zwei zusammenfallenden Punkten und sind daher Tangenten an der Curve. Entspricht aber einem Doppelstrahle in $[o]$ ein Doppelstrahl in $[o']$, und schneiden sich diese beiden etwa in p, so trifft nicht bloss op, sondern auch $o'p$ die Curve in zwei mit p zusammenfallenden Punkten, also ist p ein Doppelpunkt der Curve. Entsprechen einander ausserdem auch noch die beiden anderen Doppelstrahlen, die sich in q schneiden mögen, so ist auch q ein Doppelpunkt der Curve. Demnach besteht die Letztere in diesem Falle aus der Geraden pq und einem Kegelschnitte, der ebenfalls durch p und q geht. Da die Curve ferner in o und o' die beiden Strahlen ot und $o't$ berührt, welche in $[o]$ und $[o']$ zu oo' conjugirt sind, so ist der Kegelschnitt dadurch mehr als hinreichend bestimmt, dass er in o und o' die Geraden ot und $o't$ berührt und ausserdem durch p und q geht. Der Durchschnitt t der eben erwähnten Tangenten ot und $o't$ liegt auf der Geraden pq, denn da sowohl $o(pqo't)$ als auch $o'(pqot)$ harmonische Strahlen bilden, so muss pq von ot und $o't$ in demselben Punkte geschnitten werden.

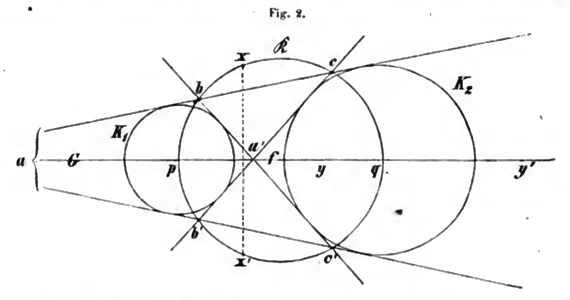
Wenn nun zwei projectivische und perspectivisch liegende Involutionen dadurch entstehen, dass aus zwei festen Punkten o und o' Tangentenpaare an die Kegelschnitte einer Schaar gelegt werden, so giebt es unter diesen Kegelschnitten zwei, K_1 und K_2, welche durch o gehen, und die Tangenten an K_1 und K_2 in o sind die Doppelstrahlen der Involution $[o]$. Dasselbe findet bei o' statt. Tritt nun der Fall ein,

dass o' auf einem jener beiden Kegelschnitte, z. B. auf K_1 liegt, so berührt ein Doppelstrahl aus $[o]$ und einer aus $[o']$ denselben Kegelschnitt, nämlich K_1, die beiden Doppelstrahlen entsprechen also einander. Wenn man daher an die Kegelschnitte einer Schaar aus zwei solchen Punkten o und o', die beide auf demselben der Schaar angehörigen Kegelschnitte K_1 liegen, Tangenten legt, so ist der geometrische Ort ihrer Durchschnitte eine Curve 3ter Ordnung, welche in dem Durchschnitte p der den Kegelschnitt K_1 in o und o' berührenden Tangenten einen Doppelpunkt hat. Tritt ferner der Fall ein, dass die oben erwähnten Kegelschnitte K_1 und K_2 beide durch o' gehen, d. h. dass o' einer der anderen Durchschnittspunkte dieser beiden Kegelschnitte ist, so entsprechen beide Paare von Doppelstrahlen einander. Ist also q der Durchschnitt der den K_2 in o und o' berührenden Tangenten, so besteht die durch die Tangentenpaare erzeugte Curve 3ter Ordnung aus der Geraden pq und einem Kegelschnitte, welcher durch pq geht und ausserdem in o und o' diejenigen Geraden berührt, welche aus o und o' als Tangenten an den die Gerade oo' berührenden Kegelschnitt der Schaar gelegt werden können.

Legt man jetzt die Punkte o und o' in die imaginären Kreispunkte ω und ω', so tritt der erste der erwähnten Fälle ein, sobald das aus den gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar bestehende Vierseit der Art ist, dass sich ihm ein Kreis einbeschreiben lässt. Die Curve 3ter Ordnung erhält dann in dem Mittelpunkte dieses Kreises einen Doppelpunkt. Der zweite Fall aber tritt ein, wenn dem Vierseit noch ein zweiter Kreis einbeschrieben werden kann. Diese beiden Kreise sind dann zwei der Schaar angehörige Kegelschnitte K_1 und K_2, welche beide durch ω und ω' gehen. Die Doppelstrahlen der Involutionen $[\omega]$ und $[\omega']$ sind die imaginären Asymptoten der Kreise K_1 und K_2, ihre Durchschnitte p und q also die Mittelpunkte dieser Kreise. Der Kegelschnitt aber, welcher mit der Geraden pq zusammen die erzeugte Curve 3ter Ordnung bildet, ist ebenfalls ein Kreis, da er auch durch ω und ω' geht. Wenn daher ein Vierseit zweien Kreisen umschrieben ist, so besteht der geometrische Ort der Brennpunkte der diesem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte aus einer Geraden G und einem Kreise $\mathfrak{K}$, welche beide durch die Mittelpunkte p und q der beiden dem Vierseit einbeschriebenen Kreise K_1 und K_2 gehen. Der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ ist wieder der Brennpunkt f der dem Vierseit einbeschriebenen Parabel, da die Asymptoten des $\mathfrak{K}$ zugleich die aus ω und ω' an die Parabel gehenden Tangenten sind, und dieser Punkt f liegt nach dem Früheren auf der Geraden G oder pq, weil ωf und $\omega' f$ die in den Involutionen $[\omega]$ und $[\omega']$ zu $\omega\omega'$ conjugirten Strahlen sind (Fig. 2.). Die Gerade G geht ausserdem durch ein Eckenpaar aa' des Vierseits, der Kreis $\mathfrak{K}$ durch die beiden

anderen Eckenpaare bb' und cc'. Zwei demselben Kegelschnitte der Schaar angehörige Brennpunkte haben als conjugirte Pole der Curve 3ter Ordnung denselben Tangentialpunkt, daher liegen zwei solche Brennpunkte x, x' auf $\mathfrak{K}$ stets so, dass die Tangenten in ihnen sich auf G schneiden, d. h. sie liegen einander in Beziehung auf G symmetrisch

Fig. 2.



gegenüber. Diese Brennpunkte gehören solchen Kegelschnitten an, deren Mittelpunkte auf G zwischen p und q liegen. Für alle übrigen Kegelschnitte der Schaar liegen die Brennpunkte auf G, und da zwei solche y, y' von conjugirten Strahlen der Involutionen $[\omega]$ und $[\omega']$ getroffen werden, so bilden die Punktepaare yy' auf G eine Involution, deren Doppelpunkte p und q sind. Mithin sind je zwei auf G liegende Brennpunkte y, y' einander in Bezug auf p und q harmonisch zugeordnet.

Prag, 22. October 1871.

Ueber Combinanten.

Von PAUL GORDAN in GIESSEN.

In mehreren früheren Abhandlungen (vergl. Crelle's Journal Bd. 69. und Math. Ann. Bd. 2.) habe ich gezeigt, dass die simultanen Invarianten einer Anzahl binärer Formen ein endliches System bilden. Für Formen von mehr als 2 Veränderlichen ist mir ein entsprechender Beweis bisher nicht gelungen (vergl. übrigens bezüglich der ternären cubischen Formen Math. Ann. Bd. 1.).

Es entsteht aber nun die Frage, ob man aus einem solchen Formensysteme einen Theil absondern könne, der für sich ein vollständiges System bildet.

Ein solches Theilsystem lässt sich in der That angeben, wenn die Grundformen selbst alle gleiche Ordnung haben. Es ist das System der *Combinanten*, d. h. das System derjenigen simultanen Invarianten (resp. Covarianten, zugehörigen Formen, Zwischenformen), welche sich, indem man die Grundformen durch lineare Combinationen derselben mit willkürlichen Coefficienten ersetzt, nur um Factoren ändern, welche Functionen dieser Coefficienten allein sind. Ich werde im Folgenden zeigen, dass alle Combinanten simultane Invarianten (resp. Covarianten etc.) der einfachsten unter ihnen sind und daher ein vollständiges System bilden, welches wenigstens für *binäre* Formen endlich ist. Als Beispiel gebe ich die Combinantensysteme für quadratische und cubische binäre Formen an.

Einer der Fundamentalsätze der Invarianten-Theorie ist der von Clebsch im 59. Bande des Crelle'schen Journals gegebene Satz, dass jede simultane Invariante einer Anzahl linearer Formen:

$$a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 \cdots + a_p^{(i)} x_p, \qquad i = 1, 2, \ldots q,$$

(wo $q \geqq p$) eine ganze Function der Determinanten ist, welche aus den Coefficienten der verschiedenen Formen in ihren Combinationen zu p gebildet werden können. Dieser Satz kann auch folgendermassen als Determinantensatz ausgesprochen werden:

Jede homogene rationale Function der p reihigen Determinanten des Systems

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(q)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(q)} \\ & \dots & & \\ a_p^{(1)} & a_p^{(2)} & \dots & a_p^{(q)} \end{matrix} \qquad (q \geq p),$$

welche eine ganze Function ihrer Elemente ist, ist zugleich eine ganze Function dieser Determinanten.

Dieser Satz genügt, um die oben behauptete Eigenschaft der Combinanten herzuleiten. Um dies jedoch auf möglichst einfache Art zeigen zu können, ist es nöthig, die von Clebsch gegebenen Beweismethoden etwas umzuformen und dem vorliegenden Thema anzupassen. Hierzu brauche ich einige Identitäten, welche mit den von mir (Math. Ann. Bd. 3. p. 364) und von Clebsch in seiner Theorie der binären Formen (§ 8.) gegebenen Reihen in engstem Zusammenhange stehen.

§ 1.

Ueber eine Classe ganzer Functionen, welche aus der Entwickelung des Ausdrucks $(x + \lambda \xi)^n (y + \lambda \eta)^m$ entstehen.

Wenn man den Ausdruck

$$U = (x + \lambda \xi)^n (y + \lambda \eta)^m$$

nach dem binomischen Satze nach Potenzen von λ entwickelt, so erhält man die Reihe:

$$U = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=m} \binom{n}{i} \binom{m}{k} x^{n-i} \xi^i y^{m-k} \eta^k \,.\, \lambda^{i+k}.$$

Den Coefficienten von λ^r in dieser Reihe werde ich durch

$$\binom{m+n}{r} \cdot D_r (x^n y^m)$$

bezeichnen, so dass also

$$\text{(I)} \qquad D_r (x^n y^m) = \sum_{i+k=r} \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{r}} x^{n-i} \xi^i y^{m-k} \eta^k.$$

Man erhält dieselbe Function bis auf einen numerischen Coefficienten, wenn man den Ausdruck $x^n y^m$ r Male hintereinander nach x und y differenzirt und die Incremente jedesmal durch ξ und η ersetzt.

Setzt man in der Identität (I) $x = y$, $\xi = \eta$, so findet man einen Ausdruck, der durch $D_r (x^{m+n})$ bezeichnet werden kann, nämlich:

$$D_r (x^{m+n}) = \sum_{i+k=r} \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{r}} x^{m+n-r} \xi^r.$$

Dieser Ausdruck, mit $\binom{m+n}{r}$ multiplicirt, ist der Coefficient von λ^r in der Entwickelung von

$$(x+\lambda\xi)^{m+n};$$

und da in Folge der directen Entwickelung dieser Coefficient gleich

$$\binom{m+n}{r} x^{m+n-r}\xi^r$$

ist, so hat man den bekannten Satz für die Binomialcoefficienten:

$$1 = \sum_{i+k=r} \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{r}},$$

was man hier auch so aussprechen kann:

Die Summe der Coefficienten der Reihe (I) *ist* $=1$.

Die verschiedenen in (I) auftretenden Produkte $x^{n-i}\xi^i y^{m-k}\eta^k$ erhält man aus $x^n y^m$, wenn man verschiedene Factoren x darin durch ξ, verschiedene Factoren y durch η ersetzt, überhaupt aber jedesmal r Factoren ändert. Insofern alle so entstehenden Glieder für x, ξ einerseits und für y, η andererseits stets von derselben Dimension sind, folgt sofort, dass die Differenz irgend zweier durch die Determinante

$$\text{(II)} \qquad D = \begin{vmatrix} x & \xi \\ y & \eta \end{vmatrix}$$

theilbar wird. Aber da die Summe der Coefficienten in (I) $=1$ ist, so folgt, dass auch die Differenz zwischen der Summe $D_r(x^n y^m)$ und irgend einem ihrer Glieder

$$G = x^{n-i}\xi^i y^{m-k}\eta^k$$

durch D theilbar ist. Der Bruch

$$\frac{G - D_r(x^n y^m)}{D}$$

ist also ein Aggregat von Produkten $x^{n-i-1}\xi^i y^{m-k-1}\eta^k$, wo $i+k=r-1$, d. h. von Gliedern G' der Reihe $D_{r-1}(x^{n-1}y^{m-1})$. Nun ist aber wieder ebenso

$$\frac{G' - D_{r-1}(x^{n-1}y^{m-1})}{D}$$

ein Aggregat von Gliedern G'' der Reihe $D_{r-2}(x^{n-2}y^{m-2})$ u. s. w. Führt man so fort, und ersetzt man jedesmal jedes Glied $G^{(k)}$ durch $D_{r-k}(x^{n-k}y^{m-2})$ und das Produkt von D mit Gliedern $G^{(k+1)}$, so gelangt man zu dem Satze:

Jedes Glied $G = x^{n-i}\xi^i y^{m-k}\eta^k$ *lässt sich in eine Reihe von der Form*



$$G = \sum_{h=0}^{h=m} c_h \, D_{r-h}\,(x^{n-h}\, y^{m-h}) \,.\, D^h$$

entwickeln, wo die c_h numerische Coefficienten sind.

Ferner aber zeigt man nun leicht die Richtigkeit des Satzes:

Diese Entwickelung von G ist nur auf eine Weise möglich.

Gäbe es nämlich für G *zwei* Entwickelungen, so müsste ihre Differenz identisch verschwinden, also eine identische Gleichung bestehen:

$$0 = \sum_{k=0}^{k=m} C_k \, D_{r-k}\,(x^{n-k}\, y^{m-k})\, D^k,$$

in welcher nicht alle Coefficienten C identisch verschwänden. Wäre aber μ die kleinste Zahl, für welche $C_\mu \gtrless 0$, so wäre dann

$$0 = \sum_{k=\mu}^{k=m} C_k \, D_{r-n}\,(x^{n-k}\, y^{m-k})\, D^{k-\mu},$$

also, wenn man $x = y$, $\xi = \eta$ setzt, wobei D verschwindet:

$$0 = C_\mu \, D_{r-\mu}\,(x^{m+n-2\mu}),$$

d. h. $C_\mu = 0$, was der Voraussetzung widerspricht.

§ 2.

Darstellung von $x^n \eta^m$ mit Hülfe der Functionen D_r.

Die Coefficienten der speciellen Reihe

$$\text{(III)} \qquad x^n \eta^m = \sum_{h=0}^{h=\mu} c_h^{m,n} \, D_{m-h}\,(x^{n-h}\, y^{m-h})\, D^h,$$

welche aus der oben angegebenen von G für $i = 0$, $k = m$ entsteht, werde ich nun berechnen.

In dieser Reihe ist μ gleich der kleineren der Zahlen m, n zu setzen. Von den Coefficienten c ist der erste leicht zu bestimmen; denn setzt man $y = x$, $\eta = \xi$, so erhält man $D = 0$, also

$$x^n \xi^m = c_0^{m,n} \, D_m\,(x^n\, y^m) = c_0^{m,n}\, x^n \xi^m,$$

also $c_0^{m,n} = 1$. Die übrigen Coefficienten bleiben zu finden.

Zu diesem Zwecke werde ich aus der obigen Gleichung zunächst eine andere von ähnlicher Gestalt ableiten, indem ich dieselbe zuerst nach x und η, sodann nach y und ξ partiell differenzire und die Resultate von einander abziehe. Auf der linken Seite erhält man sofort:

$$n \,.\, m \,.\, x^{n-1}\, \eta^{m-1}.$$

Aus jedem Gliede der Summe rechts aber entstehen 3 Terme, welche einzeln zu untersuchen sind. Man hat:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial D}{\partial x} = \eta, \quad \frac{\partial D}{\partial y} = -\xi, \quad \frac{\partial D}{\partial \xi} = -\eta, \quad \frac{\partial D}{\partial \eta} = x.$$

Wendet man also die gedachte Operation zunächst immer auf den Factor D^h an, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 \cdot D^h}{\partial x\,\partial \eta} - \frac{\partial^2 \cdot D^h}{\partial y\,\partial \xi} = h \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}(D^{h-1}\cdot \eta) + h \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(D^{h-1}\cdot \xi) = h \cdot \overline{h+1} \cdot D^{h-1}.$$

Benutzt man zweitens, indem man die fragliche Operation an einem Gliede der Summe (III) ausführt, immer den ersten Factor, so ergiebt dieser den Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial x\,\partial \eta} - \frac{\partial^2 D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial y\,\partial \xi}.$$

Dieser Ausdruck aber ist bis auf einen Factor $\binom{n+m-2h}{m-h}$ der Coefficient von λ^{m-h} in der Entwickelung von

$$\frac{\partial^2\left[(x+\lambda\xi)^{n-h}(y+\lambda\eta)^{m-h}\right]}{\partial x\,\partial \eta} - \frac{\partial^2\left[(x+\lambda\xi)^{n-h}(y+\lambda\eta)^{m-h}\right]}{\partial y\,\partial \xi},$$

und verschwindet, da diese ganze Entwickelung identisch Null wird.

Es sind also nur noch die Glieder zu betrachten, bei welchen gleichzeitig beide Factoren eines Gliedes der Summe (III) differenzirt werden, also Terme, in welchen $h \,.\, D^{h-1}$ multiplicirt ist mit dem folgenden Ausdrucke, in welchem die Differentialquotienten von D bereits durch ihre Werthe (IV) ersetzt sind:

$$x\frac{\partial\,.\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial x} + \eta\frac{\partial\,.\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial \eta}$$
$$+\,y\frac{\partial\,.\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial y} + \xi\frac{\partial\,.\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})}{\partial \xi}.$$
$$= (n+m-2h)\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h}).$$

Fassen wir nunmehr alles zusammen, so ergiebt sich aus (III) die Formel:

$$n\,.\,m\,x^{n-1}\,\eta^{m-1} = \sum_{h=1}^{h=\mu} c_h^{m,n}\,h\,(n+m-h+1)\,D_{m-h}(x^{n-h}\,y^{m-h})\,D^{h-1}.$$

Die Summe ist von $h=1$ an, statt von $h=0$ genommen, weil der zu $h=0$ gehörige Theil verschwindet. Setzen wir aber $h+1$ an Stelle von h, so ergiebt sich die Formel in einer mit (III) ganz analogen Gestalt:

$$x^{n-1}\,\eta^{m-1} = \sum_{h=0}^{h=\mu-1} c_{h+1}^{m,n}\cdot\frac{(h+1)(n+m-h)}{n\,m}\cdot D_{m-h-1}(x^{n-h-1}\,y^{m-h-1})\,D^h.$$

Nach der Bezeichnungsweise der Formel (III) könnte man aber auch schreiben:

$$x^{n-1}\,\eta^{m-1} = \sum_{h=0}^{h=\mu-1} c_h^{m-1,\,n-1}.\,D_{m-1-h}(x^{n-h-1}\,y^{m-h-1})\,D^h,$$

und durch Vergleichung der Coefficienten ergiebt sich also die Formel:

$$\text{(V)}\qquad c_{h+1}^{m,n} = c_h^{m-1,\,n-1}.\,\frac{n\,m}{\overline{h+1}\,.\,\overline{n+m-h}}.$$

Setzt man nun hierin $h-1$ an Stelle von h, sodann aber für h, m, n der Reihe nach

$$\begin{matrix} h-1, & m-1, & n-1 \\ h-2, & m-2, & n-2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ h-\lambda+1, & m-\lambda+1, & n-\lambda+1 \end{matrix}$$

und multiplicirt die entstandenen Gleichungen, so findet man:

$$c_h^{m,n} = \frac{n\,.\,n-1\ldots n-\lambda+1\,.\,m\,.\,m-1\ldots m-\lambda+1}{h\,.\,h-1\ldots h-\lambda+1\,.\,n+m-h+1\,.\,n+m-h\ldots n+m-h-\lambda+2}\cdot c_{h-\lambda}^{m-\lambda,\,n-\lambda}.$$

Da nun h höchstens gleich der kleinsten der Zahlen m, n werden konnte, so kann man $\lambda = h$ setzen: rechts steht dann $c_0^{m-h,\,n-h}$, welches nach dem im Anfang Bemerkten gleich 1 ist, und es bleibt also:

$$c_h^{m,n} = \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{h}}{\binom{m+n-h+1}{h}},$$

wo wieder $\binom{p}{q}$ den Ausdruck

$$\binom{p}{q} = \frac{p\,.\,p-1\ldots p-q+1}{1\,.\,2\ldots q}$$

bedeutet.

Setzt man diesen Werth von $c_h^{m,n}$ in (III) ein, so erhält man die gesuchte Reihe:

$$\text{(VI)} \qquad x^n \eta^m = \sum_{h=0}^{h=\mu} \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{h}}{\binom{m+n-h+1}{h}} D_{m-h}(x^{n-h} y^{m-h}) D^h.$$

Man verwerthet diese Reihe für symbolische Rechnungen, indem man die Variabeln x, y, ξ, η durch lineare Symbole ersetzt. Bezeichnet man durch r_x einen linearen Ausdruck

$$r_x = r_1 x_1 + r_2 x_2 \cdots + r_p x_p,$$

und setzt nun

$$x = r_x, \quad y = s_x, \quad \xi = r_y, \quad \eta = s_y,$$

so erhält man die Gleichung:

$$r_x^n s_y^m = \sum_{h=0}^{h=\mu} \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{h}}{\binom{m+n-h+1}{h}} D_{m-h}\left(r_x^{n-h} s_x^{m-h}\right)\,.\,(r_x s_y - s_x r_y)^h,$$

in welcher

$$\binom{m+n-2h}{h} D_{m-h}\left(r_x^{n-h} s_x^{m-h}\right)$$

den Coefficienten von λ^{m-h} in dem Ausdrucke

$$(r_x + \lambda r_y)^{n-h}\,.\,(s_x + \lambda s_y)^{m-h}$$

bezeichnet. Für $p = 2$ ist dieses die im 3. Bande dieser Annalen p. 364 von mir gegebene Formel.

§ 3.

Entwickelung der Functionen D_r nach Potenzen von $x\eta$ und $D = x\eta - y\xi$.

In Formel (VI) war das Produkt $x^n \eta^m$ nach den Functionen $D_{m-h}(x^{n-h} y^{m-h})$ entwickelt. Setzen wir nun in dieser Formel für n, m der Reihe nach die Werthepaare

$$n-1,\ m-1;\quad n-2,\ m-2;\ \ldots.$$

bis zu einem Werthepaare, für welche eine der Zahlen verschwindet $(n-\mu,\ m-\mu)$, und multiplicirt die Gleichungen beziehungsweise mit

$$1,\ D,\ D^2 \ldots,$$

so hat man $\mu + 1$ lineare Gleichungen vor sich, aus denen man umgekehrt die Produkte

$$D_m(x^n y^m),\quad D_{m-1}(x^{n-1} y^{m-1}) \,.\, D,\ \ldots\quad D_{m-\mu}(x^{n-\mu} y^{m-\mu}) D^\mu$$

berechnen kann. Alsdann ergiebt sich für $D_m(x^n y^m)$ eine Reihe von der Form:

$$\text{(I)} \qquad D_m(x^n y^m) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} C_\lambda^{m,n} x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda} D^\lambda.$$

Auch diese Entwickelung ist nur auf eine Weise möglich. Gäbe es nämlich für $D_m(x^n y^m)$ 2 verschiedene Reihen dieser Art, so gäbe es eine Relation von der Form:

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} C_\lambda x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda} D^\lambda,$$

in welcher nicht alle Coefficienten verschwänden. Ist ϱ die kleinste Zahl, für welche $C_\varrho \gtrless 0$, so wird unsere Relation:

$$0 = \sum_{\lambda=\varrho}^{\lambda=\mu} C_\lambda x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda} D^{\lambda-\mu},$$

also, wenn man $x = \xi$, $y = \eta$ setzt, wodurch D verschwindet:

$$0 = C_\varrho,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Ganz wie im vorigen §. ergiebt die Annahme $x = \xi$, $y = \eta$ für den ersten Coefficienten der Reihe (I) den Werth

$$C_0^{m,n} = 1.$$

Die übrigen Coefficienten findet man mittelst des dort angewandten Verfahrens. Differenzirt man die Gleichung (I) erst nach x, η, dann nach y, ξ, und zieht die Resultate von einander ab, so findet man:

$$0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} C_\lambda^{m,n} \left\{(n-\lambda)(m-\lambda) D^\lambda x^{n-\lambda-1} \eta^{m-\lambda-1} + \lambda(m+n-\lambda+1) D^{\lambda-1} x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda}\right\}.$$

Wenn man nun bemerkt, dass im zweiten Theile das erste, im ersten Theile das letzte Glied der Summe verschwindet, und man im ersten Theile $\lambda - 1$ für λ setzt, so kann man hierfür schreiben:

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda} D^{\lambda-1} \{(m-\lambda+1)(n-\lambda+1) C_{\lambda-1}^{m,n} + \lambda(m+n-\lambda+1) C_\lambda^{m,n}\}.$$

Daher hat man die Relation:

$$C_\lambda^{m,n} = -\frac{(m-\lambda+1)(n-\lambda+1)}{\lambda(m+n-\lambda+1)} C_{\lambda-1}^{m,n},$$

mithin, wenn man in dieser Formel für λ der Reihe nach $\lambda - 1$, $\lambda - 2, \ldots 1$ setzt und alle Gleichungen multiplicirt:

$$C_\lambda^{m,n} = (-1)^\lambda \frac{\binom{m}{\lambda}\binom{n}{\lambda}}{\binom{m+n}{\lambda}}.$$

Die Reihe (I) nimmt also die Form an:

$$\text{(II)} \qquad D_m(x^n y^m) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} \frac{\binom{m}{\lambda}\binom{n}{\lambda}}{\binom{m+n}{\lambda}} (-1)^\lambda x^{n-\lambda} \eta^{m-\lambda} D^\lambda.$$

§ 4.

Zwischenformen $[\Theta]$, welche durch Anwendung des Prozesses $\delta = \Sigma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$ identisch verschwinden.

Ich gehe nun dazu über, einige viel allgemeinere Formeln abzuleiten, welche die vorigen als specielle Fälle umfassen und welche zahlreiche geometrische Anwendungen gestatten.

Bezeichnen wir durch

$$x_1, x_2 \ldots x_p$$
$$u_1, u_2 \ldots u_p$$

zwei *contragrediente* Reihen von Veränderlichen, d. h. solche, auf die nur lineare Substitutionen angewandt werden sollen, für welche der Ausdruck

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 \cdots + u_p x_p$$

ungeändert bleibt. Eine Form, welche beide Reihen von Variabeln enthält, wird nach Aronhold *Zwischenform* genannt. Ist eine solche Form Θ vom Grade n in den x, vom Grade m in den u, so kann man sie symbolisch durch den Ausdruck

$$\Theta = (\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 \cdots + \varphi_p x_p)^n (u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 \cdots + u_p \psi_p)^m = \varphi_x^n u_\psi^m$$

darstellen, wo die φ, ψ die symbolischen Coefficienten von Θ genannt werden.

Eine solche Zwischenform besitzt unter anderem die folgende Reihe covarianter Zwischenformen:

$$\varphi_\psi \varphi_x^{n-1} u_\psi^{m-1}, \quad \varphi_\psi^2 \varphi_x^{n-2} u_\psi^{m-2} \dots, \quad \varphi_\psi^\mu \varphi_x^{n-\mu} u_\psi^{m-\mu},$$

wo μ wieder die kleinere der Zahlen m, n bedeutet, und φ_ψ den Ausdruck darstellt:

$$\varphi_\psi = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 \dots + \varphi_p \psi_p .$$

Man kann jede dieser Zwischenformen aus der vorhergehenden dadurch ableiten, dass man die Summe ihrer zweiten nach x_i, u_i genommenen Differentialquotienten addirt und durch die Ordnungen in den x und u dividirt. Ich will nun durch δP das Resultat der Operation:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial u_p},$$

angewandt auf irgend eine Form P, bezeichnen. Die obige Reihe von Zwischenformen ist dann:

$$\Theta_1 = \frac{\delta \Theta}{nm}$$

$$\Theta_2 = \frac{\delta \Theta_1}{n-1 \,.\, m-1} = \frac{\delta^2 \Theta}{n \,.\, n-1 \,.\, m \,.\, m-1}$$

$$\Theta_3 = \frac{\delta \Theta_2}{n-2 \,.\, m-2} = \frac{\delta^2 \Theta_1}{n-1 \,.\, n-2 \,.\, m-1 \,.\, m-2} = \frac{\delta^3 \Theta}{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, m \,.\, m-1 \,.\, m-2}$$

. . . .

Der Prozess δ soll nun angewandt werden auf das Produkt $\Theta \,.\, u_x^h$. Man hat dann:

$$\delta \left(\Theta \,.\, u_x^h\right) = u_x^h \,.\, \delta \Theta + \Theta \,.\, \delta u_x^h + \sum_{k=1}^{k=p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \frac{\partial u_x^h}{\partial u_k} + \frac{\partial \Theta}{\partial u_k} \frac{\partial u_x^h}{\partial x_k}\right).$$

Von den Gliedern der rechten Seite ist das erste $mn\Theta_1 \,.\, u_x^h$. Da ferner

$$\delta u_x^h = h \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_x^{h-1} \,.\, x_i\right) = h (p + h - 1) u_x^{h-1},$$

so wird das zweite Glied $h(p + h - 1) \,.\, \Theta \,.\, u_x^{h-1}$. Das dritte endlich wird:

$$h \,.\, u_x^{h-1} \sum_{k=1}^{k=p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_k} x_k + \frac{\partial \Theta}{\partial u_k} u_k\right) = h (m + n) \,.\, \Theta \,.\, u_x^{h-1}.$$

Man hat also, indem man alles zusammenfasst:

(IV) $$\delta \left(\Theta \,.\, u_x^h\right) = mn\Theta_1 \,.\, u_x^h + h (m + n + p + h - 1) \,.\, \Theta \,.\, u_x^{h-1}.$$

Diese Formel führt zu einigen bemerkenswerthen Consequenzen. In Folge derselben *kann man nämlich eine Constantenreihe* $c_1^{m,n}$, $c_2^{m,n} \dots c_k^{m,n}$ *so bestimmen* (*und zwar nur auf eine einzige Weise*), *dass die Anwendung des Prozesses* δ *auf die Combination*

$$\Theta + c_1^{m,n} u_x \Theta_1 + c_2^{m,n} u_x^2 \Theta_2 \cdots + c_\mu^{m,n} u_x^\mu \Theta_\mu$$

identisch Null giebt.

Wendet man den Prozess δ auf diesen Ausdruck an und setzt das Resultat gleich Null, so findet man mit Anwendung der Formel (IV):

$$0 = \sum_{h=0}^{h=\mu} c_h^{m,n} \delta(u_x^h \Theta_h) \qquad (c_0^{m,n} = 1)$$

$$= \sum_{h=0}^{h=\mu} c_h^{m,n} \{(m-h)(n-h)\Theta_{h+1} u_x^h + h(m+n+p-h-1)\Theta_h u_x^{h-1}\},$$

oder, wenn man im ersten Theile der Summe, deren zu $h = \mu$ gehöriges Glied verschwindet, $h - 1$ für h setzt:

$$= \sum_{h=1}^{h=\mu} u_x^{h-1} \Theta_h \{(m-h+1)(n-h+1) c_{h-1}^{m,n} + h(m+n+p-h-1) c_h^{m,n}\}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die eingeklammerten Grössen verschwinden. Denn bezeichnen wir diese etwa durch γ_h, sodass

$$0 = \sum_{h=1}^{h=\mu} u_x^{h-1} \Theta_h \gamma_h,$$

und wäre γ_ϱ der erste dieser Coefficienten, welcher nicht verschwände, so könnte man durch Division mit $u_x^{\varrho-1}$ die Gleichung herstellen:

$$0 = \Theta_\varrho \gamma_\varrho + u_x \Theta_{\varrho+1} \gamma_{\varrho+1} + \cdots$$

Setzt man hierin für die u und x ein solches Werthsystem, für welches u_x, nicht aber Θ_ϱ verschwindet, so bleibt $\gamma_\varrho = 0$, was der Voraussetzung widerspricht.

Man hat also die Gleichungen:

$$c_h^{m,n} = -\frac{(m-h+1)(n-h+1)}{h(m+n+p-h-1)} c_{h-1}^{m,n};$$

und hieraus folgt, indem man für h der Reihe nach $h-1$, $h-2\ldots$ setzt, und alle Gleichungen multiplicirt:

$$c_h^{m,n} = (-1)^h \cdot \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{h}}{\binom{m+n+p-2}{h}}.$$

Der so gebildete Ausdruck, für welchen die Anwendung des Prozesses δ identisch Null giebt, soll fortan durch

$$\text{(V)} \qquad [\Theta] = \Theta + c_1^{m,n} u_x \Theta_1 + c_2^{m,n} u_x^2 \Theta_2 \cdots + c_\mu^{m,n} u_x^\mu \Theta_\mu$$

bezeichnet werden. Durch Eintragung der obigen Werthe der c ergiebt sich:

$$\text{(VI)} \qquad [\Theta] = \sum_{h=0}^{h=\mu} (-1)^h \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{h}}{\binom{m+n+p-2}{h}} \cdot \Theta_h u_x^h.$$

§ 5.

Entwickelung beliebiger Zwischenformen nach Formen [Θ].

Wenn im Vorigen der Ausdruck [Θ], welcher dem Prozess δ unterworfen, Null gab, aus den Potenzen von u_x und den Ausdrücken Θ_h zusammengesetzt wurde, welche vermittelst des Prozesses δ aus Θ hervorgehen, so werde ich jetzt zeigen, wie umgekehrt Θ (und ebenso sämmtliche Θ_h) sich aus Potenzen von u_x und aus den ähnlich wie Θ gebildeten Ausdrücken

$$[\Theta],\quad [\Theta_1],\quad [\Theta_2],\ldots$$

zusammensetzen.

Aus der Formel (VI) des vorigen §. erhält man, indem man sie der Reihe nach auf die Zwischenformen $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \ldots$ anwendet, $\mu + 1$ Gleichungen von der Form:

$$[\Theta_\lambda] = \sum_{h=0}^{h=\mu-\lambda} (-1)^h \frac{\binom{m-\lambda}{h}\binom{n-\lambda}{h}}{\binom{m+n+p-2\lambda-2}{h}} \Theta_{h+\lambda} u_x^h.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit u_x^λ, so stellt sie ein System von Gleichungen 1ten Grades dar, aus welchem man die Grössen

$$\Theta,\quad \Theta_1 u_x,\quad \Theta_2 u_x^2 \ldots,\quad \Theta_\mu u_x^\mu$$

durch

$$[\Theta],\quad [\Theta_1] u_x,\quad [\Theta_2] u_x^2 \ldots,\quad [\Theta_\mu] u_x^\mu$$

linear ausdrücken kann. Es ist nur nöthig, die Entwickelung von Θ aufzustellen; für diese hat man die Form:

$$\text{(I)}\qquad \Theta = \sum_{k=0}^{k=\mu} C_k^{m,n} . [\Theta_k] . u_x^k.$$

Man beweist, wie oben, dass die Reihe eindeutig ist. Ferner erhält man sofort, wenn man ein Werthsystem einführt, für welches u_x verschwindet:

$$\Theta = C_0^{m,n} [\Theta].$$

Aber aus (VI) ist dann zugleich $[\Theta] = \Theta$, also

$$C_0^{m,n} = 1.$$

Um die übrigen Coefficienten zu finden, wendet man auf (I) den Prozess δ an. Da die Anwendung desselben auf $[\Theta_k]$ identisch Null giebt, so bleibt

$$\delta\Theta = n . m . \Theta_1 = \sum_{k=0}^{k=\mu} C_k^{m,n} [\Theta_k] . k(p+k-1) u_x^{k-1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=\mu} C_k^{m,n} . k u_x^{k-1} \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial [\Theta_k]}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial [\Theta_k]}{\partial u_i} x_i \right) \right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=\mu} C_k^{m,n} . k(m+n+p-k-1) [\Theta_k] u_x^{k-1}.$$

Die Summe kann auch von $k=1$ an genommen werden, da ihr erstes Glied verschwindet.

Wendet man hingegen die Formel (I) auf Θ_1 an, so erhält man:

$$\Theta_1 = \sum_{k=0}^{k=\mu-1} C_k^{m-1,\,n-1}\,[\Theta_{k+1}]\,u_x^k,$$

oder, indem man $k-1$ für k setzt:

$$\Theta_1 = \sum_{k=1}^{k=\mu} C_{k-1}^{m-1,\,n-1}\,[\Theta_k]\,u_x^{k-1}.$$

Vergleicht man diese Reihe mit der vorigen, so erhält man zur Bestimmung der C die Recursionsformel:

$$C_k^{m,\,n} = \frac{m\,n}{k(m+n+p-k-1)}\,C_{k-1}^{m-1,\,n-1}.$$

Setzt man hierin für m, n, k der Reihe nach die Systeme

$$\begin{array}{lll} m-1, & n-1, & k-1, \\ m-2, & n-2, & k-2, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ m-\mu, & n-\mu, & k-\mu, \end{array}$$

und bemerkt, dass nach dem Vorigen

$$C_0^{m-\mu,\,n-\mu} = 1,$$

so erhält man durch Multiplication aller Gleichungen:

$$C_k^{m,\,n} = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n+p-k-1}{k}}.$$

Die Reihe (I) wird demnach:

$$\text{(II)} \qquad \Theta = \sum_{k=0}^{k=\mu} \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}}{\binom{m+n+p-k-1}{k}}\,[\Theta_k]\,u_x^k.$$

In dem besonderen Falle, wo Θ den Factor u_x^m enthält, reducirt sich die Reihe rechts auf ihr letztes Glied, und es ist dann

$$\text{(III)} \quad \Theta = \frac{\binom{m}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{m+p-\mu-1}{\mu}}\,\Theta_\mu\,.\,u_x^\mu, \quad \left(\Theta_\mu = \varphi_x^{n-m}\,\varphi_\psi^m \text{ oder } = u_\psi^{m-n}\,\varphi_\psi^n\right).$$

Dieser Fall tritt bei einer Reihe geometrischer Probleme ein, z. B. bei dem Probleme der Doppeltangenten; und die in (III) gegebene Darstellung ist dann von Wichtigkeit, indem es darauf ankommt, überflüssige Factoren u_x aus den symbolischen Produkten auszuscheiden; was hier, wie man sieht, mittelst des Prozesses δ geleistet wird.

§ 6.

Ueber Formen mit p Reihen von p Veränderlichen, welche durch eine möglichst hohe Potenz ihrer Determinante theilbar sind.

Für das Folgende ist ein Satz fundamental, dessen Beweis ich hier geben werde, und welcher folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Es sei F eine Form, welche p Reihen von Veränderlichen enthält

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)} & \ldots & x_p^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)} & \ldots & x_p^{(2)} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p)}, & x_2^{(p)} & \ldots & x_p^{(p)}; \end{matrix}$$

und es sei symbolisch

$$F = \left\{ r_{x^{(1)}}^{(1)} \cdot r_{x^{(2)}}^{(2)} \cdots r_{x^{(p)}}^{(p)} \right\}^\nu \left(r_{x^{(i)}}^{(i)} = r_1^{(i)} x_1^{(i)} + r_2^{(i)} x_2^{(i)} \cdots + r_p^{(i)} x_p^{(i)} \right).$$

Enthält dann F als wirklichen Factor die ν^{te} Potenz der Determinante der x, so ist der symbolische Ausdruck des anderen Factors von F die ν^{te} Potenz der Determinante der r, so dass, wenn X die Determinante der x, R die der r bedeutet:

$$\text{(I)} \qquad F = \frac{R^\nu X^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\binom{\nu+2}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-1}{\nu}}$$

Beweis. Für $p = 1$ ist der Satz selbstverständlich. Ich nehme also an, er sei für $1, 2 \ldots p-1$ bewiesen, und will ihn für die Zahl p erweisen.

Es werden zwei Voraussetzungen gemacht:

1. Die Form

$$F = \left\{ r_{x^{(1)}}^{(1)} \cdot r_{x^{(2)}}^{(2)} \cdots r_{x^{(p)}}^{(p)} \right\}^\nu$$

hat den Factor X^ν, und man kann also setzen:

$$F = X^\nu Q,$$

wo Q die x nicht mehr enthält.

2. Der Satz gilt für $p-1$. Enthält also eine Form von $p-1$ Reihen mit je $p-1$ Variabeln, deren symbolischer Ausdruck

$$\Phi = \left\{ s_{y^{(1)}}^{(1)} \cdot s_{y^{(2)}}^{(2)} \cdots s_{y^{(p-1)}}^{(p-1)} \right\}$$

ist, die y nur in der Combination ihrer Determinante Y, enthält also Φ den Factor Y^ν, so ist

$$\Phi = \frac{S^\nu Y^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-2}{\nu}},$$

wo S die Determinante der symbolischen Coefficienten s bedeutet.

Zu beweisen ist, dass dann auch die Formel (I) besteht.

Nun führe ich statt der ersten $p-1$ Reihen der x $p(p-1)$ neue Veränderliche y ein, welche mit jenen durch die folgenden p Systeme von je $p-1$ linearen Gleichungen mit $(p-1)^2$ willkürlichen Substitutionscoefficienten verbunden sein sollen:

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} x_i^{(1)} &= \lambda_1^{(1)} y_i^{(1)} + \lambda_2^{(1)} y_i^{(2)} \cdots + \lambda_{p-1}^{(1)} y_i^{(p-1)} \\ x_i^{(2)} &= \lambda_1^{(2)} y_i^{(1)} + \lambda_2^{(2)} y_i^{(2)} \cdots + \lambda_{p-1}^{(2)} y_i^{(p-1)} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_i^{(p-1)} &= \lambda_1^{(p-1)} y_i^{(1)} + \lambda_2^{(p-1)} y_i^{(2)} \cdots + \lambda_{p-1}^{(p-1)} y_i^{(p-1)}. \\ &(i = 1, 2 \ldots p). \end{aligned}$$

Die symbolischen Factoren $r^{(k)}_{x^{(k)}}$ von F gehen hierdurch, bis auf den letzten, welcher ungeändert bleibt, in lineare Functionen der λ über, deren Coefficienten lineare Functionen der y sind, und zwar wird

$$\text{(III)}\qquad r^{(k)}_{x^{(k)}} = \lambda_1^{(k)} r^{(k)}_{y^{(1)}} + \lambda_2^{(k)} r^{(k)}_{y^{(2)}} \cdots + \lambda_{p-1}^{(k)} r^{(k)}_{y^{(p-1)}},$$

wo $r^{(k)}_{y^{(h)}}$ den Ausdruck bedeutet:

$$r^{(k)}_{y^{(h)}} = r_1^{(k)} y_1^{(h)} + r_2^{(k)} y_2^{(h)} \cdots + r_p^{(k)} y_p^{(h)}.$$

Die Determinante X der x verwandelt sich nach Einführung der obigen Werthe der ersten $p(p-1)$ Grössen x in das Produkt der Determinante Λ der λ mit der aus den Reihen y und der letzten Reihe der x zusammengesetzten Determinante. Da nun nach Voraussetzung 1. F den Factor X^ν enthalten soll, so enthält es auch den Factor Λ^ν. Aber man kann F jetzt als Function der $(p-1)^2$ Grössen λ ansehen, welche jede der $p-1$ Reihen dieser Grössen homogen und in der ν^{ten} Ordnung enthält. Indem man also die Voraussetzung 2. auf F anwendet, sieht man, dass F die Form haben muss:

$$F = \frac{\Lambda^\nu \,.\, T^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-2}{\nu}}.$$

Dabei ist T die Determinante, welche aus den Coefficienten der symbolischen Darstellung von F zusammengesetzt wird, wenn man bei dieser die λ als die Veränderlichen ansieht. Als solche symbolische Coefficienten kann man die Ausdrücke $r^{(k)}_{y^{(i)}}$ ansehen, welche in der That in den $p-1$ ersten Factoren $r^{(k)}_{x^{(k)}}$ die Coefficienten der λ sind; nur ist dann noch der in Bezug auf die λ constante symbolische Factor $r^{(p)}_{x^{(p)}}$ dem Resultate hinzuzufügen. Es ist also zu setzen:

$$T = r^{(p)}_{x^{(p)}} \,.\, R_y,$$

wo R_y die aus den Coefficienten $r^{(k)}_{y^{(i)}}$ der $p-1$ Ausdrücke (III) ge-

bildete Determinante bedeutet. Multipliciren wir aber R_y mit Λ, so ergiebt sich die Determinante R_x der Ausdrücke:

$$r_{x^{(h)}}^{(k)} = \lambda_1^{(k)} r_{y^{(1)}}^{(h)} + \lambda_2^{(k)} r_{y^{(2)}}^{(h)} \cdots + \lambda_{p-1}^{(k)} r_{y^{(p-1)}}^{(h)}$$
$$(k = 1, 2 \ldots p-1; \quad h = 1, 2 \ldots p-1).$$

Und es ist also:

$$F = \frac{\left(r_{x^{(p)}}^{(p)} R_x\right)^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-2}{\nu}}.$$

Dieser Ausdruck enthält die λ und y, welche der Untersuchung fremd sind, bereits nicht mehr.

Die Elemente der $(p-1)$ reihigen Determinante R_x sind die aus p Summanden bestehenden Ausdrücke:

$$r_{x^{(h)}}^{(k)} = r_1^{(k)} x_1^{(h)} + r_2^{(k)} x_2^{(h)} \cdots + r_p^{(k)} x_p^{(h)}.$$

Daher löst sich R_x in die Summe von p Produkten entsprechender Determinanten auf, welche aus den unvollständigen Systemen

$$\left|\begin{matrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & \ldots r_p^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & \ldots r_p^{(2)} \\ . & . & . \\ r_1^{(p-1)} & r_2^{(p-1)} & \ldots r_p^{(p-1)} \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots x_p^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots x_p^{(2)} \\ . & . & . \\ x_1^{(p-1)} & x_2^{(p-1)} & \ldots x_p^{(p-1)} \end{matrix}\right|$$

zu bilden sind. Nennt man diese Reihen von Determinanten

$$\psi_1, \quad \psi_2 \ldots \psi_p$$

und

$$u_1, \quad u_2 \ldots u_p,$$

so ist:

$$R_x = u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 \cdots + u_p \psi_p,$$

also:

$$F = \frac{\left[r_{x^{(p)}}^{(p)} \cdot (u_1\psi_1 + u_2\psi_2 \cdots + u_p\psi_p)\right]^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-2}{\nu}}.$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als Function der $x^{(p)}$ und der u. Nach Voraussetzung 1. ist F durch

$$X = u_1 x_1^{(p)} + u_2 x_2^{(p)} \cdots + u_p x_p^{(p)}$$

theilbar. Daher können wir die Formel (III) des § 5. anwenden und erhalten sofort:

$$F = \frac{\left(r_1^{(p)} \psi_1 + r_2^{(p)} \psi_2 \cdots\right)^\nu \left(u\ x_1^{(p)} + u_2 x_2^{(p)} \cdots\right)^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-2}{\nu}\binom{\nu+p-1}{\nu}},$$

was die zu erweisende Formel ist.

§ 7.

Invarianten linearer Formen.

Betrachten wir ein System linearer Formen, deren Zahl der Zahl der Variabeln wenigstens gleich kommt:

(I) $$a_1^{(h)} x_1 + a_2^{(h)} x_2 \cdots + a_p^{(h)} x_p = a_x^{(h)}$$
$$(h = 1, 2 \ldots q; \quad q \geqq p).$$

Führen wir statt der x neue Variable z ein durch die Gleichungen:

$$x_i = x_i^{(1)} z_1 + x_i^{(2)} z_2 \cdots + x_i^{(p)} z_p.$$
$$(i = 1, 2 \ldots p).$$

Eine ganze Function J der Coefficienten jener Formen, welche sich, wenn man statt der Variabeln x die z einführt, nur um eine Potenz der Transformationsdeterminante X ändert, ist eine Invariante der Formen.

In Folge der Substitution geht die lineare Form (I) in

$$\Theta_z^{(h)} = a_{x^{(1)}}^{(h)} z_1 + a_{x^{(2)}}^{(h)} z_2 \cdots + a_{x^{(p)}}^{(h)} z_p$$

über; an Stelle eines Coefficienten $a_i^{(h)}$ von x_i tritt also jetzt ein Coefficient $a_{x^{(k)}}^{(h)}$ von z_k.

Betrachten wir nun die aus den $a_k^{(h)}$ und aus irgend welchen Grössen $y_1, y_2 \ldots y_q$ gebildeten linearen Functionen:

$$f_i(y) = a_i^{(1)} y_1 + a_i^{(2)} y_2 + \cdots + a_i^{(q)} y_q.$$

Bilden wir solche Functionen entsprechend aus den transformirten Coefficienten, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$a_{x^{(k)}}^{(1)} y_1 + a_{x^{(k)}}^{(2)} y_2 \cdots + a_{x^{(p)}}^{(q)} y_q = x_1^{(k)} f_1(y) + x_2^{(k)} f_2(y) \cdots + x_p^{(k)} f_p(y).$$

Setzen wir

$$f_{x^{(k)}}(y) = x_1^{(k)} f_1(y) + x_2^{(k)} f_2(y) \cdots + x_p^{(k)} f_p(y),$$

so gehen also durch die lineare Transformation die Ausdrücke $f_i(y)$ in die Ausdrücke $f_{x^{(k)}}(y)$ über.

Der Ausdruck J', welcher aus der Invariante J durch die Substitution hervorgeht, hat der Definition nach den Werth

(II) $$J' = J \,.\, X^\nu,$$

wo ν irgend eine ganze positive Zahl ist. Es ist also J' eine ganze homogene Function ν^{ten} Grades von jeder der Grössenreihen

$$x_1^{(k)}, \quad x_2^{(k)}, \ldots x_p^{(k)}.$$

Aber bei der Bildung von J' tritt eine solche Grössenreihe nur in den Coefficienten $a_{x^{(k)}}^{(h)}$ $(h = 1, 2 \ldots q)$ der transformirten Formen

linear auf; daher ist auch J' in diesen, was dasselbe ist, in den Coefficienten jeder der Formen $f_{x^{(k)}}(y)$ homogen vom ν^{ten} Grade; mithin auch J selbst homogen vom ν^{ten} Grade in den Coefficienten

$$a_i^{(1)}, \quad a_i^{(2)}, \ldots a_i^{(q)}$$

jeder der Functionen $f_i(y)$.

Man kann daher symbolische Coefficienten ξ einführen, so dass J den symbolischen Ausdruck

$$J = [f_1(\xi^{(1)}) f_2(\xi^{(2)}) \ldots f_p(\xi^{(p)}]^\nu$$

annimmt, wo

$$f_i(\xi^{(r)}) = a_i^{(1)} \xi_1^{(r)} + a_i^{(2)} \xi_2^{(r)} \ldots + a_i^{(q)} \xi_q^{(r)},$$

und wo die Zeichen

$$\begin{matrix} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \ldots & \xi_q^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \ldots & \xi_q^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \xi_1^{(p)} & \xi_2^{(p)} & \ldots & \xi_q^{(p)} \end{matrix}$$

Symbole bedeuten, deren Produkte zu $p \,.\, \nu$ Factoren die in J befindlichen, von den $a_i^{(k)}$ unabhängigen Coefficienten darstellen.

§ 8.

Zusammensetzung der Invarianten linearer Formen aus ihren Determinanten.

Invarianten, wie sie im Vorigen betrachtet worden sind, unter anderem die Determinanten, welche aus den Coefficienten von irgend p der linearen Formen $a_x^{(k)}$ zusammengesetzt werden. Ich werde nun umgekehrt beweisen, *dass jede Invariante J eine ganze Function dieser Determinanten ist.*

Nimmt man J in der symbolischen Form des vorigen §.:

$$J = [f_1(\xi^{(1)}) \cdot f_2(\xi^{(2)}) \ldots f_p(\xi^{(p)})]^\nu,$$

und bildet sodann J für die durch die Substitution

$$x_i = x_i^{(1)} z_1 + x_i^{(2)} z_2 \ldots + x_i^{(\varrho)} z_\varrho$$

transformirten Formen, so erhält man nach dem Vorigen:

$$J' = \left[f_{x^{(1)}}(\xi^{(1)}) \cdot f_{x^{(2)}}(\xi^{(2)}) \ldots f_{x^{(p)}}(\xi^{(p)})\right]^\nu = X^\nu \,.\, J.$$

Die Function J' hat also in Bezug auf die $x_i^{(k)}$ die Eigenschaften der Function F des § 6. Wenden wir also die Formel (I) jenes §. auf die Function $J' = X^\nu . J$ an und beseitigen beiderseits den Factor X^ν, so erhalten wir:

$$J = \frac{R^\nu}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-1}{\nu}},$$

wo R die Determinante der symbolischen Coefficienten von J', also die Determinante der Grössen $f_i(\xi^{(k)})$ ist, mit denen in den symbolischen Factoren $f_{x^{(h)}}(\xi^{(k)})$ sich die $x_i^{(h)}$ multiplicirt finden. Da nun aber

$$f_i(\xi^{(k)}) = a_i^{(1)}\xi_1^{(k)} + a_i^{(2)}\xi_2^{(k)} \ldots + a_i^{(q)}\xi_q^{(k)},$$

so geht R in eine Summe von Produkten über, deren Factoren die entsprechend gebildeten Determinanten der beiden unvollständigen Systeme

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \ldots & a_1^{(q)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_2^{(q)} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^{(1)} & a_p^{(2)} & \ldots & a_p^{(q)} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \ldots & \xi_q^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \ldots & \xi_q^{(2)} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(p)} & \xi_2^{(p)} & \ldots & \xi_q^{(p)} \end{vmatrix}$$

sind. Die Determinanten des ersten Systems aber sind die im Eingange bezeichneten Determinanten, und die Darstellung von J als ganze Function von diesen ist also geleistet.

Man kann nun in der folgenden Weise eine Regel ableiten, welche zweckmässiger angewandt wird, um gegebene Invarianten linearer Form durch die aus ihren Coefficienten zusammengesetzten Determinanten auszudrücken. Bezeichnen wir eine aus den Coefficienten derjenigen linearen Formen, deren obere Indices

$$i_1, \; i_2 \ldots i_p$$

sind, gebildete Determinante symbolisch durch das Produkt

$$\alpha_1^{(i_1)}, \; \alpha_2^{(i_2)} \ldots \alpha_p^{(i_p)}.$$

Ein solches symbolisches Produkt bedeutet immer dieselbe Determinante, sobald die Gesammtheit der oberen Indices dieselbe ist, und zwar positiv oder negativ, je nach der Permutationsclasse, welcher die Reihenfolge der Indices $i_1, i_2 \ldots i_p$ angehört. Ein symbolisches Produkt, in welchem zwei gleiche obere Indices vorkommen, bedeutet jederzeit Null.

Alsdann überzeugt man sich leicht, dass die durch R bezeichnete Determinante der Grössen $f_i(\xi^{(k)})$ ersetzt werden kann durch das symbolische Produkt

$$R(\xi) = \varphi_1(\xi^{(1)}) \cdot \varphi_2(\xi^{(2)}) \ldots \varphi_p(\xi^{(p)}),$$

in welchem $\varphi_i(\xi^{(k)})$ den Ausdruck

$$\varphi_i(\xi^{(k)}) = \alpha_1^{(i)}\xi_1^{(k)} + \alpha_2^{(i)}\xi_2^{(k)} \cdots + \alpha_q^{(i)}\xi_q^{(k)}$$

bedeutet. Denn indem man aus diesen Ausdrücken das Produkt $R(\xi)$ bildet, erhält man Produkte der Form:

$$\xi_1^{(i_1)}\,\xi_2^{(i_2)}\,\ldots\,\xi_p^{(i_p)},$$

multiplicirt mit den entsprechenden Produkten der α, also mit der entsprechenden Determinante, positiv oder negativ genommen, je nach Anordnung der oberen Indices, und diese Determinante wird also schliesslich in die entsprechende Determinante der ξ multiplicirt, wie dies bei der Entwickelung von R der Fall ist.

Um nun die in J auftretende Potenz R^ν zu bilden, müssen wir ν symbolische Produkte der φ multipliciren, und die Symbole dabei durch obere Indices unterscheiden. Indem also jedem Factor R ein oberer Index der Formen φ in dem Produkte der $R(\xi)$ zugeordnet wird, ergiebt sich:

$$R^\nu = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=\nu} \varphi_1^{(\varrho)}(\xi^{(1)})\cdot\varphi_2^{(\varrho)}(\xi^{(2)})\,\ldots\,\varphi_p^{(\varrho)}(\xi^{(p)}).$$

Führen wir dies in J ein, so ergiebt sich:

$$J = \frac{\prod\limits_{\varrho=1}^{\varrho=\nu}\prod\limits_{i=1}^{i=p}\varphi_i^{(\varrho)}(\xi^{(i)})}{\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-1}{\nu}}.$$

Vergleichen wir diese Darstellung, in welcher die Produkte der α symbolisch die Determinanten der Coefficienten der linearen Formen, die ξ die von diesen Coefficienten freien Coefficienten der gegebenen Invariante J bedeuten, mit der Darstellung von J, in welcher nur diese letzteren Symbole auftreten:

$$J = [f_1(\xi^{(1)})\cdot f_2(\xi^{(2)})\,\ldots\,f_p(\xi^{(p)})]^\nu,$$

so können wir leicht eine Regel ableiten, vermöge deren J als Function der Determinanten sich darstellen lässt. Denn wenn wir J in der zweiten Form wiederholt (im Ganzen ν mal) nach den Coefficienten

$$a_i^{(1)},\ a_i^{(2)},\ \ldots\ a_i^{(q)}$$

jeder der Coefficientenreihen der f differenziren, und die Incremente immer durch Coefficienten der Formen $\varphi', \varphi'' \ldots$ ersetzen, so erhalten wir endlich:

$$(\nu!)^\nu\cdot\prod_{\varrho=1}^{\varrho=\nu}\prod_{i=1}^{i=p}\varphi_i^{(\varrho)}(\xi^{(i)}).$$

Abgesehen von dem Factor $(\nu!)^\nu$, ist dies genau der Zähler der anderen Darstellung von J, und wir können folgenden Satz aussprechen:

Um die Invariante J durch die Determinanten D der Coefficienten der linearen Formen auszudrücken, differenzire man J ν mal hinter einander nach jeder der Coefficientenreihen

$$a_i^{(1)},\ a_i^{(2)},\ \ldots\ a_i^{(q)},$$

und ersetze die Incremente durch die Coefficienten immer anderer linearer Functionen

$$\varphi_i^{(1)}, \ \varphi_i^{(2)}, \ \dots \ \varphi_i^{(q)}.$$

Ersetzt man sodann die Produkte der Coefficienten von Formen φ *mit gleichem oberen Index durch die entsprechenden Determinanten* D, *so erhält man eine ganze Function der* D, *welche gleich*

$$\binom{\nu}{\nu}\binom{\nu+1}{\nu}\cdots\binom{\nu+p-1}{\nu}\cdot(\nu!)^\nu\cdot J$$

ist.

§ 9.

Die partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten.

Aus der soeben geleisteten Darstellung von J folgt sofort, dass diese Invariante gewissen bekannten partiellen Differentialgleichungen genügt. Jede der Determinanten, als deren ganze Function J dargestellt wurde, verschwindet, wenn man dieselbe nach einer Reihe

$$a_i^{(1)}, \ a_i^{(2)}, \ \dots \ a_i^{(q)}$$

differenzirt und die Differentialquotienten mit den Gliedern einer anderen Reihe

$$a_k^{(1)}, \ a_k^{(2)}, \ \dots \ a_k^{(q)}$$

multiplicirt addirt. Ist also D eine jener Determinanten, so genügt D den $p(p-1)$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial D}{\partial a_i^{(1)}} a_k^{(1)} + \frac{\partial D}{\partial a_i^{(2)}} a_k^{(2)} \cdots + \frac{\partial D}{\partial a_i^{(q)}} a_k^{(q)} = 0 \qquad \left(i \gtrless k\right).$$

Da nun J eine ganze Function der D ist, so genügt J demselben System von Gleichungen, so dass auch

$$\frac{\partial J}{\partial a_i^{(1)}} a_k^{(1)} + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(2)}} a_k^{(2)} \cdots + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(q)}} a_k^{(q)} = 0 \qquad \left(i \gtrless k\right).$$

Da ferner J in den Coefficienten jeder der Formen f, also in den Termen jeder dieser Reihen, vom Grade ν ist, so genügt es noch den p Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial a_i^{(1)}} a_i^{(1)} + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(2)}} a_i^{(2)} \cdots + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(q)}} a_i^{(q)} = \nu J,$$

welche mit ersteren zusammen das bekannte System bilden.

Genügt umgekehrt eine ganze Function der $a_i^{(h)}$ *den* p^2 *Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial J}{\partial a_i^{(1)}} a_k^{(1)} + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(2)}} a_k^{(2)} \cdots + \frac{\partial J}{\partial a_i^{(q)}} a_k^{(q)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \gtrless k, \\ \nu J & \text{für } i = k, \end{cases}$$

so ist J *eine Invariante der* q *linearen Formen*

$$a_1^{(h)} x_1 + a_2^{(h)} x_2 \cdots + a_p^{(h)} x_p \qquad (h = 1, 2 \dots q).$$

Man beweist dies folgendermassen. Nach § 7. gehen in Folge der linearen Substitution

$$x_i = x_i^{(1)} z^{(1)} + x_i^{(2)} z^{(2)} \cdots + x_i^{(p)} z^{(p)}$$

die Coefficienten $a_i^{(h)}$ in Coefficienten $a_{x^{(k)}}^{(h)}$ über. Zugleich möge J in J' übergehen. Dann hat man auch

$$\frac{\partial J'}{\partial \cdot a_{x^{(h)}}^{(1)}} \cdot a_{x^{(k)}}^{(1)} + \frac{\partial J'}{\partial \cdot a_{x^{(h)}}^{(2)}} \cdot a_{x^{(k)}}^{(2)} \cdots = \begin{cases} 0 \text{ für } i \gtrless k \\ \nu J' \text{ für } i = k. \end{cases}$$

Da nun J' die Grössen $x_i^{(h)}$ nur in den Verbindungen $a_{x^{(k)}}^{(h)}$ enthält, so sind diese Gleichungen identisch mit den folgenden:

$$\frac{\partial J'}{\partial x_1^{(h)}} x_1^{(k)} + \frac{\partial J'}{\partial x_2^{(h)}} x_2^{(k)} \cdots + \frac{\partial J'}{\partial x_p^{(h)}} x_p^{(k)} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \gtrless k \\ \nu J' \text{ für } i = k. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind linear für die Differentialquotienten von J'; löst man sie auf, so erhält man

$$X \frac{\partial J'}{\partial x_i^{(h)}} = \nu J' \frac{\partial X}{\partial x_i^{(h)}},$$

wo X die Substitutionsdeterminante; und also, wenn man das Differential von J' in Bezug auf die $x_i^{(h)}$ bildet:

$$X\, dJ' = \nu J'\, dX,$$

oder:

$$J' = X^\nu \,.\, Q,$$

wo Q von den $x_i^{(h)}$ unabhängig ist.

Betrachtet man nun die specielle Substitution, in welcher die x mit gleichen Indices 1, die übrigen 0 sind, so wird

$$a_{x^{(k)}}^{(h)} = a_k^{(h)}, \quad J' = J, \quad X = 1,$$

also:

$$Q = J;$$

mithin:

$$J' = X^\nu \,.\, J,$$

also J eine Invariante, wie zu beweisen.

§ 10.

Combinanten.

Die Eigenschaften der Combinanten, welche den Gegenstand dieses Aufsatzes bilden, ergeben sich nunmehr aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres.

Es seien $f_1, f_2 \ldots f_p$ irgend p homogene Functionen n^{ten} Grades der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_r$. Eine solche Function f_i besitzt im Allgemeinen

$$\binom{n+r-1}{n} = q$$

Glieder; die Coefficienten derselben will ich durch

$$a_i^{(1)},\ a_i^{(2)},\ \ldots\ a_i^{(q)}$$

bezeichnen.

Unter den simultanen Invarianten (Covarianten, Zwischenformen etc.) der Formen f_i werden diejenigen als *Combinanten* bezeichnet, welche, wenn man statt der f_i die linearen Combinationen derselben

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1^{(1)} f_1 + x_2^{(1)} f_2 \cdots + x_p^{(1)} f_p \\ F_2 &= x_1^{(2)} f_1 + x_2^{(2)} f_2 \cdots + x_p^{(2)} f_p \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_p &= x_1^{(p)} f_1 + x_2^{(p)} f_2 \cdots + x_p^{(p)} f_p \end{aligned}$$

als Grundformen einführt, sich nur um einen Factor ändert, der eine Potenz der Determinante X der x ist.

Es sind also die Combinanten der Formen $f_1, f_2 \ldots f_p$ zugleich Invarianten der linearen Formen

$$a_1^{(h)} X_1 + a_2^{(h)} X_2 \cdots + a_p^{(h)} X_p \quad (h = 1, 2 \ldots q);$$

und umgekehrt, ist eine simultane Invariante (Covariante etc.) der Formen f gleichzeitig eine simultane Invariante dieser q linearen Formen, so ist sie eine Combinante.

Differenzirt man demnach eine Combinante J partiell nach den Coefficienten irgend einer der Formen f_i, und addirt die Differentialquotienten, multiplicirt mit den entsprechenden Coefficienten einer anderen der Formen, f_k, so erhält man den Werth 0.

Hat umgekehrt eine simultane Invariante (Covariante etc.) der f die Eigenschaft, dass dieser Prozess immer auf Null führt, so ist J eine Combinante der Formen f.

Ich werde nun zeigen, *dass jede Combinante J der Formen $f_1, f_2 \ldots f_p$ eine Invariante (Covariante etc.) der Form*

$$R(y) = \begin{vmatrix} f_1(y^{(1)}) & f_1(y^{(2)}) & \ldots & f_1(y^{(p)}) \\ f_2(y^{(1)}) & f_2(y^{(2)}) & \ldots & f_2(y^{(p)}) \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \\ f_p(y^{(1)}) & f_p(y^{(2)}) & \ldots & f_p(y^{(p)}) \end{vmatrix}$$

ist, in welcher die Grössen

$$f_i(y^{(1)}),\quad f_i(y^{(2)}) \ldots f_i(y^{(p)})$$

die Function f_i bedeuten, beziehungsweise geschrieben mit einer der folgenden p Reihen von Variabeln:

$$\begin{array}{c} y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots\ y_r^{(1)} \\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots\ y_r^{(2)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_1^{(p)},\ y_2^{(p)},\ \ldots\ y_r^{(p)}. \end{array}$$

Denken wir uns nämlich in den Functionen f statt der Produkte und Potenzen der y, einschliesslich der mit ihnen verbundenen Polynomialcoefficienten, je q Variable ξ gesetzt, von denen die f dann linear abhängen, so dass

$$f_i(y^{(k)}) = a_i^{(1)}\,\xi_1^{(k)} + a_i^{(2)}\,\xi_2^{(k)} \cdots + a_i^{(q)}\,\xi_q^{(k)}.$$

Die Form $R(y)$ geht dann genau in die in § 7. durch $R(\xi)$ bezeichnete Form über. Dort aber war bewiesen, dass eine Invariante J der linearen Formen

$$a_1^{(h)}\,X_1 + a_2^{(h)}\,X_2 \cdots + a_p^{(h)}\,X_p$$

erhalten wird (bis auf einen Zahlenfactor), indem man ihren Ausdruck nach den Coefficientenreihen

$$a_i^{(1)},\ a_i^{(2)},\ \ldots\ a_i^{(q)},$$

also nach den Coefficientenreihen der f differenzirt und statt der Incremente die Coefficienten der symbolischen Darstellung von $R(\xi)$:

$$R(\xi) = \varphi_1(\xi^{(1)}) \cdot \varphi_2(\xi^{(2)}) \ \ldots\ \varphi_p(\xi^{(p)})$$

einführt. Das Endresultat enthält also nur Coefficienten von $R(\xi)$, oder, was dasselbe ist, von $R(y)$, da der in $R(y)$ anzustellende Uebergang von den y zu den ξ und zurück ein vollkommen eindeutiger ist, und ist somit eine Invariante (Covariante etc.) von $R(y)$, was zu beweisen war.

§ 11.

Combinanten binärer Formen.

Ich werde diese Betrachtungen nun auf die einfachsten Fälle der *binären* Formen anwenden.

Es ist bewiesen, dass die Invarianten und Covarianten einer binären Form mit beliebig vielen Reihen von Variabeln immer auf die eines simultanen Systems zurückgeführt werden können, welches nur *eine* Reihe von Variabeln enthält; sodann dass ein solches System immer ein endliches vollständiges System von Invarianten und Covarianten besitzt (vergl. diese Annalen Bd. 3. S. 365). Wenn also nach dem Vorigen die Combinanten eines Systems binärer Formen immer die Invarianten und Covarianten einer Form R mit mehreren Reihen von Variabeln sind, so folgt sofort der im Eingange erwähnte Satz:

Die Combinanten eines Systems binärer Formen sind ganze Functionen eines endlichen vollständigen Systems von Combinanten.

Dieses System will ich nun für einige Fälle angeben.

Die Combinanten *zweier binären Formen* f und φ sind die Invarianten und Covarianten der Form

$$R = f(x)\,\varphi(y) - f(y)\,\varphi(x),$$

also (vergl. diese Annalen Bd. 3. S. 365) ihrer Elementarcovarianten

$$(f, \varphi);\quad (f, \varphi)^3;\quad (f, \varphi)^5 \ldots$$

Sind f und φ *quadratisch*, so sind ihre Combinanten die Covarianten und Invarianten ihrer Functionaldeterminante

$$\vartheta = (f, \varphi),$$

also ganze Functionen der Formen:

$$\vartheta \text{ und } (\vartheta, \vartheta)^2.$$

Sind f und φ *cubisch*, so sind ihre Combinanten die Covarianten und Invarianten der beiden Formen

$$\vartheta = (f, \varphi) \quad \text{und} \quad (f, \varphi)^3,$$

also ganze Functionen der Formen:

$$(f, \varphi)^3;\ \vartheta;\ \Delta = (\vartheta, \vartheta)^2;\ (\vartheta, \vartheta)^1;\ (\Delta, \vartheta);\ (\Delta, \vartheta)^4.$$

Die Combinanten von *drei binären Formen* f, φ, ψ sind die Invarianten und Covarianten der Form

$$R = \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ \varphi(x) & \varphi(y) & \varphi(z) \\ \psi(x) & \psi(y) & \psi(z) \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir nun f, φ, ψ symbolisch durch

$$f(x) = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n$$
$$\varphi(x) = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^n = b_x^n$$
$$\psi(x) = (c_1 x_1 + c_2 x_2)^n = c_x^n,$$

so wird R die Summe der Produkte entsprechender Determinanten aus den beiden unvollständigen Systemen:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} a_2 & a_1^{n-2} a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ b_1^n & b_1^{n-1} b_2 & b_1^{n-2} b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ c_1^n & c_1^{n-1} c_2 & c_1^{n-2} c_2^2 & \ldots & c_2^n \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} x_1^n & \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 & \binom{n}{2} x_1^{n-2} x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ y_1^n & \binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2 & \binom{n}{2} y_1^{n-2} y_2^2 & \ldots & y_2^n \\ z_1^n & \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 & \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 & \ldots & z_2^n \end{vmatrix}.$$

Es sind aber die aus dem letzten Systeme entstehenden Determinanten durch $(xy)\,(yz)\,(zx)$ theilbar. Man hat daher

$$R = (xy)\,(yz)\,(zx)\,.\,R',$$

und die gesuchten Combinanten sind also Invarianten etc. von R'.

Die Form R' enthält nur 3 Reihen von Variabeln, aber ihre Bildung ist nicht so einfach, wie die einer anderen Form, welche man an Stelle derselben benutzen kann und welche ich jetzt bilden werde. Diese enthält eine grössere Anzahl Reihen von Variabeln; aber ihr symbolischer Ausdruck ist ausserordentlich einfach und übersichtlich.

Ich denke mir ausser den 3 Formen $f,\ \varphi,\ \psi$ noch $n-2$ andere Formen $\sigma^{(i)}$ n^{ten} Grades, welche mit den Variabeln t geschrieben, aus den Produkten der linearen Factoren $(xt)\,(yt)\,(zt)$ mit den $(n-3)^{\text{ten}}$ Potenzen linearer Formen

$$p_t^{(1)},\ p_t^{(2)}\ \ldots\ p_t^{(n-2)}$$

bestehen mögen; und bezeichne diese Formen n^{ten} Grades symbolisch durch $(s_t^{(1)})^n$, $(s_t^{(2)})^n$ etc., so dass

$$\sigma^{(i)} = (s_t^{(i)})^n = (xt)\,(yt)\,(zt)\,.\,(p_t^{(i)})^{n-3}.$$

Ich betrachte nun eine Determinante S, gebildet aus den $(n+1)^2$ Werthen, welche die Functionen

$$f,\ \varphi,\ \psi,\ \sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)},\ \ldots\ \sigma^{(n-2)}$$

annehmen, wenn man in ihnen die Veränderlichen der Reihe nach durch die Veränderlichen

$$x,\ y,\ z,\ t^{(1)},\ t^{(2)},\ \ldots\ t^{(n-2)}$$

ersetzt, von denen die letzteren ganz beliebig sind. Diese Determinante S kann man nun auf zwei verschiedene Arten in Factoren zerlegen. Erstens kann man von dem Umstande Gebrauch machen, dass die Functionen σ für die Werthsysteme $x,\ y,\ z$ verschwinden. Da hierdurch in 3 Reihen der Determinante S alle Elemente verschwinden, bis auf diejenigen, welche in R vorkommen, so zerfällt S in R und die Determinante der Werthe, welche die Functionen $\sigma^{(i)}$ für die Variabeln $t^{(k)}$ annehmen. In letzterer enthält aber jede Reihe ein Produkt

$$(xt^{(k)})\,(yt^{(k)})\,(zt^{(k)}),$$

und indem man diese Produkte absondert, bleibt die Determinante der $(n-3)^2$ Ausdrücke

$$(p_1^{(i)}t_1^{(k)} + p_2^{(i)}t_2^{(k)})^{n-3}$$

übrig, d. h. abgesehen von einem Zahlenfactor μ das Produkt der Grössen $p_1^{(i)}p_2^{(h)} - p_2^{(i)}p_1^{(h)}$, multiplicirt mit dem Produkte der Grössen $t_1^{(k)}t_2^{(h)} - t_1^{(h)}t_2^{(k)}$. Bezeichnet man ersteres durch P, letzteres durch T, und bezeichnet man ferner durch $X,\ Y,\ Z$ die Ausdrücke

$$X = (xt^{(1)})\,(xt^{(2)})\,\ldots\,(xt^{(n-3)})$$
$$Y = (yt^{(1)})\,(yt^{(2)})\,\ldots\,(yt^{(n-3)})$$
$$Z = (zt^{(1)})\,(zt^{(2)})\,\ldots\,(zt^{(n-3)}),$$

so ist:

(I) $$S = \mu R P T \,.\, X Y Z.$$

Für μ findet man leicht den Werth

$$\mu = \binom{n-3}{1}\binom{n-3}{2}\cdots\binom{n-3}{n-3}.$$

Die Formel (I) giebt die erste Darstellung von S. Man kann aber zweitens die ursprüngliche Form von S direct zerlegen, und zwar in ähnlicher Weise wie die Determinante der $(p_i)^{n-3}$. Es wird dann S gleich der Determinante der Grössen

$$\begin{matrix} a_1^n & a_1^{n-1}\,.\,a_2 & \ldots & a_2^n \\ b_1^n & b_1^{n-1}\,.\,b_2 & \ldots & b_2^n \\ c_1^n & c_1^{n-1}\,.\,c_2 & \ldots & c_2^n \\ s_1^{(1)^n} & s_1^{(1)^{n-1}}\,.\,s_2^{(1)} & \ldots & s_2^{(1)^n} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \end{matrix}$$

multiplicirt mit der Determinante der Grössen

$$\begin{matrix} x_1^n & x_1^{n-1}\,.\,x_2 & \ldots & x_2^n \\ y_1^n & y_1^{n-1}\,.\,y_2 & \ldots & y_2^n \\ z_1^n & z_1^{n-1}\,.\,z_2 & \ldots & z_2^n \\ t_1^{(1)^n} & t_1^{(1)^{n-1}}\,.\,t_2^{(1)} & \ldots & t_2^{(1)^n} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \end{matrix}$$

und mit dem Produkte der Binomialcoefficienten:

$$\nu = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}.$$

Die erste Determinante ist das Produkt $(ab)\,(bc)\,(ca)$, multiplicirt mit den Produkten der Ausdrücke

$$(as^{(i)}),\quad (bs^{(i)}),\quad (cs^{(i)}),$$

welches durch M bezeichnet werden möge, und mit dem Produkte Σ der Ausdrücke $(s^{(i)}s^{(k)})$; die zweite ist

$$(xy)\,(yz)\,(zx)\,.\,XYZT.$$

Man hat also zweitens:

(II) $$S = \nu\,.\,(xy)\,(yz)\,(zx)\,.\,XYZT\,M\Sigma\,.\,(ab)\,(bc)\,(ca).$$

Vergleicht man beide Ausdrücke von S, so sieht man, dass $X\,.\,Y\,.\,Z\,.\,T$ sich forthebt, und ebenso das Produkt $(xy)\,(yz)\,(zx)$, wenn man nur R durch R' ausdrückt. Es bleibt also die Gleichung:

$$R'.\, P = \frac{\nu}{\mu} \cdot \Sigma \cdot (ab)\,(bc)\,(ca) \cdot M.$$

Um nun noch das Produkt P zu beseitigen, muss man in M und Σ für die Symbole s ihre wirklichen Werthe einführen. Für den Zweck der Untersuchung aber genügt die Bemerkung, dass in R' hiernach die Coefficienten der f, φ, ψ nur insofern vorkommen können, als sie aus dem symbolischen Produkte

$$(ab)\,(bc)\,(ca)\,.\, M = (ab)\,(bc)\,(ca) \prod_{i=1}^{i=n-2} (as^{(i)})\,(bs^{(i)})\,(cs^{(i)})$$

hervorgehen, d. h. soweit sie in der Form

(III) $$Q = (ab)\,(bc)\,(ca) \prod_{i=1}^{i=n-2} a_{t^{(i)}}\, b_{t^{(i)}}\, c_{t^{(i)}}$$

vorkommen. Alle Combinanten von f, φ, ψ sind auch Invarianten etc. der Form Q; während es umgekehrt evident ist, dass Q selbst, also auch alle aus Q abgeleiteten Formen, Combinanten sind. Denn es ist Q nichts anderes, als die Determinante, welche man aus den 9 Elementen

$$f_{ik} = a_i\, a_k\, a_{t^{(1)}}\, a_{t^{(2)}} \ldots,$$

$$\varphi_{ik} = b_i\, b_k\, b_{t^{(1)}}\, b_{t^{(2)}} \ldots,$$

$$\psi_{ik} = c_i\, c_k\, c_{t^{(1)}}\, c_{t^{(2)}} \ldots$$

bildet, so dass

$$Q = -\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix},$$

wo es denn evident ist, dass dieser Ausdruck, wenn f, φ, ψ durch lineare Combinationen derselben ersetzt werden, sich nur um die Determinante der Combinationscoefficienten ändert.

Man kann also mit Nutzen an Stelle von R' die einfachere Bildung Q zu Grunde legen, obwohl dieselbe $n-2$ Reihen von Veränderlichen statt nur dreier enthält, und den Satz aussprechen:

Alle Combinanten dreier binärer Formen f, φ, ψ sind Invarianten etc. von Q.

Wenden wir dies auf die einfachsten Fälle an. Sind f, φ, ψ *quadratisch*, so ist Q die Invariante

$$Q = (ab)\,(bc)\,(ca),$$

und damit die einzige existirende Combinante.

Sind f, φ, ψ *cubisch*, so wird

$$Q = (ab)\,(bc)\,(ca)\, a_x\, b_x\, c_x$$

eine cubische Form. Die Combinanten sind also sämmtlich ganze Functionen der Formen

$$Q, \quad (QQ)^2 = \tau, \quad (Q, \tau), \quad (\tau, \tau)^2.$$

Vier quadratische Formen besitzen keine Combinante mehr, ebenso wenig mehr als 4 quadratische Formen.

Die einzige Combinante, welche *vier cubische Formen* besitzen, ist die Determinante ihrer Coefficienten; mehr als 4 cubische Formen besitzen keine Combinante mehr.

Giessen, October 1871.

Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

Von G. Cantor in Halle a. S.

Im Folgenden werde ich eine gewisse Ausdehnung des Satzes, dass die trigonometrischen Reihendarstellungen eindeutig sind, mittheilen.

Dass zwei trigonometrische Reihen:

$\frac{1}{2} b_0 + \Sigma (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ und $\frac{1}{2} b_0' + \Sigma (a_n' \sin nx + b_n' \cos nx)$, welche für jeden Werth von x convergiren und dieselbe Summe haben, in ihren Coefficienten übereinstimmen, habe ich im „Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 72. S. 139" nachzuweisen versucht; in einer auf diese Arbeit sich beziehenden Notiz habe ich a. a. O. ferner gezeigt, dass dieser Satz auch erhalten bleibt, wenn man für eine endliche Anzahl von Werthen des x entweder die Convergenz oder die Uebereinstimmung der Reihensummen aufgiebt.

Die *hier* beabsichtigte Ausdehnung besteht darin, dass für eine *unendliche* Anzahl von Werthen des x im Intervalle $(0 \ldots (2\pi))$ auf die Convergenz oder auf die Uebereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne dass die Gültigkeit des Satzes aufhört.

Zu dem Ende bin ich aber genöthigt, wenn auch zum grössten Theile nur andeutungsweise, Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind; dabei werde ich zu gewissen Definitionen hingeleitet, welche hier nur zum Behufe einer möglichst gedrängten Darstellung des beabsichtigten Satzes, dessen Beweis im § 3. gegeben wird, aufgestellt werden.

§ 1.

Die rationalen Zahlen bilden die Grundlage für die Feststellung des weiteren Begriffes einer Zahlengrösse; ich will sie das Gebiet A nennen (mit Einschluss der Null).

Wenn ich von einer Zahlengrösse im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, dass eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen:

(1) $$a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_n, \; \ldots\ldots$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, dass die Differenz $a_{n+m} - a_n$

mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit anderen Worten, dass bei beliebig angenommenem (positiven, rationalen) ε eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so dass $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, wenn $n \gtrless n_1$ und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „*Die Reihe* (1) *hat eine bestimmte Grenze b.*"

Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn, als den eines Ausdruckes für jene Beschaffenheit der Reihe, und aus dem Umstande, dass wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen b verbinden, folgt, dass bei verschiedenen derartigen Reihen auch verschiedene Zeichen $b, b', b'', \ldots$ zu bilden sind.

Ist eine zweite Reihe:

(1′) $$a_1', \; a_2', \; \ldots \; a_n', \; \ldots\ldots$$

gegeben, welche eine bestimmte Grenze b' hat, so findet man, dass die beiden Reihen (1) und (1′) eine von den folgenden 3 Beziehungen stets haben, die sich gegenseitig ausschliessen: Entweder 1. wird $a_n - a_n'$ unendlich klein mit wachsendem n oder 2. $a_n - a_n'$ bleibt von einem gewissen n an stets grösser, als eine positive (rationale) Grösse ε oder 3. $a_n - a_n'$ bleibt von einem gewissen n an stets kleiner, als eine negative (rationale) Grösse $-\varepsilon$.

Wenn die erste Beziehung stattfindet, setze ich:

$$b = b',$$

bei der zweiten $b > b'$, bei der dritten $b < b'$.

Ebenso findet man, dass eine Reihe (1), welche eine Grenze b hat, zu einer rationalen Zahl a nur eine von den folgenden 3 Beziehungen hat. Entweder:

1. wird $a_n - a$ unendlich klein mit wachsendem n, oder 2. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen n an immer grösser, als eine positive (rationale) Grösse ε oder 3. $a_n - a$ bleibt von einem gewissen n an immer kleiner, als eine negative (rationale) Grösse $-\varepsilon$.

Um das Bestehen dieser Beziehungen auszudrücken, setzen wir resp.:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergiebt sich als *Folge*, dass, wenn b die Grenze der Reihe (1) ist, alsdann $b - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, womit *nebenbei* die Bezeichnung „Grenze der Reihe (1)" für b eine gewisse Rechtfertigung findet.

Die Gesammtheit der Zahlengrössen b möge durch B bezeichnet werden.

Mittelst obiger Festsetzungen lassen sich die Elementaroperationen, welche mit rationalen Zahlen vorgenommen werden, ausdehnen auf die beiden Gebiete A und B zusammengenommen.

Sind nämlich b, b', b'' drei Zahlengrössen aus B, so dienen die Formeln:

$$b \pm b' = b'', \quad b b' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

als Ausdruck dafür, dass zwischen den den Zahlen b, b', b'' entsprechenden Reihen:

$$a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots$$
$$a_1', \; a_2', \; \ldots\ldots$$
$$a_1'', \; a_2'', \; \ldots\ldots$$

resp. die Beziehungen bestehen:

$$\lim\,(a_n \pm a_n' - a_n'') = 0, \qquad \lim\,(a_n\,a_n' - a_n'') = 0,$$
$$\lim\left(\frac{a_n}{a_n'} - a_n''\right) = 0,$$

wo ich auf die Bedeutung des Lim-Zeichens nach dem Vorhergehenden nicht näher einzugehen brauche. Aehnliche Definitionen werden für die Fälle aufgestellt, dass von den drei Zahlen eine oder zwei dem Gebiete A angehören.

Allgemein wird sich daraus jede mittelst einer endlichen Anzahl von Elementaroperationen gebildete Gleichung:

$$F\,(b, \; b', \; \ldots \; b^{(\varrho)}) = 0$$

als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung ergeben, welche unter den Reihen stattfindet, durch welche die Zahlengrössen b, b', b'', ... $b^{(\varrho)}$ gegeben sind.*)

Das Gebiet B ergab sich aus dem Gebiete A; es erzeugt nun in analoger Weise in Gemeinschaft mit dem Gebiete A ein neues Gebiet C.

Liegt nämlich eine unendliche Reihe:

$$(2) \qquad b_1, \; b_2, \; \ldots \; b_n, \; \ldots\ldots$$

von Zahlengrössen aus den Gebieten A und B vor, welche nicht sämmtlich dem Gebiete A angehören, und hat diese Reihe die Beschaffenheit, dass $b_{n+m} - b_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch m sei, eine Beschaffenheit, die nach den vorangegangenen Definitionen begrifflich etwas ganz Bestimmtes ist, so sage ich von dieser Reihe aus, dass sie eine bestimmte Grenze c hat.

---

*) Wenn z. B. eine Gleichung μ^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten: $f(x) = 0$, eine reelle Wurzel ω besitzt, so heisst dies im Allgemeinen *nichts anderes*, als dass eine Reihe:

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots$$

von der Beschaffenheit der Reihe (1) vorliegt, für deren Grenze das Zeichen ω gewählt ist, welche ausserdem die Eigenschaft hat:

$$\lim f\,(a_n) = 0.$$

Die Zahlengrössen c constituiren das Gebiet C.

Die Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins, sowie der Elementaroperationen sowohl unter den Grössen c, wie auch zwischen ihnen und den Grössen der Gebiete B und A werden dem Früheren analog gegeben.

Während sich nun die Gebiete B und A so zu einander verhalten, dass zwar jedes a einem b, nicht aber umgekehrt jedes b einem a gleichgesetzt werden können, stellt es sich hier heraus, dass sowohl jedes b einem c, wie auch umgekehrt jedes c einem b gleich gesetzt werden können.

Obgleich hierdurch die Gebiete B und C sich gewissermassen gegenseitig decken, ist es bei der hier dargelegten Theorie (in welcher die Zahlengrösse, zunächst an sich im Allgemeinen gegenstandlos, nur als Bestandtheil von Sätzen erscheint, welchen Gegenständlichkeit zukommt, des Satzes z. B., dass die entsprechende Reihe die Zahlengrösse zur Grenze hat) wesentlich, an dem begrifflichen Unterschiede der beiden Gebiete B und C festzuhalten, indem ja schon die Gleichsetzung zweier Zahlengrössen b, b' aus B ihre Identität nicht einschliesst, sondern nur eine bestimmte Relation ausdrückt, welche zwischen den Reihen stattfindet, auf welche sie sich beziehen.

Aus dem Gebiete C und den vorhergehenden geht analog ein Gebiet D, aus diesen ein E hervor u. s. f.; durch λ solcher Uebergänge (wenn ich den Uebergang von A zu B als den ersten ansehe) gelangt man zu einem Gebiete L von Zahlengrössen. Dasselbe verhält sich, wenn man die Kette der Definitionen für Gleich-, Grösser- und Kleinersein und für die Elementaroperationen von Gebiet zu Gebiet vollzogen denkt, zu den vorhergehenden, mit Ausschluss von A, so, dass eine Zahlengrösse l stets gleich gesetzt werden kann einer Zahlengrösse k, i, .. c, b, und umgekehrt.

Auf die Form solcher Gleichsetzungen lassen sich die Resultate der Analysis (abgesehen von wenigen bekannten Fällen) zurückführen, obgleich (was hier nur mit Rücksicht auf jene Ausnahmen berührt sein mag) der Zahlenbegriff, soweit er hier entwickelt ist, den Keim zu einer in sich nothwendigen und absolut unendlichen Erweiterung in sich trägt.

Es scheint sachgemäss, wenn eine Zahlengrösse im Gebiete L gegeben ist, sich des Ausdruckes zu bedienen: *sie ist als Zahlengrösse, Werth oder Grenze* λ^{ter} *Art gegeben*, woraus ersichtlich ist, dass ich mich der Worte *Zahlengrösse*, *Werth* und *Grenze* im Allgemeinen in gleicher Bedeutung bediene.

Eine mittelst einer endlichen Anzahl von Elementaroperationen aus Zahlen $l, l', \ldots l^{(\varrho)}$ gebildete Gleichung $F(l, l', \ldots l^{(\varrho)}) = 0$ erscheint bei der hier angedeuteten Theorie genau genommen als der Ausdruck für eine bestimmte Beziehung zwischen $\varrho + 1$, *im Allge-*

meinen λfach unendlichen Reihen rationaler Zahlen; es sind dies die Reihen, welche aus den einfach unendlichen, auf die sich die Grössen $l, l', \ldots\ldots l^{(\varrho)}$ zunächst beziehen, hervorgehen, indem man in ihnen die Elemente durch ihre entsprechenden Reihen ersetzt, die entstehenden im Allgemeinen zweifach unendlichen Reihen ebenso behandelt und diesen Prozess so lange fortführt, bis man nur rationale Zahlen vor sich sieht.

Es sei mir vorbehalten auf alle diese Verhältnisse bei einer andern Gelegenheit ausführlicher zurückzukommen. *Wie* die in diesem § auftretenden Festsetzungen und Operationen mit Nutzen der Infinitesimalanalysis dienen können, darauf einzugehen ist hier gleichfalls nicht der Ort. Auch das Folgende, wo der Zusammenhang der Zahlengrössen mit der Geometrie der geraden Linie dargelegt wird, beschränkt sich fast nur auf die nothwendigen Sätze, aus welchen, wenn ich nicht irre, das Uebrige mittels rein logischer Beweisführung abgeleitet werden kann. Zum Vergleiche mit § 1. und § 2. sei das 10. Buch der „Elemente des Euklides“ erwähnt, welches für den darin behandelten Gegenstand massgebend bleibt.

§ 2.

Die Punkte einer geraden Linie werden dadurch begrifflich bestimmt, dass man, unter Zugrundelegung einer Masseinheit, ihre Entfernungen, Abscissen, von einem festen Punkte o der geraden Linie mit dem $+$ oder $-$ Zeichen angiebt, jenachdem der betreffende Punkt in dem (vorher fixirten) positiven oder negativen Theile der Linie von o aus liegt.

Hat diese Entfernung zur Masseinheit ein rationales Verhältniss, so wird sie durch eine Zahlengrösse des Gebietes A ausgedrückt; im andern Falle ist es, wenn der Punkt etwa durch eine Construction *bekannt* ist, immer möglich, eine Reihe:

$$(1) \qquad a_1, \; a_2, \ldots a_n, \ldots$$

anzugeben, welche die in § 1. ausgedrückte Beschaffenheit und zur fraglichen Entfernung eine solche Beziehung hat, dass die Punkte der Geraden, denen die Entfernungen $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ zukommen, dem zu bestimmenden Punkte mit wachsendem n unendlich nahe rücken.

Dies drücken wir so aus, dass wir sagen: *Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte o ist gleich b,* wo b die der Reihe (1) entsprechende Zahlengrösse ist.

Hierauf wird nachgewiesen, dass das Grösser-, Kleiner- und Gleichsein von bekannten Entfernungen in Uebereinstimmung ist mit dem in § 1. definirten Grösser-, Kleiner- und Gleichsein der entsprechenden Zahlengrössen, welche die Entfernungen angeben.

Dass nun ebenso auch die Zahlengrössen der Gebiete $C, D, \ldots\ldots$ befähigt sind, bekannte Entfernungen zu bestimmen, ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1. definirten Zahlengrössen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, dass auch umgekehrt zu jeder Zahlengrösse ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Coordinate gleich ist jener Zahlengrösse und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird.*)

Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.

Durch ihn wird denn auch nachträglich für die Zahlengrössen eine gewisse Gegenständlichkeit gewonnen, von welcher sie jedoch ganz unabhängig sind.

Dem Obigen gemäss betrachte ich einen Punkt der Geraden als bestimmt, wenn seine Entfernung von o mit dem gehörigen Zeichen versehen, als Zahlengrösse, Werth oder Grenze λ^{ter} *Art gegeben ist.*

Wir wollen nun, unserm eigentlichen Gegenstande näher tretend, Beziehungen betrachten, welche auftreten, sobald Zahlengrössen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind.

Nach dem Vorhergehenden können die Zahlengrössen den Punkten einer Geraden zugeordnet gedacht werden. Der Anschaulichkeit wegen, (nicht dass es wesentlich zur Sache gehörte) bedienen wir uns dieser Vorstellung im Folgenden und haben, wenn wir von Punkten sprechen, stets Werthe im Auge, durch welche sie gegeben sind.

Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrössen nenne ich der Kürze halber eine *Werthmenge* und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine *Punktmenge.* Was im Folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, lässt sich dem Gesagten gemäss unmittelbar auf Werthmengen übertragen.

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im Allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im Allgemeinen eine dritte etc. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

---

*) Es gehört also zu jeder Zahlengrösse ein bestimmter Punkt, einem Punkte kommen aber unzählig viele gleiche Zahlengrössen als Coordinaten im obigen Sinne zu; denn es folgt, wie schon oben angedeutet wurde, aus rein logischen Gründen, dass gleichen Zahlengrössen *nicht* verschiedene Punkte entsprechen können, und dass ungleichen Zahlengrössen als Coordinaten *nicht* ein und derselbe Punkt zukommen kann.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definiren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt einer Punktmenge* vorauszuschicken.

Unter einem Grenzpunkt einer Punktmenge P verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, dass in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, dass er ausserdem selbst zu der Menge gehört. Unter Umgebung eines Punktes sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, dass eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende Punktmenge stets zum Wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.

Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P, entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihrer Grenzpunkte begrifflich mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und die *erste abgeleitete Punktmenge* von P nennen will.

Besteht die Punktmenge P' nicht aus einer blos endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge P'', ich nenne sie *die zweite abgeleitete von P*. Man findet durch ν solcher Uebergänge den Begriff der ν^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von P.

Besteht beispielsweise die Menge P aus allen Punkten der Geraden, denen rationale Abscissen zwischen 0 und 1, die Grenzen einoder ausgeschlossen, zukommen, so besteht die abgeleitete Menge P' aus *allen* Punkten des Intervalles $(0 \ldots 1)$, die Grenzen 0 und 1 mit eingeschlossen. Die folgenden Mengen P'', P''', ... stimmen hier mit P' überein. Oder, besteht die Menge P aus den Punkten, welchen die Abscissen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ zukommen, so besteht die Menge P' aus dem einen Punkte 0 und hat selbst keine Abgeleitete.

Es kann eintreffen, und dieser Fall ist es, welcher uns hier ausschliesslich interessirt, dass nach ν Uebergängen die Menge $P^{(\nu)}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, mithin selbst keine abgeleitete Menge hat; in diesem Falle wollen wir die ursprüngliche Punktmenge P *von der ν^{ten} Art* nennen, woraus folgt, dass alsdann P', P'', ... von der $\overline{\nu - 1}^{\text{ten}}$, $\overline{\nu - 2}^{\text{ten}}$ .... Art sind.

Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbaren Punktmengen betrachtet, von welchem Genus die sogenannten Punktmengen ν^{ter} Art eine besondere Art ausmachen.

Ein Beispiel einer Punktmenge ν^{ter} Art bietet schon ein einzelner Punkt dar, wenn seine Abscisse als Zahlengrösse ν^{ter} Art, welche gewissen, leicht festzustellenden Bedingungen genügt, gegeben ist. Löst man nämlich alsdann diese Zahlengrösse in die Glieder (ν — 1ter

Art) der ihr entsprechenden Reihe auf, diese Glieder wieder in die sie constituirenden Glieder ($\overline{\nu - 2}^{\text{ter}}$ Art) u. s. f., so erhält man zuletzt eine unendliche Anzahl rationaler Zahlen; denkt man sich die diesen Zahlen entsprechende Punktmenge, so ist dieselbe von der ν^{ten} Art*).

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun im Stande, den beabsichtigten Satz im folgenden § kurz anzugeben und zu beweisen.

§ 3.

Theorem. *Wenn eine Gleichung besteht von der Form:*

$$\text{(I)} \qquad 0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots\cdots$$

wo $C_0 = \frac{1}{2}\, d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, *für alle Werthe von x mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle* $(0 \ldots (2\pi))$ *gegebenen Punktmenge P der ν^{ten} Art entsprechen, wobei ν eine beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, so ist:*

$$d_0 = 0,\ c_n = d_n = 0\,.$$

Beweis: In diesem Beweise hat man, wie durch den Fortgang ersichtlich wird, wenn von P die Rede ist, nicht blos die gegebene Menge ν^{ter} Art der Ausnahmepunkte im Intervalle $(0 \ldots (2\pi))$, sondern diejenige Menge im Auge, welche auf der ganzen, unendlichen Linie aus der periodischen Wiederholung jener hervorgeht.

Betrachten wir nun die Function:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots\cdots$$

Aus der Natur einer Punktmenge ν^{ter} Art ergiebt sich leicht, dass ein Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ vorhanden sein muss, in welchem kein Punkt der Menge P liegt; für alle Werthe von x in diesem Intervalle wird also wegen der vorausgesetzten Convergenz unserer Reihe (I) sein:

$$\lim\,(c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0\,,$$

mithin ist einem bekannten Satze gemäss (S. diese Annalen Bd. IV. Seite 139):

$$\lim c_n = 0 \quad , \quad \lim d_n = 0\,.$$

Die Function $F(x)$ hat also (siehe: Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe § 8.) folgende Eigenschaften:

1) sie ist stetig in der Nähe eines jeden Werthes von x.

2) es ist $\lim \dfrac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, wenn $\lim \alpha = 0$

---

*) Dass dies nicht stets der Fall ist, möchte vielleicht noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden verdienen. Im Allgemeinen kann die auf jene Weise aus einer Zahlengrösse ν^{ter} Art hervorgehende Punktmenge sowohl von niederer, wie auch von höherer als der ν^{ten} Art oder selbst gar nicht von bestimmter Art sein.

für alle Werthe von x, mit Ausnahme der den Punkten der Menge P entsprechenden Werthe.

3) es ist: $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha}=0$, wenn $\lim \alpha = 0$,

für jeden Werth von x, ohne Ausnahme.

Ich will nun zeigen, dass $F(x) = cx + c'$ ist.

Dazu betrachte ich zuerst irgend ein Intervall $(p \,.\,.\, q)$, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegt; diese Punkte seien $x_0, x_1, \ldots x_r$, ihrer Aufeinanderfolge nach geschrieben.

Ich behaupte, dass $F(x)$ im Intervalle $(p \,.\,.\, q)$ linear ist; denn $F(x)$ ist wegen der Eigenschaften 1) und 2) eine lineare Function in jedem der Intervalle, in welche $(p \,.\,.\, q)$ durch die Punkte $x_0, x_1, \ldots x_r$ getheilt wird; da nämlich in keines dieser Intervalle Ausnahmepunkte fallen, so gelten hier die im Aufsatze (siehe Journal f. r. u. a. Mathematik Bd. 72, S. 159) angewandten Schlüsse; es bleibt daher nur übrig, die Identität dieser linearen Functionen nachzuweisen.

Ich will dies für je zwei benachbarte thun und wähle dazu die in den beiden Intervallen $(x_0 x_1)$ und $(x_1 \,.\,.\, x_2)$.

In $(x_0 \ldots x_1)$ sei $F(x) = kx + l$.

In $(x_1 \ldots x_2)$ sei $F(x) = k'x + l'$.

Wegen 1) ist $F(x_1) = kx_1 + l$; ferner ist für hinreichend kleine Werthe von α:

$$F(x_1+\alpha) = k'(x_1+\alpha) + l'; \; F(x_1-\alpha) = k(x_1-\alpha) + l.$$

Wegen 3) hat man also:

$$\lim \frac{(k'-k)\,x_1 + l' - l + \alpha\,(k'-k)}{\alpha} = 0, \text{ für } \lim \alpha = 0,$$

was nicht anders möglich ist, als wenn:

$$k = k' \quad , \quad l = l'.$$

Wir wollen der Uebersicht wegen das Resultat besonders hervorheben:

(A) *„Ist $(p \ldots . q)$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear."*

Weiter betrachte ich irgend ein Intervall $(p' \ldots q')$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten $x_0', x_1', \ldots . x_r'$ der ersten abgeleiteten Menge P' enthält; — und behaupte zunächst, dass in jedem der Theilintervalle, in welche $(p \ldots q)$ durch die Punkte $x_0', x_1', \ldots .$ zerfällt, die Function $F(x)$ linear ist, z. B. in $(x_0' \,.\,.\, x_1')$.

$o \quad p' \quad x_0' \quad s \quad t \quad x_1' \quad q'$

Denn jedes dieser Theilintervalle enthält zwar im Allgemeinen unendlich viele Punkte aus P, so dass das Resultat (A) nicht unmittel-

bar auf dasselbe Anwendung findet; dagegen enthält jedes Intervall $(s \dots t)$, welches ganz innerhalb $(x_0' \dots x_1')$ fällt, nur eine endliche Anzahl von Punkten aus P (weil sonst zwischen x_0' und x_1' noch andere Punkte der Menge P' fallen würden), und die Function ist also in $(s \dots t)$ wegen (A) linear. Indem man aber die Endpunkte s und t den Punkten x_0' und x_1' beliebig nahe bringen kann, wird ohne Weiteres geschlossen, dass die stetige Function $F(x)$ auch linear ist in $(x_0' .. x_1')$.

Nachdem dies für jedes der Theilintervalle von $(p' .. q')$ nachgewiesen ist; erhält man durch dieselben Schlüsse, wie diejenigen, welche das Resultat (A) erzielten, Folgendes:

(A') „*Ist $(p' .. q')$ irgend ein Intervall, in welchem nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge P' liegt, so ist $F(x)$ in diesem Intervalle linear.*"

Der Beweis geht in diesem Sinne fort. *Steht nämlich einmal fest, dass $F(x)$ eine lineare Function ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k)} \dots q^{(k)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten aus der k^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(k)}$ von P enthält, so folgert man ebenso wie bei dem Uebergange von* (A) *zu* (A') *weiter, dass $F(x)$ auch eine lineare Function ist in irgend einem Intervalle $(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)})$, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der $(k+1)^{ten}$ abgeleiteten Punktmenge $P^{(k+1)}$ in sich fasst.*

Wir schliessen so durch eine endliche Anzahl von Uebergängen, dass $F(x)$ in jedem Intervalle, welches nur eine endliche Anzahl von Punkten der Menge $P^{(\nu)}$ enthält, linear ist. Nun ist aber die Menge P von der ν^{ten} Art, wie vorausgesetzt wurde, es enthält mithin überhaupt ein beliebig in der Geraden angenommenes Intervall $(a \dots b)$ nur eine endliche Anzahl Punkte aus $P^{(\nu)}$. Es ist also $F(x)$ linear in jedem willkürlich angenommenen Intervalle $(a \dots b)$ und daraus folgt, wie leicht zu sehen, für $F(x)$ die Form: $F(x) = cx + c'$ für alle Werthe des x. Nachdem dies dargethan ist, geht der Beweis in der nämlichen Weise weiter, wie in der schon zweimal citirten Abhandlung von dem Momente an, wo darin ebenfalls für $F(x)$ die lineare Form nachgewiesen ist.

Dem hier bewiesenen Satze kann auch die folgende Fassung gegeben werden:

„*Eine unstetige Function $f(x)$, welche für alle Werthe von x, welche den Punkten einer im Intervalle $(0 \dots (2\pi))$ gegebenen Punktmenge P der ν^{ten} Art entsprechen, von Null verschieden, oder unbestimmt, für alle übrigen Werthe des x aber gleich Null ist, kann durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden.*"

Halle, den 8. Nov. 1871.

Algebraische Notiz.

Von G. Cantor in Halle a. d. S.

In der Algebra wird häufig von dem Satze Gebrauch gemacht: „*Wenn* $w_1, w_2, \ldots. w_n$ *von einander verschiedene gegebene Grössen sind, so lassen sich in dem linearen Ausdrucke:*

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots\cdots + x_n w_n$$

die unbestimmten Grössen x *als ganze Zahlen stets so annehmen, dass derselbe für alle* $n! = N$ *verschiedenen Permutationen, die man mit* $w_1, w_2, \ldots. w_n$ *vornehmen kann, von einander verschiedene Werthe annimmt.*"

Da von diesem Satze in den Lehrbüchern kein Beweis zu bemerken ist, so möge der folgende hier eine Stelle finden.

Man bezeichne die Differenzen von je zwei der N linearen Ausdrücke, welche aus dem gegebenen mittelst der N Permutationen der Grössen $w_1, w_2, \ldots w_n$ hervorgehen, mit:

$$(A)\qquad \begin{array}{l} a = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots\cdots + x_n \alpha_n \\ b = x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \cdots\cdots + x_n \beta_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots..$ zum Theil gleich Null sind, zum Theil die Werthe $w_\lambda - w_\mu$ haben.

Dies sind $\frac{N(N-1)}{2} = \varrho$ neue lineare Ausdrücke, von welchen keiner, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, identisch gleich Null ist und von welchen zu zeigen wäre, dass sie durch bestimmte ganzzahlige Werthe der x sämmtlich von Null verschieden gemacht werden können; ist dies nämlich nachgewiesen, so ist damit auch gezeigt, dass die N linearen Ausdrücke, von welchen wir ausgingen, von einander verschiedene Werthe bei ganzzahligen x annehmen können.

Man theile die ϱ Ausdrücke $a, b, c, \ldots\ldots.$ folgenderweise in Gruppen.

Sei x' irgend eine der unbestimmten x; dann bringe man in die *erste Gruppe* sämmtliche Ausdrücke (A) (und es ist einleuchtend, dass

es solcher giebt), in welchen x' einen von Null verschiedenen Coefficienten hat.

Sei x'' eine der übrigen Unbestimmten, welche zum Mindesten in einem der übrig gebliebenen Ausdrücke (A) mit einem von Null verschiedenen Coefficienten behaftet ist; die *zweite Gruppe* soll nun *alle* die übrig gebliebenen Ausdrücke (A) aufnehmen, in welchen x'' in dieser Weise vorkommt.

Sei x''' ein drittes x, welches in einem der nun übrig gebliebenen Ausdrücke wirklich vorkommt; die *dritte Gruppe* enthalte *alle* diese Ausdrücke, in welchen x''' einen von Null verschiedenen Coefficienten besitzt.

In dieser Weise fahre man fort; dann gelangt man, wenn einmal auf diesem Wege die Ausdrücke (A) alle erschöpft sind, zu einer bestimmten Vertheilung derselben in eine Anzahl Gruppen, welche Anzahl mit ν bezeichnet werde. Das Gruppirungsgesetz ist allgemein dieses:

Die Ausdrücke der π^{ten} Gruppe enthalten $x^{(\pi)}$ mit Coefficienten, die von Null verschieden sind; dagegen enthalten sie die früheren Unbestimmten $x', x'', \ldots x^{(\pi-1)}$ gar nicht oder was dasselbe ist mit Coefficienten die gleich Null sind.

Wenn die ν Unbestimmten $x', x'', \ldots . x^{(\nu)}$ *nicht* sämmtliche $x_1, x_2, \ldots x_n$ erschöpfen, so gebe man den übrigen irgend welche ganzzahlige Werthe.

Nun kann man $x^{(\nu)}$ ganzzahlig so bestimmen, dass die Ausdrücke der ν^{ten} Gruppe, welche ja $x', x'', \ldots x^{(\nu-1)}$ nicht enthalten, sämmtlich von Null verschieden ausfallen; man hat zu dem Ende $x^{(\nu)}$ ganzzahlig so gross zu nehmen, dass in allen Ausdrücken dieser Gruppe das $x^{(\nu)}$ enthaltende Glied die bekannte Summe der übrigen numerisch überwiegt.

Alsdann kann man ebenso $x^{(\nu-1)}$ ganzzahlig so nehmen, dass die Ausdrücke der $\nu - 1^{\text{ten}}$ Gruppe von Null verschieden ausfallen; u. s. f. Zuletzt wird x' ganzzahlig so gewählt, dass die Ausdrücke der ersten Gruppe alle von Null verschieden werden.

Damit sind nun für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganzzahlige Werthe gewonnen, für welche die Ausdrücke (A) sämmtlich von Null verschieden und die Ausdrücke, welche aus:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n$$

durch die N Permutationen der Grössen w hervorgehen, *von einander* verschieden ausfallen.

Halle, den 1. Dec. 1871.

Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function zweier Variablen durch Cylinderfunctionen.

Von F. G. Mehler in Elbing.

Durch seine Untersuchungen über das Gleichgewicht der Wärme in einem von zwei sich berührenden Kugeln begrenzten Körper wurde Herr C. Neumann auf den Satz*) geführt, dass eine von $r=0$ bis $r=\infty$ und $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ gegebene Function $f(r,\varphi)$ für beliebige Werthe r_1, φ_1 der Variablen durch das folgende dreifache Integral dargestellt werden könne:

$$(A)\quad f(r_1,\varphi_1)=\frac{1}{2\pi}\int\int\int f(r,\varphi)\,J\left(n\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right)d\varphi\, r\,dr\, n\,dn,$$

worin die Integration zuerst nach φ und r zwischen den Grenzen 0 und 2π, 0 und ∞ und darauf nach n zwischen den Grenzen 0 und ∞ auszuführen ist und $J(x)$ die Fourier-Bessel'sche oder Cylinderfunction erster Art, d. h. die durch die Gleichung:

$$J(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\lambda}\,d\lambda$$

definirte Transcendente bedeutet. Herr C. Neumann hebt ausdrücklich hervor, dass die von ihm gegebene Ableitung des Satzes keine vollständig strenge sei und zeigt darauf an einem mathematisch-physikalischen Problem, dass jenes dreifache Integral zu einem Fourier'schen Doppelintegrale in demselben Verhältniss steht, wie die Laplace'sche Entwicklung nach Kugelfunctionen zu der Fourier'schen nach Kreisfunctionen.

Es findet aber noch eine andere Beziehung statt, die mir nicht minder bemerkenswerth und wichtig genug erscheint, um sie besonders hervorzuheben. Es steht nämlich jenes dreifache Integral mit der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwicklung:

$$(B)\quad F(\vartheta_1,\varphi_1)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2s+1}{4\pi}\int_0^\pi d\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{2\pi}F(\vartheta,\varphi)\,P^s(\cos\gamma)d\varphi,$$

$$(\cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)),$$

---

*) Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temparaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle, bei H. W. Schmidt. 1862.

in einem ebenso directen Zusammenhang wie die Fourier'schen Doppelintegrale zu den Fourier'schen Reihen. Denn wie die ersteren als Grenzfälle der letzteren angesehen werden können, so ist es auch möglich, durch einen geeigneten Grenzübergang die Kugelfunctionenreihe (B) geradezu in das dreifache Integral (A) überzuführen.

Um sich hiervon zu überzeugen, setze man, indem man sich unter k eine unendlich grosse Zahl vorstellt:

$$\vartheta = \frac{r}{\varkappa},\ \vartheta_1 = \frac{r_1}{\varkappa},\ F(\vartheta, \varphi) = f(r, \varphi),\ F(\vartheta_1, \varphi_1) = f(r_1, \varphi_1),$$

dann erhält man unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung und, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\varphi - \varphi_1)} = R$$

gesetzt wird:

$$P^s(\cos\gamma) = P^s\left(1 - \frac{R^2}{2\varkappa^2}\right) = P^s\left(\cos\frac{R}{\varkappa}\right).$$

Es ergiebt sich aber aus dem Laplace'schen Integrale*):

$$P^s(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\lambda)^s\, d\lambda,$$

wenn $\gamma = \frac{R}{\varkappa}$ genommen und vorausgesetzt wird, dass $\frac{s}{\varkappa}$ einen endlichen Werth besitzt, bis auf unendlich kleine Grössen:

$$P^s\left(\cos\frac{R}{\varkappa}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 + \frac{iR\cos\lambda}{\varkappa}\right)^{\varkappa\cdot\frac{s}{\varkappa}} d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iR\frac{s}{\varkappa}\cos\lambda}\, d\lambda,$$

d. h. es ist, wenn ε eine bei unendlich wachsendem $\varkappa$ unendlich abnehmende Grösse bezeichnet:

$$P^s\left(\cos\frac{R}{\varkappa}\right) = J\left(\frac{s}{\varkappa}R\right) + \varepsilon.$$

Aber auch wenn die eben gemachte Voraussetzung nicht erfüllt ist, sondern $\frac{s}{\varkappa}$ einen unendlich grossen Werth hat, kann ε nur unendlich klein sein, weil in diesem Falle jede der beiden Functionen $P^s\left(\cos\frac{R}{\varkappa}\right)$ und $J\left(\frac{s}{\varkappa}R\right)$ einen verschwindend kleinen Werth besitzt. Wenn man nun unter Vernachlässigung dieser Grösse ε in (B) $J\left(\frac{s}{\varkappa}R\right)$ an Stelle von $P^s(\cos\gamma)$ schreibt, so ergiebt sich:

$$f(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{s}{\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}\right)\int_0^{\varkappa\pi} dr\,.\,\varkappa\sin\frac{r}{\varkappa}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\, J\left(\frac{s}{\varkappa}R\right) d\varphi,$$

*) Man vergl. in dieser Beziehung auch: Heine, die Fourier-Bessel'sche Function. Borchardt's Journal, Bd. 69.

und hieraus, weil für ein unendlich grosses $\varkappa$, indem man $\frac{s}{\varkappa} = n$, $\frac{1}{\varkappa} = dn$ setzt, die Summe sich in ein bestimmtes Integral verwandelt, $\frac{1}{2\varkappa}$ gegen $\frac{s}{\varkappa}$ zu vernachlässigen, $\varkappa \sin \frac{r}{\varkappa}$ durch r und endlich $\varkappa\pi$ durch ∞ zu ersetzen ist:

$$f(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dn \,.\, n \int_0^\infty dr \,.\, r \int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\, J(nR)\, d\varphi,$$

was mit der Gleichung (A) übereinstimmt.

Es ist wohl kaum nöthig hinzuzufügen, dass durch diese Ableitung kein wirklicher Beweis der Formel geliefert ist. Ein solcher ist neuerdings von Herrn P. du Bois-Reymond in der Abhandlung: *„Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln"* (Bd. IV, p. 362—390 dieser Annalen) gegeben worden. Schon früher, nämlich in der zu Ostern 1870 erschienenen Arbeit: *„Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung"* (Elbing, bei Neumann-Hartmann) hatte ich (p. 13) die Bemerkung gemacht, dass ein dort von mir für $J(x)$ gelegentlich abgeleitetes Integral*) besonders geeignet sei, um für die Neumann'sche Formel den strengen Beweis zu liefern. Es leistet nämlich dieses Integral in dem vorliegenden Falle genau dieselben Dienste, wie die bekannten Dirichlet'schen Integrale für $P^n(\cos\vartheta)$ bei der Summation der Kugelfunctionenreihen. (S. Crelle's Journal, Bd. 17.) Die wirkliche Durchführung ist jedoch wegen der unendlich grossen Integrationsgrenzen in (A) und in der für $J(x)$ anzuwendenden Integralform mit nicht ganz unerheblichen Weitläufigkeiten verknüpft. Andererseits verfolgen die Untersuchungen des Herrn P. du Bois-Reymond ein viel allgemeineres Ziel; die Gl. (A) erscheint hier als ein besonderer Fall eines viel umfassenderen Resultates. Wenn es sich dagegen *nur* um den Beweis der Neumann'schen Formel handelt, so dürfte das folgende Verfahren nicht zu missbilligen sein, bei welchem zunächst ein specieller Fall des Satzes durch Anwendung eines Theorems**) des Herrn P. du Bois-Reymond erledigt, und darauf seine Allgemeingültigkeit mit Hülfe der von Dirichlet in dem analogen Falle der Kugelfunctionen angewandten geometrischen Betrachtungsweise geschlossen wird.

---

*) Vergl. die diesem Aufsatz folgende Notiz.

**) Siehe Borchardt's Journal, Bd. 69, p. 78 und die bereits erwähnte Arbeit in diesen Annalen (p. 365).

Nach jenem Theorem ist für $0 < a < \infty$:

$$(C) \qquad \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\, \varphi(x,\, y) = f(0) \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x,\, y)\,,$$

wenn die rechte Seite einen von a unabhängigen endlichen Werth besitzt, und wenn die Function $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = a$ nirgends zunimmt oder nirgends abnimmt oder doch nur an einer endlichen Anzahl von Stellen aus dem einen Zustande in den andern übergeht. Insbesondere erfordert die Ableitung des Satzes, dass $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ nicht unendlich viele in unendlich kleinen Intervallen aufeinanderfolgende Maxima und Minima habe, während seine Gültigkeit durch ähnliche Irregularitäten an anderen Punkten, sofern sie auf unendlich kleine Intervalle beschränkt bleiben, nicht beeinträchtigt werden könnte. Der Einfachheit wegen will ich die nicht unbedingt nothwendige Annahme machen, dass $f(x)$ nirgends unendlich gross sei. Setzt man:

$$\varphi(xy) = xy\; J(xy)\,,$$

so nimmt, weil:

$$xy\; J(xy) = -\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial J(xy)}{\partial x}\right),\ \text{also:}$$

$$\int_0^a dx\,.\,xy\; J(xy) = -\frac{a}{y}\,\frac{\partial J(ay)}{\partial a} = -\frac{\partial J(ay)}{\partial y}$$

ist, das Doppelintegral:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\; xy\; J(xy)$$

den in der That von a unabhängigen Werth $J(0) - J(\infty) = 1$ an, und daher ergiebt sich, wenn in (C) noch y in n, x in r und $f(x)$ in $f(r,\, \varphi)$ verwandelt und das Resultat nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π integrirt wird:

$$(D) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty n\,dn \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\; J(nr)\; d\varphi\, r\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0,\, \varphi)\; d\varphi\,.$$

Stellt man sich unter r und φ die Polarcoordinaten eines Punktes in der Ebene vor, so muss man, um (C) für jeden Werth von φ anwenden zu dürfen, annehmen, dass die oben für $f(x)$ aufgestellten Bedingungen auch auf jedem vom Anfangspunkte O ausgehenden Radiusvector erfüllt seien. Wir wollen ferner annehmen, dass die Function $f(r,\, \varphi)$ ausserhalb eines ganz im Endlichen gelegenen Flächenstückes E überall den Werth Null habe, und a so gross wählen, dass E ganz innerhalb des um O mit a beschriebenen Kreises K fällt. Dann ist die rechte Seite von (D) gleich Null, wenn A ausserhalb E

liegt, und auf der linken Seite kann die Integration statt über K auch nur über E erstreckt werden. Die Gl. (D) kann alsdann folgendermassen interpretirt werden: Wenn man jedes Flächenelement von E mit dem zugehörigen Werthe der Function f und mit der Function $J(nr)$, worin n einen positiven Factor und r die Entfernung des Elementes von O bedeutet, multiplicirt und das Product über die Fläche von E und darauf, nachdem es mit ndn multiplicirt ist, zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt, so entsteht als Resultat das arithmetische Mittel von $f(r, \varphi)$ auf einem O umgebenden unendlich kleinen Kreise, falls O innerhalb E, und der Werth Null, falls O ausserhalb E liegt.

Jetzt hindert nichts, irgend einem beliebigen Punkte r_1, φ_1 der Ebene die Rolle des Anfangspunktes O zu ertheilen, und demgemäss r in $J(nr)$ durch:

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}$$

zu ersetzen; dann ergiebt sich die Formel:

$$\text{(D')} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty ndn \iint f(r, \varphi)\, J(nR)\, rdr\, d\varphi = M\,\{f(r_1, \varphi_1)\}.$$

Auf der linken Seite erstreckt sich das Doppelintegral wie vorhin über die Fläche von E, und die rechte Seite bedeutet das arithmetische Mittel von $f(r, \varphi)$ auf einem um r_1, φ_1 als Mittelpunkt beschriebenen unendlich kleinen Kreise, also wenn r_1, φ_1 innerhalb E liegt und $f(r_1, \varphi_1)$ nicht vieldeutig ist, den Werth $f(r_1, \varphi_1)$, wenn dagegen $f(r_1, \varphi_1)$ ausserhalb E liegt, den Werth Null, auf dem Rande von E endlich das Mittel auf dem innerhalb E fallenden Bogen des unendlich kleinen Kreises.

Die einzige Voraussetzung, an welche diese Uebertragung, weil man sich bei derselben die Integration ursprünglich in der Richtung der von r_1, φ_1 (statt von O) ausgehenden Radienvectoren ausgeführt denken muss, geknüpft ist, besteht darin, dass die oben in Bezug auf O geforderten Bedingungen auch in Bezug auf r_1, φ_1 erfüllt sind. Wenn also z. B. angenommen wird, dass auf jeder beliebigen innerhalb E fallenden Geraden die Function $f(r, \varphi)$ endlich ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten der Geraden je ein Maximum oder ein Minimum oder ein plötzlicher Uebergang von einem endlichen Werthe zu einem anderen stattfindet, so wird (D') für alle Punkte von E gelten, auch die singulären nicht ausgenommen.

Man kann nun, indem man sich die Function f für alle Punkte der Ebene gegeben denkt, die Gl. (D') im Innern eines um O beschriebenen Kreises von beliebig grossem Radius b in Anwendung bringen. Damit man aber b geradezu $= \infty$ setzen dürfe, wodurch

der Uebergang zu der Formel (A) hergestellt sein würde, ist es nöthig, dass erstens das Doppelintegral:

$$\Phi(b,\ n) = \int_b^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(r,\ \varphi)\ J(n\,R)\ d\varphi$$

bei hinreichend grossem b wenigstens im Allgemeinen kleiner als jede gegebene Grösse wird, weil die nach n zu integrirende Function höchstens an sinzelnen Stellen unendlich oder unbestimmt werden darf, und dass zweitens auch das Integral:

$$\Psi(b) = \int_0^\infty \Phi(b,\ n)\ n\,dn$$

bei unendlich wachsendem b verschwindend klein wird. Es lässt sich zeigen, dass beide Bedingungen sicher dann erfüllt sind, *wenn das Product* $f(r,\ \varphi)\ .\sqrt{r}$ *bei jedem Werthe von* φ *für* $r = \infty$ *gegen Null convergirt und bei wachsendem* r *von irgend einer bestimmten Stelle an entweder nur zunimmt oder nur abnimmt (in beiden Fällen also numerisch immer kleiner und kleiner wird).* Bemerkt man nämlich, dass:

$$\int_b^\infty J(n\,R)\ \sqrt{r}\ d\,r$$

zwar einen unbestimmten, aber doch, ausgenommen den Fall $n = 0$, keinen unendlich grossen Werth hat, so erkennt man durch Anwendung des von Herrn P. du Bois-Reymond bewiesenen „zweiten Mittelwerthsatzes" leicht, dass für $n > 0$ das Integral:

$$\int_b^\infty f(r,\ \varphi)\ \sqrt{r}\ .\ J(n\,R)\ \sqrt{r}\ dr$$

und folglich auch $\Phi(b,\ n)$ bei wachsendem b sich der Null nähert. Was aber die Function $\Psi(b)$ anbetrifft, so kann dieselbe als der Grenzwerth des Ausdruckes:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^\infty \frac{r\,\partial r}{R\,\partial R}\, f(r,\ \varphi)\ .\ \frac{\partial\left\{J(\delta\,R) - J(m\,R)\right\}}{\partial r}\ dr$$

für $\delta = +0$ und $m = +\infty$ angesehen werden und convergirt für ein zunehmendes b ebenfalls gegen Null, wie nach demselben Mittelwerthsatze, und ohne dass eine neue Beschränkung hinzutritt, geschlossen werden kann.

Elbing, den 1. December 1871.

Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunction $J(x)$.

Von F. G. Mehler in Elbing.

Bekanntlich sind von Dirichlet für $P^n(\cos\vartheta)$ die folgenden beiden Integralformen*) aufgestellt worden:

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\cos n\beta\cos\frac{1}{2}\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos n\beta\sin\frac{1}{2}\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}}$$

$$P^n(\cos\vartheta) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\sin n\beta\sin\frac{1}{2}\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}},$$

beide gültig für $n \geq 1$, die erste auch noch für $n = 0$, wenn von der rechten Seite der Gleichung die Hälfte genommen wird. Aus diesen Ausdrücken können zwei ähnliche in der Form etwas einfachere gewonnen werden, auf welche ich zuerst durch die Untersuchung derjenigen Functionen, durch welche die Lösung des elektrostatischen Problems für den Kegel vermittelt wird, zufällig geführt wurde.**) Addirt man die obigen beiden Gleichungen, so erhält man die auch noch für $n = 0$ gültige Formel

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}}.$$

Subtrahirt man dagegen dieselben Gleichungen, *nachdem man vorher n in $n+1$ verwandelt hat*, so ergiebt sich

$$0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\vartheta)}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\beta)}},$$

und wenn man diese Gleichung, welche für $n = 0$ ebenfalls keine

---

*) Crelle's Journal, Bd. 17. p. 41.

**) Vergl. p. 18 meiner Arbeit: Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. (Elbing 1870.)

Ausnahme erleidet, mit der vorhergehenden durch Addition und Subtraction verbindet, so entstehen die Formen:

$$(1)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}},$$

$$(2)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}.$$

$$(0 < \vartheta < \pi).$$

Es kann bemerkt werden, dass das letzte Integral *für sich allein* sehr wohl geeignet ist, bei der Untersuchung der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe die Stelle der *beiden* von Dirichlet angewandten Ausdrücke zu vertreten, indem die Summation der m ersten Glieder der Reihe bei Anwendung der Gl. (2) mit Hülfe der einfachen Formel

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} (s+\tfrac{1}{2})\, P^s(\cos\vartheta) = -\frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\right)\frac{d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}$$

bewerkstelligt werden kann.

Setzt man die beiden Formen (1) und (2) einander gleich und verwandelt ϑ in $\frac{x}{n}$ und β in $\frac{\alpha}{n}$, so entsteht für $0 < x < n\pi$ und ein ganzzahliges positives n die Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2n}\right) d\alpha}{\sqrt{2n^2\left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{x}{n}\right)}} = \frac{2}{\pi}\int_x^{n\pi} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2n}\right) d\alpha}{\sqrt{2n^2\left(\cos\frac{x}{n} - \cos\frac{\alpha}{n}\right)}},$$

und diese geht für $n = \infty$ und jeden positiven Werth von x über in:

$$(3)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{2}{\pi}\int_x^{\infty} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Die linke Seite erweist sich durch die Substitution $\alpha = x\cos\lambda$ als identisch mit der am meisten bekannten Integralform der Cylinderfunction $J(x)$, nämlich mit

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x\cos\lambda)\, d\lambda,$$

während die rechte Seite eine davon wesentlich verschiedene Form hat. Die strenge Begründung des gemachten Grenzüberganges ist aber gerade bei dem zweiten Integrale umständlich, und auch die directe Ableitung desselben aus dem ersten, welche ich in der erwähnten Arbeit (p. 23) gegeben habe, ist insofern nicht ganz streng, als sie durch Umkehrung der Integrationsfolge in einem Doppelintegrale ge-

wonnen ist, dessen Grenzen unendlich sind und welches seine Bedeutung nur dem abwechselnden Zeichen seiner Elemente verdankt. Daher wird es nicht überflüssig sein, auf andere Art zu constatiren, dass die Function

$$H(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \tag{4}$$

für positive x mit $J(x)$ übereinstimmt. Man sieht zunächst, dass $H(0) = 1$, also $= J(0)$ ist; aber es ist nicht ebenso einleuchtend, dass $H(x)$ auch für ein unendlich kleines x die Einheit zur Grenze hat, und da dieses für die Folge zu wissen nöthig ist, so soll es zunächst gezeigt werden. Man hat:

$$H(x) - H(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\alpha} + \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \frac{1}{\alpha}\right)\sin\alpha\, d\alpha.$$

Das erste Integral nähert sich mit x zugleich der Null. Das zweite möge in zwei andere mit den Grenzen 0 und ε, ε und ∞ zerlegt werden. Sein Werth kann dann, weil der erste Factor des zu integrirenden Produktes sein Zeichen nicht ändert, dargestellt werden unter der Form

$$\frac{2\sin\varepsilon_1}{\pi}\log\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}{\varepsilon}\right) + \frac{2\sin\varepsilon_2}{\pi}\log\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}\right),$$

wenn ε_1 einen gewissen zwischen 0 und ε, dagegen ε_2 einen zwischen ε und ∞ gelegenen Werth bezeichnet. Ertheilt man nun ε einen zwar beliebig kleinen aber festen Werth, während x unbegrenzt abnimmt, so wird das erste Glied der vorstehenden Summe beliebig klein wegen des Factors $\sin\varepsilon_1$, das zweite wegen des in $\sin\varepsilon_2$ multiplicirten Logarithmus. Es ist also in der That $\lim\,(H(x) - H(0)) = 0$, d. h. $\lim H(x) = H(0) = 1$. Verwandelt man nun in (4) α in $\beta + x$, so ergiebt sich

$$H(x) = \frac{2}{\pi}\cos x\int_0^\infty \frac{\sin\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta + 2x}} + \frac{2}{\pi}\sin x\int_0^\infty \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta + 2x}}. \tag{5}$$

Die hier in $\cos x$ und $\sin x$ multiplicirten Integrale sind, wie sich leicht nachweisen lässt, für $x > 0$ stetige Functionen von x, und ihre Differentialquotienten, welche durch Differentiation unter dem Integralzeichen abgeleitet werden können, sind ebenfalls stetig. Durch wirkliche Ausführung der Differentiationen bildet man aber leicht die Gleichung

$$xH''(x) + H'(x) + xH(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\beta\, \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta + x).\sqrt{\beta}}{(\beta + 2x)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

deren rechte Seite sich für $x > 0$ stets auf Null reducirt. Es genügt

also für positive und von Null verschiedene x die Function $H(x)$ derselben Differentialgleichung

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

von welcher auch $J(x)$ ein particuläres Integral ist, und hieraus ergiebt sich, wie bekannt, dass zwischen $H(x)$ und $J(x)$ die Beziehung stattfindet:

$$x\big(J(x)\,H'(x) - H(x)\,J'(x)\big) = c,$$

worin c eine Constante, und zwar überall dieselbe Constante, weil eine sprungweise Aenderung bei $H(x)$ und $H'(x)$ (für $x > 0$) ebenso wenig wie bei $J(x)$ und $J'(x)$ stattfindet. Durch Integration zwischen zwei beliebigen positiven Grenzen z und x ergiebt sich nun

$$\frac{H(x)}{J(x)} - \frac{H(z)}{J(z)} = c\int_z^x \frac{dx}{x\,(J(x))^2},$$

und lässt man hierin x und z unabhängig von einander gegen Null hin abnehmen, so nähert sich, weil $H(+0) = J(+0) = 1$, die linke Seite der Null. Da aber das Integral auf der rechten Seite, indem es sich für sehr kleine x und z wie $\log x - \log z$ verhält, einen völlig unbestimmten Werth hat, so muss die Constante $c = 0$ sein, und folglich gilt für positive x und z die Gleichung:

$$\frac{H(x)}{J(x)} = \frac{H(z)}{J(z)}, \quad \text{d. h. es ist} \quad \frac{H(x)}{J(x)} = \frac{H(+0)}{J(+0)} = 1,$$

mithin in der That $H(x) = J(x)$.

Elbing, den 2. December 1871.

Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen.

Von Sophus Lie in Christiania.

I.

Die rasche Entwickelung der Geometrie in unserem Jahrhundert ist bekanntlich innig mit philosophischen Betrachtungen über das Wesen der Cartesischen Geometrie verknüpft, Betrachtungen, die in ihrer allgemeinsten Form von Plücker in seinen ersten Arbeiten auseinandergesetzt worden sind. Für denjenigen, der in den Geist der Plücker'schen Werke eingedrungen ist, wird der Gedanke, dass man eine jede Curve, die von drei Parametern abhängt, als Raumelement anwenden kann, nichts wesentlich Neues enthalten, und wenn doch Niemand, soviel ich weiss, diese Idee ausgeführt hat, so glaube ich die Ursache darin suchen zu müssen, dass man derselben keinen praktischen Werth beigelegt hat. Ich bin zu einem Studium der genannten Theorie dadurch geführt worden, dass ich eine merkwürdige Transformation entdeckte, die einen genauen Zusammenhang zwischen Krümmungslinien und Haupttangenten-Curven darlegt, und es ist meine Absicht, in der folgenden Abhandung die Resultate, die ich in dieser Weise erhalten habe, auseinander zu setzen.

Im ersten Abschnitte beschäftige ich mich mit Curven-Complexen, das heisst mit Mannigfaltigkeiten, die von dreifach unendlich vielen Curven gebildet werden. Alle Flächen, die von einfach unendlich vielen Curven eines gegebenen Complexes gebildet werden, genügen einer partiellen Differential-Gleichung zweiter Ordnung, die als singuläres erstes Integral eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung zulässt. Für partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung erhalte ich in dieser Weise eine neue geometrische Interpretation, die insbesondere, wenn der besprochene Complex ein Plücker'scher Linien-Complex ist, Interesse darbietet. — Ebenso wie die allgemeine Gleichung $F(xyz\,XYZ) = 0$ als aequatio directrix eine Reciprocität im

Raume bestimmt, zeige ich, dass auch das simultane Gleichungs-System:

$$F_1(xyz\,XYZ) = 0, \quad F_2(xyz\,XYZ) = 0$$

ein Entsprechen zwischen den Flächen-Elementen zweier Räume feststellt. Diese beiden Arten von Transformationen, zusammen mit allen Punkt-Transformationen, sind die einzigen räumlichen Umformungen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, und also beruhen alle solche Transformationen entweder auf einem Wechsel des Raumelements oder auf der Einführung eines neuen Coordinaten-Systems. Endlich betrachte ich die Anwendung solcher Transformationen auf partielle Differential-Gleichungen.

Im zweiten Abschnitte setze ich voraus, dass die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear sind, und zwar untersuche ich insbesondere das System:

$$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z$$

und die dadurch bestimmte räumliche Abbildung. Es transformiren sich dabei die Geraden des Raumes (xyz) in die Kugeln des zweiten Raumes, d. h. alle Flächen-Elemente, die zwei consecutive Punkte einer Geraden enthalten, gehen in die Elemente einer Kugel über. Gerade, die sich schneiden, bilden sich hierbei als Kugeln ab, die sich berühren. *Hierauf begründe ich einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie und demzufolge zwischen mehreren projectivischen und metrischen Theorien, einen Zusammenhang, der sein Haupt-Interesse darin erhält, dass die Haupttangenten-Curven gewissermassen dieselbe Stelle in der ersten Geometrie, wie die Krümmungslinien in der zweiten einnehmen.* Diese Theorie giebt die Bestimmung der Haupttangenten-Curven für viele particuläre Flächen, insbesondere für die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten. Endlich beweise ich, dass die allgemeinste Transformation des Raumes (XYZ), bei welcher einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien covariante Curven sind, durch meine Abbildung der allgemeinen linearen oder dualistischen Transformation des Raumes (xyz) entspricht. Alle diese Transformationen können aus Transformationen durch reciproke Radien und aus Parallel-Transformationen (Dilatationen) zusammengesetzt werden.

Im dritten Abschnitte bestimme ich mit Anwendung der Begriffe: Linien- und Kugel-Complex, Linien- und Kugel-Congruenz, alle partiellen Differential-Gleichungen erster und zweiter Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien auf den Integralflächen sind. Unter den besprochenen Gleichungen zweiter Ordnung gelingt es mir, alle, welche ein allgemeines erstes Integral,

bezüglich zwei allgemeine erste Integrale besitzen, anzugeben, und dabei zeigt es sich, dass, wenn ein allgemeines erstes Integral existirt, dasselbe, wie auch das zugehörige singuläre erste Integral, immer aufgestellt werden kann. Ich komme hier auf die bekannten Untersuchungen über Flächen, deren Krümmungslinien eben oder sphärisch sind, über Flächen, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen u. s. w.

Im vierten Abschnitte gebe ich endlich einige Theorien, die sich an das Vorangehende anschliessen.

Während ich mich mit diesen Entwickelungen beschäftigte, bin ich im lebhaften Verkehr gewesen mit Hrn. F. Klein, dem ich viele der hier verarbeiteten Ideen verdanke, mehr, als es mir durch Citate anzugeben möglich gewesen ist.

Ich bemerke auch, dass die hier dargestellten Theorien einige Berührungspunkte mit meinen früheren Untersuchungen über die Repräsentation des Imaginären haben; wenn ich in meiner jetzigen Darstellung diesen Zusammenhang nicht hervortreten lasse, so geschieht es einerseits, weil ich denselben für einigermassen zufällig halte, andererseits, weil ich nicht von der gewöhnlichen Sprache der Mathematik abzuweichen wünschte.*)

Erster Abschnitt.

Ueber eine neue Reciprocität im Raum.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnitts gebe ich eine kurze Uebersicht über einige bekannte Theorien, um dadurch das Verständniss des Paragraphen 4. zu erleichtern. Dieser letzte Paragraph giebt alle Voraussetzungen, die nothwendig sind, um den zweiten Abschnitt verstehen zu können; für den dritten und vierten Abschnitt benutze ich ausserdem noch die folgenden Paragraphen.

*) Die wesentlichsten Gesichtspunkte und Resultate dieser Abhandlung finden sich in einer kurzen Note (October 1870) und in zwei grösseren Arbeiten (1871), die in die Verhandlungen der Akademie zu Christiania aufgenommen sind. Den Zusammenhang zwischen Haupttangenten-Curven und Krümmungslinien, wie überhaupt zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie theilte ich derselben Gesellschaft im Juli 1870 mit. Vergl. auch die Comptes Rendus vom October 1870, sowie eine von Hrn. Klein und mir veröffentlichte Note in den Monatsberichten der Berliner Akademie, 15. Decbr. 1870.

§ 1.

Reciprocität zwischen zwei Ebenen oder zwei Räumen.

1. Die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocitäts-Theorie der Ebene kann bekanntlich aus der Gleichung:

(1) $X(a_1 x + b_1 y + c_1) + Y(a_2 x + b_2 y + c_2) + (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0,$

oder, was dasselbe ist:

$$x(a_1 X + a_2 Y + a_3) + y(b_1 X + b_2 Y + b_3) + (c_1 X + c_2 Y + c_3) = 0$$

entwickelt werden, vorausgesetzt, dass man x, y und X, Y als Cartesische Punkt-Coordinaten zweier Ebenen interpretirt.

Bezeichnet man nämlich als conjugirt zwei Punkte, deren Coordinaten-Werthe (xy) und (XY) der Gleichung (1) genügen, so kann man sagen, dass die einem Punkte conjugirten Punkte der zweiten Ebene eine Gerade bilden, und dieselbe betrachten wir als dem gegebenen Punkte entsprechend. Alle Punkte einer Geraden haben einen gemeinsamen conjugirten Punkt in der zweiten Ebene und somit gehen ihre entsprechenden Geraden durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Ebenen werden also durch (1) *so auf einander bezogen, dass die Geraden jeder Ebene sich als die Punkte der zweiten Ebene abbilden. Den Punkten einer Geraden λ entsprechen hierbei die durch den Bildpunkt von λ gehenden Geraden.* Diese gegenseitige Beziehung ist das Fundamental Princip der besprochenen Reciprocität.

Sei nun gegeben in der einen Ebene ein Polygon und in der zweiten Ebene dasjenige Polygon, dessen Seiten sich als die Ecken des ersten abbilden; nach dem Vorstehenden ist dann klar, dass auch die Ecken des letzten Polygons den Seiten des ersten entsprechen, dass also die beiden Polygone in reciproker Beziehung stehen. Aus diesen Polygonen erhält man durch Grenz-Uebergang zwei Curven, die, wie man sich ausdrückt, einander hinsichtlich der Gleichung (1) reciprok sind. Es ist einleuchtend, dass die Tangenten jeder Curve sich als die Punkte der reciproken abbilden.

2. Plücker*) gründet eine Verallgemeinerung der eben entwickelten Theorie auf die Interpretation der allgemeinen Gleichung:

(2) $$F(xy\ XY) = 0.$$

Die einem Punkte (xy) conjugirten Punkte (XY) bilden nun eine Curve C, die durch (2) dargestellt wird, wenn (xy) als Parameter, (XY) dagegen als laufende Coordinaten aufgefasst werden; umgekehrt bilden die einem Punkte (XY) conjugirten Punkte (xy) eine Curve c, welche ebenfalls durch (2) dargestellt wird. Die beiden Ebenen werden also durch (2) derart aufeinander bezogen, dass den Punkten der einen

*) Analytisch geometrische Entwickelungen. T. I. Zweite Abtheilung.

Ebene in der zweiten die Curven eines Curven-Netzes (C oder c) entsprechen. Ganz wie früher sieht man ein, dass den Punkten einer Curve C diejenigen Curven c entsprechen, welche durch die Bildpunkte von C gehen.

Einem Curven-Polygone ($C_1 C_2 \ldots C_n$) entspricht ein Punkt-System ($p_1 p_2 \ldots p_n$), und offenbar liegen diese Punkte paarweise ($p_1 p_2$), ($p_2 p_3$) ... auf denjenigen Curven c, deren Bildpunkte Ecken des gegebenen krummlinigen Polygons sind. Durch Grenz-Uebergang erhält man auch hier Curven, die in solcher Beziehung stehen, dass den Punkten der einen solche Curven c oder C entsprechen, welche die zweite umhüllen. Doch ist das Reciprocitäts-Verhältniss im Allgemeinen nicht vollständig. Ist nämlich Σ die Umhüllungs-Curve aller C, die sich als die Punkte einer Curve σ abbilden, so umhüllen freilich die den Punkten von Σ entsprechenden c die gegebene Curve σ, aber im Allgemeinen ausserdem eine zweite Curve.

3. Plücker*) gründet die allgemeine Reciprocität zwischen zwei Räumen r und R auf die allgemeine Gleichung:

$$F(x y z \; X Y Z) = 0.$$

Wenn insbesondere F hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear ist, so erhält man die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocität zwischen den Punkten und den Ebenen der beiden Räume.

Es ist nun meine Absicht, in dieser Abhandlung, und insbesondere im ersten Abschnitte derselben, eine neue, der Plücker'schen coordinirte Reciprocität zu betrachten, die durch das Gleichungs-System

$$F_1(x y z \; X Y Z) = 0, \qquad F_2(x y z \; X Y Z) = 0$$

bestimmt wird, vorausgesetzt, dass man ($x y z$) und ($X Y Z$) als Punkt-Coordinaten zweier Räume r und R auffasst.

§ 2.

Curven, die von drei Parametern abhängen, können als Raumelement eingeführt werden.

4. Die Transformation geometrischer Theoreme, die sich auf die Poncelet-Gergonne'sche oder Plücker'sche Reciprocitäts-Theorie gründet, kann, wie Gergonne und Plücker hervorgehoben haben, unter einem höheren Gesichtspunkte, den wir sogleich angeben, betrachtet werden. Dasselbe gilt von unserer neuen Reciprocität.

Die Cartesische analytische Geometrie übersetzt beliebige geometrische Theoreme in algebraische, und macht dadurch aus der

*) Es ist correct, glaube ich, Plücker diese Reciprocität zuzuschreiben, obgleich ich keinen Ort in Plücker's Werken angeben kann, wo er explicite die Reciprocität des Raumes in dieser Weise begründet.

Geometrie der Ebene eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier Variabeln und ebenso aus der Geometrie des Raumes eine Repräsentation einer Algebra, die drei variable Grössen umfasst. Nun hat insbesondere Plücker die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass die Cartesische Geometrie eine zweifache Willkürlichkeit enthält.

Descartes stellt ein Werth-System der beiden Variabeln x und y durch einen *Punkt* in der Ebene dar; er hat, wie man zu sagen pflegt, den Punkt zum Elemente der ebenen Geometrie gewählt, während man ebenso gut die Gerade oder überhaupt eine beliebige, zwei Parameter enthaltende Curve als Element anwenden könnte. *Man kann aber bekanntlich die durch die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocität vermittelte Transformation als auf dem Uebergange vom Punkte als Element zur Geraden als Element beruhend auffassen, und ebenso besteht gewissermassen die Plücker'sche Reciprocität der Ebene in dem Uebergange vom Punkte als Element zu einer von zwei Parametern abhängenden Curve als Element.*

Ferner stellt Descartes das Werth-System (xy) durch denjenigen Punkt in der Ebene dar, dessen Abstände von zwei gegebenen Geraden — den Coordinaten-Axen — bezüglich gleich x und y sind; er hat unter den unbegrenzt vielen möglichen Coordinaten-Systemen ein bestimmtes gewählt.

Es ist bekannt, dass die Fortschritte der Geometrie in unserem Jahrhundert sich wesentlich darauf gründen, dass die beiden besprochenen Willkürlichkeiten in der Cartesischen Repräsentation klar als solche aufgefasst worden sind, und es liegt somit nahe, zu versuchen, aus dieser fruchtbaren Quelle noch mehr zu schöpfen.

5. Die im Folgenden dargestellten neuen Theorien beziehen sich darauf, dass man *als Raumelement eine jede Raumcurve, die von drei Parametern abhängt, anwenden kann.* Erinnert man sich z. B., dass die Gleichungen einer Raumgeraden vier wesentliche Constanten enthalten, so sieht man ein, dass man die geraden Linien, welche eine Bedingung befriedigen, als Element einer Raumgeometrie, die eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit drei Variabeln giebt, wählen kann. Da aber hierdurch ein Geraden-System — ein Plücker'scher Linien-Complex — ausgezeichnet wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien-Complexes beschäftigt, so kann es sehr vortheilhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen.

In der *metrischen Geometrie* ist z. B. der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis und in Folge dessen der Complex imaginärer Geraden, welche denselben schneiden, ausgezeichnet, *und es könnte somit*

a priori wahrscheinlich scheinen, dass es, um gewisse metrische Probleme zu behandeln, vortheilhaft ist, diese imaginären Linien als Elemente einzuführen.

Wenn wir eben gesagt haben, dass es beispielsweise möglich ist, die Geraden eines Linien-Complexes als Raumelement zu wählen, so muss man wohl bemerken, dass dieses etwas ganz anderes, etwas, wenn man will, mehr Particuläres ist, als die Ideen, welche Plücker in seinem letzten Werke: „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement", entwickelt hat. Plücker hatte schon früh*) die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass es möglich ist, eine Repräsentation einer Algebra mit beliebig vielen Variabeln zu schaffen, indem man nämlich ein Gebilde, das ebenso viele Parameter enthält, als Raumelement einführt. Insbesondere hob er hervor, dass die Raumgerade vier Coordinaten besitzt, dass man also eine Geometrie einer Mannigfaltigkeit mit *vier* Dimensionen erhält, wenn man die Gerade als Element des Raumes betrachtet.

§ 3.

Curven-Complexe. Neue geometrische Interpretation partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Haupttangenten-Curven eines Linien-Complexes.

6. Nach Plücker nennt man den Inbegriff der Geraden, die *einer* Bedingung unterworfen sind, welche also noch von *drei* wesentlichen Constanten abhängen, einen Linien-Complex. In Analogie damit werde ich im Folgenden ein jedes System von Curven c, deren Gleichungen drei unabhängige Parameter enthalten, als einen *Curven-Complex* bezeichnen. Die Gleichungen:

(1) $$f_1(xyz\;abc) = 0, \qquad f_2(xyz\;abc) = 0,$$

in denen a, b, c Constanten sind, stellen also einen Curven-Complex dar. Durch Differentiation dieser beiden Gleichungen hinsichtlich x, y, z und Elimination der Grössen a, b, c erhält man eine Resultante:

(2) $$f(xyz\;dx\,dy\,dz) = 0,$$

die, wenn dx, dy, dz als Bestimmungselemente einer Richtung aufgefasst werden, jedem Punkte des Raumes einen Kegel zuordnet, den Inbegriff nämlich der Richtungen aller Complex-Curven c, die durch den betreffenden Punkt gehen. Diese Kegel nenne ich *elementare Complex-Kegel*; ebenso wende ich den Ausdruck *elementare Complex-Richtung* an, um ein beliebiges Linien-Element $(dx\;dy\;dz)$ einer Complex-

*) Geometrie des Raumes n. 258. (1846).

Curve c zu bezeichnen. *Den Inbegriff aller einem Punkte entsprechenden elementaren Complex-Richtungen bildet der dem betreffenden Punkte zugeordnete elementare Complex-Kegel.*

Einem gegebenen Systeme (1), oder, wie man auch sagen kann, einem gegebenen Curven-Complexe entspricht eine bestimmte Differential-Gleichung ($f = 0$); dagegen giebt es unbegrenzt viele Systeme (1), welche auf dieselbe Differential-Gleichung ($f = 0$) führen. Wählt man nämlich eine beliebige Relation:

$$\psi(x\,y\,z\;dx\,dy\,dz\;\alpha) = 0,$$

in welcher α eine Constante bezeichnet, und sind:

$$\varphi_1(x\,y\,z\;\alpha\,\beta\,\gamma) = 0, \quad \varphi_2(x\,y\,z\;\alpha\,\beta\,\gamma) = 0 \tag{3}$$

die Integrale des simultanen Systems:

$$f = 0, \quad \psi = 0,$$

so ist es klar, dass auch die Gleichungen (3) durch Differentiation hinsichtlich x, y, z und Elimination der Grössen α, β, γ als Resultat:

$$f = 0$$

geben. *Es existiren also unbegrenzt viele Curven-Complexe, deren Gleichungen eine gegebene Relation $f(xyz\;dx\,dy\,dz) = 0$ befriedigen.* Eine jede Curve eines solchen Complexes wird von Curven c des ursprünglichen Complexes umhüllt, indem alle ihre Elemente Complex-Richtungen sind.

7. Eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln x, y, z ist nach Monge mit dem Problem äquivalent: die allgemeine Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten einen dem betreffenden Punkte nach einem beliebigen Gesetze zugeordneten Kegel berührt. Indem man hierbei in der gegebenen partiellen Differential-Gleichung

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0$$

x, y, z als Parameter, p und q dagegen als Ebenen-Coordinaten auffasst, kann man sagen, dass $F = 0$ die allgemeine Gleichung des besprochenen Kegel-Systems in Ebenen-Coordinaten darstellt. Lagrange und Monge haben die Integration einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung auf die Bestimmung eines gewissen Curven-Complexes, die sogenannten Charakteristiken, zurückgeführt, indem sie gezeigt haben, dass wenn einfach unendlich viele Charakteristiken eine Curve umhüllen, sie immer eine Integralfläche erzeugen. Es ist zu bemerken, dass die Differential-Gleichung der Charakteristiken:

$$f(x\,y\,z\;dx\,dy\,dz) = 0$$

mit der partiellen Differential-Gleichung als äquivalent aufzufassen ist; beide Gleichungen geben nämlich die analytische Definition des besprochenen Kegel-Systems.

8. Sei nun gegeben eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung D_1, die zugehörige Differential-Gleichung der Charakteristiken $f = 0$, und endlich dreifach unendlich viele Curven c, die ebenso $f = 0$ genügen. Betrachten wir hier eine beliebige Integralfläche U_0, eine auf derselben gelegene Charakteristik k_0 und ferner eine Complex-Curve c_0, die k_0 berührt, so behaupte ich, dass c_0 *die Fläche U_0 dreipunktig berührt.*

Nennen wir nämlich die beiden gemeinsamen, unendlich nahen Punkte der Curven c_0 und k_0, p_1 und p_2, ferner die nächstfolgenden Punkte unserer Curven bezüglich π und p_3, so ist es klar, dass der elementare Complex-Kegel, dessen Spitze in p_2 liegt, das Flächen-Element $(p_2 p_3 \pi)$ enthält. Nun berührt der Kegel die Integral-Fläche U_0 nach der Erzeugenden $p_2 p_3$, und also gehört das Element $(p_2 p_3 \pi)$ zugleich der Fläche U_0 an, welche somit den Punkt π enthält. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Dieser Satz lässt sich dahin verallgemeinern, dass wenn c_0 n consecutive Punkte mit der Charakteristik k_0 gemein hat, $(n + 1)$ Schnittpunkte von c_0 und der Integralfläche U_0 zusammenfallen.*)

9. Die Forderung, dass eine Fläche $z = F(xy)$ in einem jeden Punkte drei consecutive Punkte mit einer Complex-Curve c gemein haben soll, drückt sich durch eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung D_2**) aus, und zwar sieht man leicht, dass einfach unendlich viele c immer eine Integralfläche bilden. Man kennt somit das allgemeine zweite Integral der Gleichung D_2 mit zwei arbiträren Functionen. Nun sagt der Satz der letzten Nummer, dass auch die Integralflächen der Gleichung D_1 — die im Allgemeinen nicht von Complex-Curven c erzeugt werden — in einem jeden ihrer Punkte dreipunktig von einer c berührt werden, und also ist D_1 ein singuläres erstes Integral unserer Differential-Gleichung zweiter Ordnung. *Ich behaupte, dass es sonst kein weiteres singuläres Integral giebt.*

Sei nämlich ϑ eine Integralfläche der Gleichung D_2, die nicht von Curven c gebildet wird. Es gehen dann durch jeden Punkt der Fläche zwei zusammenfallende Curven c, die dieselbe in diesem Punkte berühren. Hieraus folgt, dass der zugehörige elementare Complex-Kegel die Fläche berührt, dass also dieselbe der Gleichung D_1 genügt. — Die beiden letzten Nummern geben die folgende bemerkenswerthe geometrische Interpretation partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln.

---

*) Entsprechende Sätze gelten für einen Raum mit beliebig vielen Dimensionen.

**) Diese Differential Gleichung hat die folgende Form:

$$r + 2Ns + N^2t + M = 0,$$

wobei N und M von x, y, z, p, q abhängen.

Die Aufgabe: alle Flächen zu finden, die mit zweifach unendlich vielen Curven eines gegebenen Complexes jedesmal drei consecutive Punkte gemein haben, drückt sich durch eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung aus. Alle Complexe, deren Gleichungen einer gegebenen Relation:

$$f(x\, y\, z\; dx\, dy\, dz) = 0$$

genügen, führen auf dieselbe partielle Gleichung, und zwar befriedigen die zugehörigen Charakteristiken die Gleichung $f = 0$.

10. *Corollar. Die Aufgabe: alle Flächen zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linien-Complexe gehören, führt auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden des Complexes umhüllt werden. Die Charakteristiken sind in diesem Falle auf den Integralflächen*) Haupttangenten-Curven des einen Systems.*

Ich werde andeuten, wie man diesen Satz selbständig beweisen könnte.

Die partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden, ist bekanntlich der Ausdruck des folgenden Problems: die allgemeine Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten den betreffenden Complex-Kegel berührt. Nun ist die Osculationsebene einer Curve, deren Tangenten einem Linien-Complexe angehören, eine Tangentenebene des entsprechenden Complex-Kegels, und also berühren in unserem Falle die Osculationsebenen der Charakteristiken jedesmal die zugehörigen Integralflächen. Die Charakteristiken sind folglich Haupttangenten-Curven.

Ein jeder Linien-Complex bestimmt also dreifach unendlich viele Curven, die von Complex-Linien umhüllt werden und dabei die Eigenschaft besitzen, Haupttangenten-Curven auf einer jeden Fläche zu sein, die einfach unendlich viele solche Curven enthält, vorausgesetzt, dass immer zwei consecutive dieser Curven sich schneiden. Diese Curven, die in der Theorie der Linien-Complexe eine wichtige Rolle spielen werden (vergl. den dritten Abschnitt dieser Abhandlung), nenne ich *die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes.*

Herr Klein hat mir die Bemerkung gemacht, dass die Complex-Linien, die Plücker als singuläre Linien des Complexes bezeichnet, Haupttangenten-Curven desselben sind. Wird der Complex von den Tangenten einer Fläche oder von den Linien, die eine Curve schneiden, gebildet, so sind alle Complex-Linien singuläre Linien und also zugleich die Haupttangenten-Curven des Complexes.

---

*) Herr Darboux, dem ich diesen Satz im Sommer 1870 mittheilte, kannte damals denselben. Vergl. den Anfang und Schluss des zweiten Theiles.

§ 4.

Das Gleichungs-System $F_1(xyz\,XYZ)=0$, $F_2(xyz\,XYZ)=0$ bestimmt eine Reciprocität zwischen zwei Räumen.

11. Wir beginnen (cfr. § 1.) nun ein Studium der räumlichen Reciprocität, die durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad F_1(xyz\,XYZ)=0, \quad F_2(xyz\,XYZ)=0$$

bestimmt wird, wenn (xyz) und (XYZ) als Punkt-Coordinaten zweier Räume r und R*) interpretirt werden.

Bezeichnet man als *conjugirt* zwei Punkte (xyz) und (XYZ), deren Coordinaten-Werthe den Gleichungen (1) genügen, so kann man sagen, dass die einem Punkte (xyz) conjugirten Punkte (XYZ) eine Curve C bilden; dieselbe wird durch (1) dargestellt, vorausgesetzt, dass man x, y, z als Parameter, X, Y, Z dagegen als laufende Coordinaten auffasst. Den Punkten des Raumes r entsprechen somit dreifach unendlich viele Curven C, und ebenso tritt im Raume r ein Curven-Complex auf, dessen Curven c in demselben Verhältnisse zu den Punkten des Raumes R stehen. Die Punkte einer c haben hierbei einen gemeinsamen conjugirten Punkt in R, und also gehen ihre entsprechenden C durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Räume r und R werden durch die Gleichungen (1) *so auf einander bezogen, dass den Punkten des einen Raumes die Curven eines Complexes im zweiten Raume entsprechen. Complex-Curven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden sich hierbei als die Punkte der dem gegebenen Punkte entsprechenden Complex-Curve ab.*

12. Es lässt sich nun zeigen, dass die Gleichungen (1) eine allgemeine Reciprocität zwischen Gebilden der beiden Räume bestimmen, und zwar insbesondere zwischen Curven, die von Complex-Curven c und C umhüllt werden.

Wenn zwei Complex-Curven des einen Raumes einen gemeinsamen Punkt haben — was offenbar im Allgemeinen nicht der Fall ist —, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Complex-Curve des zweiten Raumes; insbesondere ist zu bemerken, dass zwei unendlich nahen sich schneidenden Complex-Curven im anderen Raume Punkte entsprechen, deren infinitesimale Verbindungs-Linie eine Complex-Richtung ist. Man betrachte nun eine von einfach unendlich vielen c umhüllte Curve σ und die den Punkten dieser letzten Curve entsprechenden C; es ist einleuchtend, dass jedesmal zwei consecutive C sich schneiden, dass also ihr Inbegriff eine Umhüllungs-Curve Σ bestimmt. Führt man die

*) Gebilde des Raumes r werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet; dagegen brauche ich grosse Buchstaben für Alles, was dem Raume R angehört.

entsprechende Operation auf Σ aus, so erhält man eine von Complex-Curven c umhüllte Curve σ', und zwar behaupte ich, dass σ' eben die ursprüngliche Curve σ ist.

Um dieses zu beweisen, betrachte man einerseits ein von Complex-Curven c gebildetes krummliniges Polygon, andererseits die den besprochenen Curven zugehörigen Bildpunkte, welche offenbar paarweise auf Complex-Curven C liegen, auf denjenigen nämlich, die den Ecken des gegebenen Polygons entsprechen. Dieses neue Polygon und das gegebene stehen also in einem vollständigen reciproken Verhältnisse.

Durch Grenz-Uebergang erhält man zwei von Complex-Curven c und C umhüllte Curven, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, dass den Punkten der einen diejenigen Complex-Curven entsprechen, welche die zweite umhüllen.

Eine jede von Complex-Curven umhüllte Curve bildet sich also für eine zweifache Auffassung ab als eine andere ebenso von Complex-Curven umhüllte Curve, die wir als die *reciproke* der gegebenen hinsichtlich des Gleichungs-Systems (1) bezeichnen; und offenbar kann man, wenn die Gleichungen der einen Curve gegeben sind, diejenigen der reciproken durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Es ist auch zu bemerken, dass die *elementaren Complex-Richtungen* ($dx\,dy\,dz$) *und* ($dX\,dY\,dZ$) *sich paarweise als reciproke zusammenordnen,* dass also zwei von Complex-Curven umhüllte Curven, zwischen denen Berührung stattfindet, sich als eben solche Curven im zweiten Raume abbilden.

13. Auch unter anderen Raumgebilden bestimmen die Gleichungen (1), und zwar für eine zweifache Auffassung, ein Entsprechen, welches aber im Allgemeinen keine *vollständige* Reciprocität ist.

Die elementaren Complex-Kegel, deren Spitzen auf einer Fläche f liegen, schneiden die entsprechenden Tangentenebenen jedesmal nach n Geraden — n bezeichnet die Ordnung der Complex-Kegel — und ordnen dadurch jedem Punkte der Fläche n elementare Complex-Richtungen zu. Die continuirliche Aufeinanderfolge dieser Richtungen bilden eine die Fläche $n$fach bedeckende Schaar von Curven σ, die sämmtlich von Complex-Curven c umhüllt werden. Die entsprechenden reciproken Curven Σ erzeugen eine Fläche F, die wir als Bildfläche der gegebenen auffassen. Dass das Reciprocitäts-Verhältniss nicht vollständig ist, liegt darin, dass durch jeden Punkt der Fläche F im Allgemeinen nur eine Curve Σ geht. Ausserdem liegen also auf F eine Schaar von Curven Σ', die ebenso von Complex-Curven C umhüllt sind, und zwar gehen $(N-1)$ Σ' durch jeden Punkt unserer Fläche, vorausgesetzt, dass N die Ordnung der elementaren Complex-Kegel des Raumes R bezeichnet. Die den Curven Σ' zugehörigen reciproken

bilden eine Fläche φ, die gewissermassen der gegebenen Fläche f associirt ist.

Durch jeden Punkt der Fläche f gehen, wie gesagt wurde, n Curven σ, und also ist dieser Punkt das Bild einer Complex-Curve C, welche n Curven Σ berührt; demzufolge berührt unsere C die Fläche F in n Punkten. Andererseits geht durch jeden Punkt der Fläche F nur eine Σ, dagegen $(N-1)\,\Sigma'$ und also ist unser Punkt das Bild einer Complex-Curve c, welche f in einem Punkte, φ dagegen in $(N-1)$ Punkten berührt. Führen wir nun — in Analogie mit der für Linien-Systeme gebräuchlichen Terminologie — die Bezeichnungen *„Curven-Congruenz"* und *„Brennfläche*) einer Curven-Congruenz"* ein, so können wir das Obenstehende folgendermassen zusammenfassen:

Die Punkte einer Fläche f bilden sich in R ab als zweifach unendlich viele Complex-Curven C, als eine Curven-Congruenz, deren Brennfläche F wir als Bildfläche der gegebenen betrachten. Ebenso bilden die Punkte der Fläche F sich als zweifach unendlich viele Curven c ab, und zwar enthält die zugehörige Brennfläche die gegebene Fläche f als reductiblen Theil.

14. Die vorstehenden Betrachtungen gelten auch, wenn f und F Flächen-Elemente sind. *Unsere Reciprocität bestimmt ein Entsprechen zwischen Flächen-Elementen.* Einem gegebenen Elemente des Raumes r entsprechen n Elemente des zweiten Raumes; andererseits entsprechen jedem Elemente des Raumes R N Elemente in r. Sollen also die Gleichungen (1) eine vollständige Reciprocität, das heisst ein eindeutiges Entsprechen zwischen Flächen-Elementen bestimmen, so müssen die beiden Zahlen n und N gleich 1 sein. Hierher gehört, wie ich beiläufig bemerke, die Ampère'sche Transformation (cfr. § 7., 22.). Dagegen haben wir gefunden, dass das Entsprechen zwischen elementaren Complex-Richtungen im Allgemeinen ein eindeutiges ist, und in der That *erhält man die klarste Vorstellung über unsere Reciprocität, wenn man eine jede Figur als von elementaren Complex-Richtungen gebildet auffasst. Beispielsweise können wir sagen, dass die zweifach unendlich vielen elementaren Complex-Richtungen einer Fläche f sich als die elementaren Complex-Richtungen der entsprechenden Fläche F abbilden.*

Sei nun gegeben eine Curve k, die wir als eine Röhrenfläche von infinitesimalem Querschnitt auffassen. Alle elementaren Complex-Richtungen, die k schneiden, geben zweifach unendlich viele Complex-Richtungen $(dX\, dY\, dZ)$, deren Inbegriff im Allgemeinen eine Fläche

*) Definirt man eine Curven-Congruenz durch eine *lineare* partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, so ist die Brennfläche dasjenige, was man im Allgemeinen als das *singuläre Integral* der betreffenden Differential-Gleichung bezeichnet.

F bilden, welche das Bild von k ist. Diese Definition der Bildfläche ist mit den beiden folgenden äquivalent: F enthält einfach unendlich viele Curven C, die sich als die Punkte der Curve k abbilden. Alle Complex-Curven c, die k schneiden, bilden sich als die Punkte der Fläche F ab.

Die Gleichungen $F_1(xyz\,XYZ) = 0$, $F_2(xyz\,XYZ) = 0$ führen somit beliebig gegebene Gebilde in neue über und sie können also dazu dienen, geometrische Theoreme und Probleme zu transformiren. Im zweiten Abschnitte machen wir für eine particuläre Form der Abbildungs-Gleichungen wichtige Anwendungen von diesem Transformations-Princip.

§ 5.

Bestimmung aller Raum-Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist.

15. In der Theorie der partiellen Differential-Gleichungen spielen bekanntlich Transformationen, die sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$(1) \qquad X = f_1(xyz\,pq), \quad Y = f_2(xyz\,pq), \quad Z = f_3(xyz\,pq)$$

eine wichtige Rolle. Es sollen hier p und q, wie auch später P und Q, die partiellen Derivirten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ bezeichnen. Bemerkenswerth ist insbesondere der Fall, dass aus den Gleichungen (1) sich Ausdrücke für P und Q, die ebenso nur von $(xyz\,pq)$ abhängen, herleiten lassen. Alsdann besitzt unsere Transformation die Eigenschaft, Flächen, die sich berühren, in eben solche überzuführen, und zwar werde ich in diesem Paragraphen eine wie es scheint neue analytisch-geometrische Eintheilung dieser Transformationen in drei Classen geben.

Die Gleichungen (1) ordnen einem beliebigen Flächen-Elemente $(x\,y\,z\,p\,q)$ einen Punkt $(X\,Y\,Z)$ zu, und also entsprechen den Elementen einer Fläche f alle Punkte einer Fläche F, die freilich in eine Curve oder sogar in einen Punkt ausarten kann. Lässt man eine Fläche π variiren, in solcher Weise, dass ein Flächen-Element derselben ungeändert bleibt, so berühren sich die entsprechenden Π in einem (oder mehreren) gemeinsamen Elementen E. Wenn Π in eine Curve ausartet, so enthält dieselbe, wie eine Continuitäts-Betrachtung zeigt, zwei consecutive Punkte des Elementes E. Wird endlich Π eine Punkt-Kugel (unendlich kleine Kugel), so liegt dieselbe auf E.

Man betrachte nun dreifach unendlich viele Flächen f, die ganz beliebig gewählt sind, und die entsprechenden Gebilde F des zweiten Raumes, die entweder Flächen oder Curven oder Punkt-Kugeln sind. Eine Fläche φ wird von zweifach unendlich vielen f umhüllt, und nach dem Vorstehenden berühren dann die entsprechenden zweifach

unendlich vielen F die Bildfläche Φ. Hierin liegt eine allgemeine geometrische Definition unserer Transformationen.

16. Wählen wir insbesondere als Flächen f alle Punkt-Kugeln des Raumes r, so finden wir die analytische Definition der Gebilde F, indem wir zwischen den Gleichungen:

$$X = f_1(x\,y\,z\,p\,q), \quad Y = f_2(x\,y\,z\,p\,q), \quad Z = f_3(x\,y\,z\,p\,q)$$

p und q eliminiren. Es sind hier drei Fälle möglich; entweder existirt nur *eine* Relation zwischen $(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)$, und dann gehört die Transformation*) unter die von Plücker aufgestellte allgemeine Reciprocität; oder es finden sich zwei solche Relationen, was der von mir aufgestellten Reciprocität entspricht; oder es existiren drei unabhängige Gleichungen zwischen den Punkt-Coordinaten der beiden Räume, was bei allen Punkt-Transformationen der Fall ist.

Es giebt drei distincte Classen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist; die erste entspricht der Plücker'schen Reciprocität des Raumes, und wird durch eine aequatio directrix:

$$F(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$

definirt; die zweite entspricht der von mir aufgestellten Reciprocität; dieselbe wird durch zwei Gleichungen:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0, \quad F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$

definirt; die dritte endlich umfasst alle Punkt-Transformationen; dieselbe wird durch drei Gleichungen:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0, \quad F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0, \quad F_3(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$

*bestimmt***).

Die beiden ersten Classen von Transformationen beruhen auf der Einführung eines neuen Raumelements, die letzte auf der Anwendung eines neuen Coordinaten-Systems.

§ 6.

Transformation partieller Differential-Gleichungen.

17. Legendre***) hat eine allgemeine Methode gegeben, um — in der Sprache der modernen Geometrie — eine partielle Differential-Gleichung zwischen Punkt-Coordinaten x, y, z in eine zwi-

*) Vergl. Du-Bois-Reymond, partielle Differential-Gleichungen. § 75–81.

**) Für einen Raum mit n Dimensionen giebt es n distincte Classen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Bezeichnet m eine beliebige ganze, positive Zahl, die nicht grösser als n ist, so können wir sagen, dass eine jede Classe durch m Gleichungen zwischen den Coordinaten des neuen und des transformirten Raumes definirt wird.

***) Die hier gegebene allgemeine Auffassung der sogenannten Legendre'schen Transformation gehört wohl Plücker. Crelle IX. 1831.

schen Ebenen-Coordinaten t, u, v überzuführen; hierbei kann man t, u, v auch als Punkt-Coordinaten eines auf den gegebenen reciprok bezogenen Raumes betrachten. *Ebenso ist es, wenn man die Curven oder Flächen eines Complexes als Raumelemente einführt, möglich eine Differential-Gleichung in den Variablen x, y, z in eine zwischen den Coordinaten X, Y, Z des neuen Elementes zu transformiren.* Auch hier ist zu bemerken, dass man in der neuen Gleichung X, Y, Z als Punkt-Coordinaten des Raumes R interpretiren kann, und zwar wird diese Auffassung die hervortretende in unserer Darstellung sein.

Der analytische Beweis für die Wahrheit der vorstehenden Behauptung liegt darin, dass der besprochene Wechsel des Raumelements sich durch fünf Relationen zwischen $(x\,y\,z\,p\,q)$ und $(X\,Y\,Z\,P\,Q)$ ausdrücken lässt. Wenn man aber in eine partielle Differential-Gleichung:

$$\Pi(x\,y\,z\,p\,q) = 0$$

statt x, y, z, p, q die Werthe dieser Grössen durch X, Y, Z, P, Q einsetzt, so erhält man eine neue partielle Differential-Gleichung erster Ordnung. Geometrisch kann man dasselbe in folgender Weise einsehen.

Es sei gegeben eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung $\Pi(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ und alle Flächen φ, die ein sogenanntes vollständiges Integral bilden; hierbei ist zu erinnern, dass eine jede andere Integralfläche f von einfach unendlich vielen φ umhüllt wird. Man betrachte ferner die zugehörigen Bildflächen Φ und F; wir werden beweisen, dass jede F von einfach unendlich vielen Φ umhüllt wird. Aus den Entwickelungen des letzten Paragraphen folgt, dass wenn zwei Flächen einander nach einer Curve berühren, das heisst einfach unendlich viele Flächen-Elemente gemein haben, die Bildflächen in demselben gegenseitigen Verhältnisse stehen. Dieses vorausgesetzt betrachte man eine Integralfläche f_0, ferner alle einfach unendlich vielen φ_0, welche dieselbe nach einer Charakteristik berühren und endlich die entsprechenden Flächen F_0 und Φ_0. Es ist klar, dass jede Φ_0 die Fläche F_0 nach einer Curve berührt, dass also F_0 die Umhüllungsfläche der Φ_0 ist. Wir sehen somit, dass unsere Transformation alle Integralflächen einer partiellen Differential-Gleichung $\Pi(x\,y\,z\,p\,q) = 0$ in die Integralflächen einer neuen partiellen Differential-Gleichung $F(X\,Y\,Z\,P\,Q) = 0$ überführt, und das war eben unsere Behauptung.

18. *Wir betrachten nun eine, durch zwei auf einander bezogene Curven-Complexe c und C definirte Transformation; wenden wir dieselbe auf die dem Curven-Complexe c zugehörige* (§ 3., 9.) *partielle Differential-Gleichung erster Ordnung an, so zerfällt die entsprechende Diffe-*

rential-Gleichung zwischen X, Y, Z in zwei Gleichungen, unter denen die eine eben dem Curven-Complexe C entspricht.

Sei nämlich gegeben eine Fläche f, die in allen ihren Punkten die zugehörigen elementaren Complex-Kegel berührt. Diese Kegel bestimmen in jedem Flächen-Elemente (§ 4., 13.) n elementare Complex-Richtungen, unter denen jedesmal zwei zusammenfallen. Die auf f gelegenen Curven, die von Complex-Curven c umhüllt werden, theilen sich also in zwei Schaaren: die Charakteristiken der Fläche f und eine Schaar, die dieselbe $(n-2)$ fach bedeckt. Die Punkte unserer Fläche bilden sich somit ab als zweifach unendlich viele Curven C, deren Brennfläche in zwei Flächen F_1 und F_2 zerfallen ist, und zwar berühren die Curven C die Fläche F_1 in zwei zusammenfallenden Punkten, dagegen die Fläche F_2 in $(n-2)$ getrennten Punkten. Die Fläche F_1 genügt also nach § 3., 9. der den Complex-Curven C zugehörigen partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung, während F_2 eine andere Differential-Gleichung befriedigt. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Unser Satz ist mit den beiden folgenden identisch:

Wenn ein Flächen-Element des Raumes r einen elementaren Complex-Kegel berührt, so bildet dasselbe sich in R ab durch $(n-1)$ Elemente, unter denen das eine zweifach zählt und dabei einen elementaren Complex-Kegel berührt).*

Die Complex-Curven c und C bestimmen zwei partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken reciproke Curven hinsichtlich der Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$ sind.

19. Die letzte Form unseres Satzes giebt die folgende Methode zur Transformation partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Man bestimme die Differential-Gleichung $f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz)=0$ der Charakteristiken und wähle eine *beliebige* Relation:

$$\psi(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz\,X)=0,$$

in welcher X eine Constante bezeichnet. Es seien:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0,\quad F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0$$

die Integrale mit zwei arbiträren Constanten Y und Z des simultanen Systems:

*) Einem Elemente des einen Raumes entsprechen im Allgemeinen n bezüglich N Elemente des zweiten Raumes. Demzufolge ordnen die Elemente jedes Raumes sich in Gruppen auf n oder N zusammen, wir werden sagen als *associirte* Elemente. Wenn unsere Transformation durch *zwei* Gleichungen $(F_1=0)$, $(F_2=0)$ definirt wird, so giebt es nach den Entwickelungen des Textes in jedem Raume vierfach unendlich viele Elemente, die mit einem associirten zusammengefallen sind, und zwar ist es bemerkenswerth, dass ein solches Element sich als ein ähnliches im zweiten Raume abbildet. Der Satz des Textes gilt in dieser Form auch für Transformationen, die durch *eine* Gleichung $F(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0$ definirt werden.

$$f = 0, \ \psi = 0.$$

Die Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ geben durch Differentiation und Elimination ein Resultat:

$$F_3(X\ Y\ Z\ dX\ dY\ dZ) = 0,$$

welche wir auffassen als bestimmend eine partielle Differential-Gleichung:

$$F_4\left(X\ Y\ Z\ \frac{\partial Z}{\partial X}\ \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0,$$

die sich nach gewöhnlichen Methoden finden lässt.

Die gegebene partielle Differential-Gleichung und die eben gefundene ($F_1 = 0$) *sind äquivalente Probleme, in dem Sinne, dass die zugehörigen Charakteristiken reciproke Curven hinsichtlich des Systems* $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ *sind.*

Es ist nicht schwer, die Wahrheit der beiden folgenden Behauptungen, die ich als Beispiele aufstelle, zu erkennen.

Transformirt man nach der angegebenen Methode die einem Linien-Complexe (§ 3., 10.) zugehörige partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, so ist die neue Gleichung $F_4 = 0$ nur vom *zweiten* Grade. Dieses liegt darin, dass die Geraden einer Linien-Congruenz die Brennfläche in *zwei* Punkten berühren*).

Transformirt man dagegen die einem Kegelschnitt-Complexe zugehörige partielle Differential-Gleichung (§ 3., 9.), so ist die neue Differential-Gleichung im Allgemeinen vom dreissigsten Grade. Dieses liegt darin, dass wenn zweifach unendlich viele Kegelschnitte eine Congruenz bilden, jeder Kegelschnitt die Brennfläche in sechs Punkten berührt. Demzufolge sind die neuen elementaren Complex-Kegel von sechster Ordnung und also von dreissigster Classe u. s. w.

20. Hier mögen noch die folgenden Bemerkungen, auf deren Beweis ich nicht eingehe, ihren Platz finden.

a. Wenn in der letzten Nummer $f = 0$ die Form:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \text{ **)}$$

besitzt, so sind die Charakteristiken der partiellen Differential-Gleichung $F_4 = 0$ eben diejenigen Curven, die durch $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ dargestellt werden, wenn man $x\ y\ z$ als Parameter auffasst. Wir können hieraus als wesentliche Eigenschaft der Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung die folgende schliessen:

---

*) Die hier angedeutete einfache Form, welche die einem Linien-Complexe zugehörige partielle Differential-Gleichung annehmen kann, gründet sich nach den Entwickelungen in § 2. (vergl. auch den dritten Abschnitt dieser Abhandlung) darauf, dass man die Geraden des betreffenden Linien-Complexes als Raumelemente einführt.

**) X, Y, Z sollen hier beliebige Funktionen von $x\ y\ z$ bezeichnen.

Die Curven eines gegebenen Complexes sind Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung, wenn in einer beliebigen, diesem Complexe angehörigen Congruenz jede Curve) die Brennfläche nur in einem Punkte berührt. Hierbei wird von der allen solchen Congruenzen möglicherweise gemeinsamen Brennfläche abgesehen.*

Wenn die elementaren Complex-Kegel beider Räume in ebene Strahl-Büschel zerfallen, so liegen die dreifach unendlich vielen Complex-Curven jedes Raumes auf *einfach* unendlich vielen Flächen — das heisst, die Gleichungen:

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz)=0,\quad F_3(X\,Y\,Z\,dX\,dY\,dZ)=0$$

die hinsichtlich der Differentiale linear sind, können integrirt werden. Dieser Satz ist, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, von Bedeutung, wenn man insbesondere alle eindeutigen Transformationen sucht.

b. Alle Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, besitzen die charakteristische Eigenschaft, die Monge-Ampère'sche partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung:

$$A(rt-s^2)+Br+Cs+Dt+E=0$$

in eine ähnliche Gleichung überzuführen. Wenn die gegebene Gleichung ein allgemeines erstes Integral zugiebt, so ist dieses offenbar auch mit der neuen der Fall. (Cfr. eine Abhandlung von Boole in Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 61.)

c. Im Allgemeinen entsprechen bei unseren Transformationen einem gegebenen Elemente eine endliche Zahl Elemente des zweiten Raumes. Es giebt indessen Ausnahm-Elemente, die sich als unbegrenzt viele Elemente abbilden. Ohne auf eine vollständige Discussion dieser wichtigen Theorie einzugehen, bemerke ich, dass wenn ein Element einfach unendlich viele Complex-Richtungen enthält, dasselbe ein Ausnahm-Element ist. Dieses liegt unmittelbar darin, dass ein Element sich im Allgemeinen in so viele Elemente transformirt, wie dasselbe Complex-Richtungen enthält (§ 4., 13. und 14.). Wenn die elementaren Complex-Kegel des Raumes r in ebene Büschel zerfallen sind, so erhalten wir also in diesem Raume *dreifach* unendlich viele Ausnahm-Elemente, deren Inbegriff den *vierfach* unendlich vielen Elementen entsprechen, welche sämmtliche elementare Complex-Kegel des Raumes R umhüllen.

*) Jede Curve einer solchen Congruenz schneidet nur *eine* unendlich benachbarte Curve.

Zweiter Abschnitt.

Die Plücker'sche Linien-Geometrie*) lässt sich in eine Kugel-Geometrie transformiren.

In diesem Abschnitte betrachte ich einen besonderen Fall der früher entwickelten allgemeinen Theorie, denjenigen nämlich, in welchem die beiden auf einander bezogenen Curven-Complexe Linien-Complexe sind. Doch ist es nur ein Degenerations-Fall, den ich einem näheren Studium unterwerfe. Indessen glaube ich, dass es Interesse darbieten würde, sowohl den allgemeinen Fall wie alle möglichen Special-Fälle genau zu untersuchen.

§ 7.

Die beiden Curven-Complexe sind Linien-Complexe.

21. Setzen wir voraus, dass die beiden Gleichungen der Reciprocität hinsichtlich $(x\,y\,z)$ und $(X\,Y\,Z)$ linear sind:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} X(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+Y(a_2x+b_2y+c_2z+d_2) \\ +Z(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)+(a_4x+b_4y+c_4z+d_4)=0 \\ X(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1)+Y(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2) \\ +Z(\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z+\delta_3)+(\alpha_4x+\beta_4y+\gamma_4z+\delta_4)=0, \end{array}\right.$$

so bilden offenbar die einem gegebenen Punkte conjugirten Punkte des zweiten Raumes eine Gerade. Die beiden Curven-Complexe sind Plücker'sche Linien-Complexe, und also bestimmen die Gleichungen (1) ein Entsprechen zwischen r und R, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) *In jedem Raume findet sich ein Linien-Complex, dessen Gerade sich als die Punkte des zweiten Raumes abbilden.*

b) *Wenn ein Punkt eine Complex-Linie beschreibt, so dreht sich die entsprechende Gerade um den Bildpunkt der durchlaufenen Linie.*

c) *Curven, deren Tangenten bez. den beiden Complexen angehören, ordnen sich paarweise als reciproke zusammen, dergestalt, dass die Tangenten der einen sich als die Punkte der zweiten abbilden.*

d) *Einer Fläche f wird für eine zweifache Auffassung eine Fläche F zugeordnet. Einerseits ist F die Brennfläche derjenigen Linien-Congruenz, deren Gerade den Punkten von f entsprechen; andererseits sind*

---

*) Hinsichtlich der Theorie der Complexe setze ich als bekannt voraus: Plücker, Neue Geometrie des Raumes... 1868, 69; Klein, Zur Theorie der Complexe... Math. Ann. II, 2. Herrn Battaglini's Arbeiten über Linien-Complexe kann ich nicht citiren, weil sie mir unzugänglich sind.

die Punkte von F das Bild aller Tangenten der Fläche f, welche dem betreffenden Linien-Complexe angehören *).

e) *Auf den eben besprochenen Flächen ordnen sich alle Curven paarweise als conjugirte zusammen. Die Punkte einer solchen Curve transformiren sich in die Erzeugenden einer Linienfläche, welche die conjugirte Curve enthält und nach derselben die Fläche f oder F berührt.*

f) *Einer Curve, deren Tangenten dem betreffenden Complexe angehören, entspricht als conjugirte eine ebenso von Complex-Linien umhüllte Curve und zwar eben diejenige, die wir als die reciproke der gegebenen bezeichnet haben.*

Der Beweis für die unter e) aufgestellte Behauptung liegt darin, dass eine Complex-Linie und ein auf derselben gelegener Punkt sich als ein Punkt und eine durch denselben gehende Complex-Linie abbilden.

22. Eine jede der Gleichungen (1) bestimmt ein homographisches Entsprechen zwischen den Punkten und Ebenen der beiden Räume, und also lässt sich jeder unserer Complexe definiren als der Inbegriff der Durchschnitts-Geraden von homographisch entsprechenden Ebenen oder der Verbindungs-Linien von homographisch zusammen gehörenden Punkten. Der hierdurch bestimmte Linien-Complex zweiten Grades ist nach den Untersuchungen des Herrn Reye**) mit demjenigen Linien-Systeme identisch, welches Binet zuerst als den Inbegriff stationärer Umdrehungs-Axen eines materiellen Körpers betrachtet hat, und welches später mehrere Mathematiker, insbesondere die Herren Chasles und Reye, untersucht haben.

Wenn die Constanten der Gleichungen (1) particularisirt sind, so können die Complexe entweder eine specielle gegenseitige Lage erhalten — sie können z. B. zusammenfallen, welchen Fall Herr Reye in seiner Geometrie der Lage betrachtet, indem er zugleich die hier untersuchte Abbildung des Complexes wie auch den unter b) angeführten Satz angiebt — oder selbst particularisirt werden. Ohne hier auf eine Discussion aller möglichen Fälle einzugehen, hebe ich die beiden folgenden wichtigsten Degenerationen hervor***).

Die beiden Complexe können specielle lineare Complexe sein. Dieser Fall führt auf die bekannte Ampère'sche Transformation, die also darauf beruht, dass man alle Geraden, die eine feste Gerade

---

*) Dass die Reciprocität nicht vollständig ist, liegt darin, dass die Fläche F die vollständige Brennfläche der zugehörigen Congruenz ist; dagegen umhüllen die Linien der zweiten Congruenz ausser f noch eine zweite Fläche.

**) Reye, Geometrie der Lage, II. Abtheilung 1868, p. 116—172.

***) Lie, Repräsentation des Imaginären, Acad. zu Christiania. Februar und August 1869. Die in dieser Abhandlung § 17., § 25., § 27.—29. betrachtete räumliche Verwandtschaft ist mit unserer jetzigen identisch. In § 25. bespreche ich die erste der beiden Degenerationen.

schneiden, als Raumelement anstatt des Punkts oder der Ebene einführt. Die Ampère'schen Transformations-Gleichungen:

$$X = p, \quad Y + y = 0, \quad Z + z + px = 0$$

geben nämlich zwischen $(x\, y\, z\, X\, Y\, Z)$ die beiden Relationen:

$$Y + y = 0; \quad Z + z + Xx = 0,$$

welche offenbar eine particuläre und symmetrische Form der Gleichungen (1) bilden.

Der eine Complex kann in den Inbegriff aller Geraden, die einen festen Kegelschnitt schneiden, übergehen; alsdann ist der zweite Complex ein allgemeiner linearer*). Diese Degeneration werde ich im Folgenden unter der Voraussetzung, dass der fundamentale Kegelschnitt der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis ist, näher untersuchen.

23. Wir wissen, dass die beiden Curven-Complexe Linien-Complexe sind, wenn die Gleichungen der Reciprocität hinsichtlich der beiden Systeme von Variabeln $(x\, y\, z)$ und $(X\, Y\, Z)$ linear sind, und wir stellen uns nun die Frage, ob diese hinreichende Bedingung auch nothwendig ist. Es ist dies, wie jetzt gezeigt werden soll, allerdings der Fall, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass das Entsprechen ein eindeutiges sein soll. Ich bemerke übrigens, dass diese Frage, die an und für sich Interesse darbietet, für die folgenden Theorien keine Bedeutung hat.

Wenn der eine Complex ein Linien-Complex ist, so müssen die elementaren Complex-Kegel des zweiten Complexes, der im Allgemeinen ein Curven-Complex ist, in eine Anzahl von Kegeln zweiten Grades zerfallen. Der Beweis dieses Satzes liegt darin, dass die Geraden einer allgemeinen Linien-Congruenz die Brennfläche nur in zwei Punkten berühren. Wird insbesondere der eine Complex von den Tangenten einer Fläche gebildet, so zerfallen die elementaren Kegel des zweiten Complexes in ebene Strahl-Büschel. Stellt man nun die Forderung, dass die Abbildung eine eindeutige sein soll, so sind nur noch die drei folgenden Fälle möglich: 1) Die beiden Linien-Complexe sind allgemeine Complexe zweiten Grades. 2) Der eine Complex ist ein specieller Complex zweiten Grades, der zweite ein allgemeiner linearer.

*) Herr Nöther hat diese Abbildung des linearen Complexes, die ich übrigens selbständig gefunden habe, bereits gelegentlich gegeben. (Götting. Nachr. 1869: Zur Theorie der algebraischen Functionen.) Die für uns fundamentale Auffassung, dass die beiden Räume einen Complex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des zweiten Raumes abbilden, ist in der besprochenen Note nicht angedeutet. Ich möchte ferner hinzufügen, dass ich die Idee, ein Entsprechen zwischen den Flächen-Elementen zweier Räume auf die Abbildung eines Complexes zu begründen, nirgendwo ausgesprochen gefunden habe.

3) Die beiden Complexe sind specielle lineare. *Wir deuten an, wie sich hieraus herleiten lässt, dass die Gleichungen* (1) *die allgemeinste eindeutige gegenseitige Abbildung zweier Linien-Complexe definiren, wobei jedoch der Fall, dass beide Linien-Complexe specielle lineare sind, nicht vollständig in Betracht genommen ist**)

Wenn die beiden Complexe allgemeine Complexe zweiten Grades sind, so können die zugehörigen Singularitätenflächen, wie man leicht findet, keine *krummen* Flächen sein. Von jedem Punkte der Singularitätenfläche gehen nämlich zwei ebene Strahlen-Büschel aus, deren Gerade sich im zweiten Raume als die Punkte *einer* Geraden abbilden. Alle Geraden des einen Büschels transformiren sich hierbei in einen einzigen Punkt. Der Inbegriff aber aller Geraden, die keine selbstständige Abbildung haben, kann nicht ein Complex, höchstens eine Anahl von Congruenzen sein. Da jedoch alle ebenen Strahl-Büschel, deren Spitzen auf einer *krummen* Fläche liegen, nothwendigerweise einen Complex bilden, so muss die Singularitätenfläche aus Ebenen bestehen, und hieraus lässt sich schliessen, dass die beiden Complexe zweiten Grades solche sind, wie sie Binet zuerst betrachtet hat.

Wenn ein specieller Complex zweiten Grades und ein allgemeiner linearer auf einander abgebildet sind, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Die Linien des Complexes zweiten Grades könnten einen Kegelschnitt schneiden oder eine Fläche zweiten Grades umhüllen. Durch Betrachtungen, auf welche ich hier nicht eingehe, habe ich bewiesen, dass nur der erste Fall stattfindet.

§ 8.

Reciprocität zwischen einem linearen Complexe und dem Inbegriff aller Geraden, die den imaginären unendlich weit entfernten Kreis schneiden.

24. Wir wenden uns nun zu den Gleichungen:

(1) $$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z,$$

die, wie man sieht, hinsichtlich $(x\ y\ z)$ und $(X\ Y\ Z)$ linear sind, welche somit ein Entsprechen zwischen zwei Linien-Complexen bestimmen. Zuerst suchen wir die Gleichungen dieser Complexe in Plücker'schen Linien-Coordinaten.

Plücker schreibt die Gleichungen der geraden Linie in der Form:

$$rz = x - \varrho \qquad sz = y - \sigma.$$

*) Man stelle ein eindeutiges Entsprechen fest zwischen den Ebenen zweier linearen Büschel. Man beziehe darnach die Geraden jeder Ebene dualistisch auf die Punkte der entsprechenden Ebene. Man erhält hierdurch eine gegenseitige Abbildung zweier specieller linearer Complexe, die allgemeiner als diejenige ist, welche durch die Ampère'schen Gleichungen bestimmt wird.

und betrachtet dabei die fünf Grössen r, s, ϱ, σ, $(r\sigma - s\varrho)$ als Linien-Coordinaten. Also stellen die Gleichungen (1), wenn man in denselben X, Y, Z als Parameter auffasst, ein System von Geraden dar, deren Coordinaten den folgenden Relationen genügen:

$$r = -Z, \quad \varrho = X + iY, \quad s = X - iY, \quad \sigma = Z,$$

aus denen:

$$(2) \qquad r + \sigma = 0$$

hervorgeht. Der Linien-Complex im Raume r ist somit ein linearer, und zwar ein allgemeiner linearer Complex, der die unendlich weit entfernte Gerade*) der xy-Ebene enthält.

Um den Complex des Raumes R zu bestimmen, ersetze man das System (1) durch das äquivalente:

$$\frac{1}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right] Z = X - \frac{1}{2}\left[x + \frac{y}{z}\right]$$
$$\frac{1}{2i}\left[z + \frac{1}{z}\right] Z = Y - \frac{1}{2i}\left[x - \frac{y}{z}\right],$$

welches bei Vergleichung mit den allgemeinen Gleichungen einer Geraden:

$$(3) \qquad RZ = X - \mathrm{P} \qquad SZ = Y - \Sigma$$

die folgenden Relationen giebt:

$$R = \frac{1}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right] \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{y}{z}\right]$$
$$S = \frac{1}{2i}\left[z + \frac{1}{z}\right] \qquad \Sigma = \frac{1}{2i}\left[x - \frac{y}{z}\right]$$

und somit finden wir als Gleichung des besprochenen Complexes:

$$(4) \qquad R^2 + S^2 + 1 = 0.$$

Nun geben die Relationen (3):

$$R = \frac{dX}{dZ}, \qquad S = \frac{dY}{dZ}$$

und also kann (4) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Der Linien-Complex des Raumes R wird von den imaginären Geraden, deren Länge gleich Null**) ist, gebildet.

Die Gleichungen (1) *beziehen die beiden Räume so aufeinander, dass den Punkten des Raumes r die imaginären Geraden, deren Länge*

*) Diese Gerade tritt bei der Abbildung als Fundamental-Gebilde auf. Ich bezeichne diese Gerade zuweilen als die Fundamental-Gerade des Raumes r.

**) Indem ich der bequemen französischen Terminologie folge, bezeichne ich als *Gerade von der Länge Null* eine jede Linie, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneidet.

gleich Null ist, entsprechen, während die Punkte des Raumes R sich als die Linien des linearen Complexes $r + \sigma = 0$ *abbilden.*

Es ist zu bemerken, dass wenn ein Punkt eine Linie des Complexes $r + \sigma = 0$ durchläuft, die entsprechende Bildlinie eine infinitesimale Kugel, eine Punkt-Kugel beschreibt.

25. Nach der allgemeinen Theorie reciproker Curven (§ 4., 12.) lässt sich, wenn eine Curve bekannt ist, deren Tangenten dem einen Complexe gehören, die von Geraden des zweiten Complexes umhüllte Bildcurve durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Nun hat Lagrange die allgemeinen Gleichungen aller Curven gefunden, deren Tangenten den imaginären Kreis schneiden, und somit *ist es auch möglich die allgemeinen Gleichungen derjenigen Curven hinzuschreiben, deren Tangenten einem linearen Complexe gehören.*

Um uns nicht von unserem Ziele zu entfernen, gehen wir auf die einfachen geometrischen Relationen, die zwischen reciproken Curven der beiden Complexe stattfinden, nicht näher ein*).

Das durch die Gleichungen (1) bestimmte Entsprechen zwischen Flächen der beiden Räume besitzt einige Eigenthümlichkeiten, die ich kurz angeben werde, indem ich sonst auf die allgemeinen Entwickelungen des Paragraphen 4. verweise.

Wenn die Fläche f eine allgemeine Lage in r hat, so umhüllen die Tangenten derselben, die dem linearen Complexe gehören, ohnedies eine zweite Fläche φ. Die auf diesen beiden Flächen gelegenen Curven, deren Tangenten Complex-Linien sind, nennen wir σ_f und σ_φ. Die entsprechenden reciproken Curven Σ_f und Σ_φ erzeugen *dieselbe* Fläche F, die das Bild der gegebenen Fläche f, wie auch dasjenige der Fläche φ ist.

Nimmt man dagegen eine beliebige Fläche Φ des Raumes R, so umhüllen die Complex-Linien, welche Φ berühren, keine andere Fläche. Die von Complex-Linien umhüllten Curven Σ unserer Fläche bilden eine *irreductible* Schaar, die Φ zweifach bedeckt. Die reciproken Curven σ erzeugen die Bildfläche, die keine weiteren Curven enthält, deren Tangenten dem linearen Complexe gehören.

Endlich möchte ich aussprechen, dass unsere Abbildung die beiden folgenden Probleme in einander überführt: *Auf der Brennfläche einer*

---

*) Ich möchte darauf aufmerksam machen, dass einer Spitze der einen Curve eine stationäre Tangente im zweiten Raume entspricht. Ueberhaupt treten stationäre Tangenten als *regelmässige Singularitäten* auf, wenn man Curven als Linien-Gebilde, das heisst als von den Geraden eines *gegebenen* Complexes umhüllt, auffasst.

Congruenz, deren Linien einem linearen Complexe gehören, die Rückkehrkanten der Developpablen zu bestimmen; und: auf einer gegebenen Fläche die geodätischen Curven, deren Länge gleich Null ist, aufzufinden.

26. Ich werde mich später zuweilen auf die beiden folgenden Sätze stützen:

a. *Eine Fläche F n^{ter} Ordnung, die den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis als p-fache Linie enthält, ist das Bild einer Congruenz, deren Ordnung und Classe gleich $(n - p)$ sind.*

Eine imaginäre Linie, deren Länge gleich Null ist, schneidet nämlich F in $(n - p)$ im endlichen Raume gelegenen Punkten und also gehen ebensoviele Geraden der besprochenen Congruenz durch jeden Punkt des Raumes r. Bei einer Congruenz, die einem linearen Complexe gehört, ist aber bekanntlich die Classe gleich der Ordnung.

b. *Eine Curve C n^{ter} Ordnung, die den imaginären Kreis in p Punkten schneidet, bildet sich als eine Linienfläche $(2n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung ab.*

Eine Gerade des linearen Complexes $r + \sigma = 0$ schneidet nämlich die besprochene Linienfläche in eben so vielen Punkten, wie die Curve C und eine infinitesimale Kugel gemein haben, wobei jedoch die unendlich weit entfernten Punkte nicht mitzuzählen sind.

§ 9.

Die Plücker'sche Linien-Geometrie lässt sich in eine Kugel-Geometrie transformiren.

27. *In diesem Paragraphen begründe ich einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der Plücker'schen Linien-Geometrie und einer Geometrie, deren Element die Kugel ist.*

Die Gleichungen (1) des letzten Paragraphen transformiren die Geraden des Raumes r in die Kugeln des zweiten Raumes, und zwar in zweifacher Auffassung. Einerseits gehen diejenigen Linien des linearen Complexes $r + \sigma = 0$, die eine beliebige Gerade l_1 und also zugleich die ihr hinsichtlich des Complexes zugeordnete reciproke Polare l_2 schneiden, nach einem früheren Satze (26. a.) in die Punkte einer Kugel über; andererseits transformiren die Punkte der Linien l_1 und l_2 sich in die geradlinigen Erzeugenden dieser Kugel (26. b.).

Durch folgende analytische Betrachtungen findet man die Relationen, welche zwischen den Coordinaten der Linien l_1 und l_2, und andererseits den Mittelpunkts-Coordinaten X', Y', Z' und dem Radius H' der entsprechenden Kugel stattfinden. Sind:

$$r z = x - \varrho, \quad s z = y - \sigma$$

die Gleichungen der Geraden l_1 oder l_2, und erinnert man sich, dass die Linien des Complexes $r+\sigma=0$ sich folgendermassen darstellen lassen:

$$-Zz = x-(X+iY), \quad (X-iY)z = y-Z,$$

so sieht man, dass man zwischen diesen vier Gleichungen x, y, z eliminiren muss, um die Geraden (1) der Bedingung zu unterwerfen, l_1 zu schneiden. In dieser Weise findet man, dass die Coordinaten X, Y, Z unserer Complex-Linien, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Coordinaten X, Y, Z der entsprechenden Bildpunkte die Relation:

$$[X-(\varrho+s)]^2+[Y-i(s-\varrho)]^2+[Z-(\sigma-r)]^2=[\sigma+r]^2$$

befriedigen. Unsere frühere Behauptung ist hierdurch analytisch bewiesen; zugleich erhalten wir die folgenden Formeln:

$$(2) \quad X'=\varrho+s; \quad iY'=\varrho-s; \quad Z'=\sigma-r; \quad \pm H'=\sigma+r$$

oder die äquivalenten:

$$(3) \quad \begin{gathered} \varrho=\tfrac{1}{2}(X'+iY'); \quad s=\tfrac{1}{2}(X'-iY'); \quad \sigma=\tfrac{1}{2}(Z'\pm H'); \\ r=-\tfrac{1}{2}(Z'\mp H'), \end{gathered}$$

in denen man die Accente ohne Weiteres weglassen kann; *für unsere Auffassung ist nämlich der Punkt des Raumes R eine Kugel, deren Radius unendlich klein ist.*

Die Formeln*) (2) und (3) zeigen, dass eine gegebene Gerade des Raumes r in eine vollständig bestimmte Kugel übergeht; *dagegen bildet eine gegebene Kugel $[X, Y, Z, H^2]$ sich ab durch zwei Linien:*

$$(X, Y, Z, +H), \quad (X, Y, Z, -H),$$

welche reciproke Polaren hinsichtlich des linearen Complexes:

$$\pm H = r+\sigma = 0$$

sind. Jene Gleichungen bestimmen offenbar, wenn man H gleich Null setzt, die eindeutige Beziehung zwischen den Punkt-Kugeln des Raumes R und den Geraden des Complexes $H=0$.

Eine Ebene, das heisst eine Kugel, deren Radius unendlich gross ist, transformirt sich nach den Gleichungen (2) in zwei Linien l_1 und l_2, welche die unendlich weit entfernte Gerade der xy-Ebene schneiden. Dabei sind nach dem Vorstehenden die Punkte der Linien l_1 und l_2 das Bild aller Geraden unserer Ebene, welche durch die zugehörigen imaginären Kreispunkte gehen. Insbesondere bildet eine

*) Aus diesen Formeln in Verbindung mit dem auf dieselben analytisch begründeten Satze der nächsten Nummer lässt sich, wie mir Herr Klein bemerkte, die Relation zwischen Linien- und Kugel-Geometrie unmittelbar herleiten.

Ebene, die den imaginären Kreis berührt, sich als eine mit der xy-Ebene parallele Complex-Linie ab.

28. *Zwei sich schneidende Gerade l und λ bilden sich als Kugeln ab, zwischen denen Berührung stattfindet.*

Denn die reciproken Polaren der gegebenen Geraden hinsichtlich des Complexes $H = 0$ schneiden einander auch, und also enthalten die Bild-Kugeln zwei gemeinsame Geraden, die verschiedenen Erzeugungen gehören. Wenn aber der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades in einen Kegelschnitt und ein Geraden-Paar zerfällt, so berühren die Flächen einander in drei Punkten, den Doppelpunkten der Schnittcurve nämlich. Die beiden Kugeln haben also drei Berührungs-Punkte, unter denen indessen zwei, welche imaginär und unendlich entfernt sind, nicht in Betrachtung kommen. Analytisch beweist man unser Theorem in folgender Weise. *Die Bedingung des Schneidens der beiden Geraden:*

$$r_1 z = x - \varrho_1 \qquad r_2 z = x - \varrho_2$$

$$s_1 z = y - \sigma_1 \qquad s_2 z = y - \sigma_2$$

wird durch:

$$(r_1 - r_2)(\sigma_1 - \sigma_2) - (s_1 - s_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$$

dargestellt, und diese Gleichung geht durch Anwendung der Formeln (3) in:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = (H_1 \pm H_2)^2$$

das heisst in die *Bedingung der Berührung der beiden Bild-Kugeln* über.

Zwei Kugeln, die sich berühren, transformiren sich in zwei Linien-Paare, deren gegenseitige Lage eine solche ist, dass jede Linie des einen Paares eine Gerade des zweiten schneidet.

§ 10.

Verschiedene Abbildungen.

29. Man betrachte die Geraden eines ebenen Strahlen-Büschels im Raume r, ferner die zugehörigen reciproken Polaren hinsichtlich $H = 0$, die ebenso einen ebenen Strahlen-Büschel bilden, und endlich die entsprechenden Bild-Kugeln. Es ist leicht zu erkennen, dass alle diese Kugeln zwei gemeinsame Gerade enthalten, diejenigen nämlich, welche den Scheiteln der beiden Strahlen-Büschel entsprechen, und also berühren unsere Kugeln sich in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Linien. *Die Geraden eines ebenen Strahlen-Büschels bilden sich als alle Kugeln ab, die einander in einem gemeinsamen Punkte berühren.* Hieraus folgt, dass eine Fläche f und alle ihre Tangenten in einem gegebenen Punkte sich als eine Fläche und alle dieselbe in einem Punkte berührende Kugeln abbilden (§ 5., 15.). Dies findet seinen einfachsten Ausdruck in dem folgenden Satze:

Alle Flächen-Elemente des Raumes r, die zwei consecutive Punkte

einer Geraden enthalten, gehen bei unserer Abbildung in die Elemente der entsprechenden Bild-Kugel über.

Eine auf der Fläche f gelegene Gerade, welche also dieselbe in unendlich vielen Punkten berührt, wird eine Kugel, welche die Bildfläche unendlich oft, das heisst nach einer Curve berührt. Hieraus lässt sich schliessen, dass eine Linienfläche in eine Kugel-Enveloppe (eine Röhrenfläche) übergeht. Eine developpable Fläche transformirt sich in die Umhüllungsfläche von einfach unendlich vielen Kugeln, die der Bedingung unterworfen sind, dass jedesmal zwei consecutive einander berühren. Man erhält also die von Monge betrachteten imaginären Linienflächen, deren beide Schaaren von Krümmungslinien in die geradlinigen Erzeugenden zusammengefallen sind. Aus der Bemerkung, dass eine Linienfläche in eine Kugel-Enveloppe übergeht, folgt, dass eine Fläche zweiten Grades, die ja bekanntlich zwei Schaaren von Geraden enthält, sich in eine Fläche transformirt, die auf zwei Weisen als Kugel-Enveloppe aufgefasst werden kann, und zwar erhalten wir die allgemeinste Fläche — *die Dupin'sche Cyclide,* — welche diese Eigenschaft besitzt.

30. Aus einem früheren Satze folgt unmittelbar, dass alle Geraden, die eine feste Gerade schneiden, sich als die eine gegebene Kugel berührenden Kugeln abbilden, und wir kennen somit die Abbildung des *speciellen* linearen Complexes.

Die Gleichung des *allgemeinen linearen Linien-Complexes* ist nach Plücker:

$$(1) \qquad (r\sigma - s\varrho) + mr + n\sigma + p\varrho + qs + t = 0$$

und hieraus geht als Gleichung des entsprechenden *linearen Kugel-Complexes:*

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2) + MX + NY + PZ + QH + T = 0 \text{ *)}$$

hervor. Es bezeichnen hier M, N, P, Q, T Constanten, die von m, n, p, q, t abhängen, *während* X, Y, Z, H *als nicht homogene Kugel-Coordinaten aufzufassen sind.*

Die letzte Gleichung bestimmt, wie man leicht sieht, alle Kugeln, die eine feste Kugel:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) + MX + NY + PZ + T = 0$$

unter constantem Winkel schneiden, und zwar ist diese Kugel das Bild aller Geraden, die zugleich dem gegebenen Complexe (1) und $H = 0$ gehören. Wenn die simultane Invariante dieser beiden Complexe gleich Null ist, wenn dieselben also in Involution liegen, so ist, wie man sich leicht überzeugt, der betreffende constante Winkel gleich 90^0.

---

*) Diese Gleichung lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 + (iH - iH_0)^2 = \text{Const.}$$

Die eine gegebene Kugel unter constantem Winkel schneidenden Kugeln transformiren sich in die Geraden zweier linearer Complexe, die einander hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Insbesondere sind die Orthogonal-Kugeln einer gegebenen Kugel das Bild der Geraden eines linearen Complexes, der mit $H = 0$ in Involution liegt.

Eine Gleichung der Form:

$$ar + b\sigma + c\varrho + ds + e = 0 \tag{2}$$

giebt eine lineare Gleichung zwischen den Kugel-Coordinaten X, Y, Z, H, und also wird der betreffende Kugel-Complex von allen Kugeln gebildet, die eine gegebene Ebene unter constantem Winkel schneiden. Dieses könnte man auch daraus schliessen, dass der Complex (2) die unendlich weit entfernte Gerade der xy-Ebene enthält, dass also die Complexe (2) und $H = 0$ einander nach einer linearen Congruenz schneiden, deren Directricen mit der xy-Ebene parallel sind. — Wenn endlich die Complexe (2) und $H = 0$ in Involution liegen, so erhält man alle Kugeln, deren Mittelpunkte in einer festen Ebene liegen.

Die vier Complexe:

$$X = 0 = \varrho + s; \quad iY = 0 = \varrho - s$$
$$Z = 0 = \sigma - r; \quad H = 0 = \sigma + r$$

liegen, wie man leicht erkennt, paarweise in Involution, und enthalten dabei eine gemeinsame Gerade, die unendlich weit entfernte in der xy-Ebene nämlich. *Es bilden also die fünf Complexe:*

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \; H = 0, \quad \text{Const.} = 0$$

indem man den letzten, der als specieller Complex mit sich selbst in Involution ist, doppelt zählt, ein System, welches als eine Degeneration der sechs Fundamental-Complexe des Herrn Klein aufzufassen ist. Es ist einleuchtend, dass man die vier Kugel-Coordinaten X, Y, Z, H zugleich als nicht homogene Linien-Coordinaten auffassen kann.

Bemerkenswerth ist endlich auch, dass jeder unter den einfach unendlich vielen Linien-Complexen, die sich durch die Gleichung darstellen lassen:

$$H = \text{Const.}$$

sich als alle Kugeln einer gegebenen Grösse abbilden. Diese Complexe berühren einander nach einer gemeinsamen speciellen Congruenz, deren beide Directricen in die unendlich weit entfernte Gerade der xy-Ebene zusammengefallen sind. Die Geraden dieser Congruenz bilden sich alle als Ebenen ab, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis berühren.

31. Es ist bekanntlich eine unmittelbare Consequenz der Plücker'schen Auffassung, dass wenn $l_1 = 0$ und $l_2 = 0$ die Gleichungen zweier linearer Complexe sind, die Gleichung:

$$l_1 + ul_2 = 0,$$

in welcher u einen Parameter bezeichnet, eine Schaar linearer Complexe darstellt, die eine gemeinsame lineare Congruenz enthalten. Unsere Abbildung transformirt diesen Satz in den folgenden:

Die Kugeln K, welche zwei feste Kugeln S_1 und S_2 unter gegebenen Winkeln V_1 und V_2 schneiden, stehen in demselben Verhältnisse zu unendlich vielen Kugeln S. Es giebt, den Directricen der besprochenen Congruenz entsprechend, zwei S, die von allen K berührt werden.

Der variable Linien-Complex $l_1 + u l_2 = 0$ schneidet den Complex $H = 0$ nach einer linearen Congruenz, deren beide Directricen eine Fläche zweiten Grades — die Durchschnitts-Fläche der drei Complexe $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $H = 0$ — beschreiben, und also umhüllen die genannten Kugeln S eine Dupin'sche Cyclide, die freilich in einen diesen Kugeln gemeinsamen Kreis ausgeartet ist.

Hier möchte ich auch darauf aufmerksam machen, dass unsere Abbildung gegebene interessante, discontinuirliche Linien-Gruppen in entsprechende Kugel-Gruppen überführt. Beispielsweise schliessen wir aus der bekannten Theorie der 27 Geraden auf der Fläche dritten Grades die Existenz einer Gruppe, bestehend aus 27 Kugeln, deren jede zehn andere Kugeln der Gruppe berührt. Andererseits gehen Kugel-Configurationen in eigenthümliche Geraden-Configurationen über.

§ 11.

Entsprechen zwischen Aufgaben, die sich auf Kugeln, und solchen, die sich auf Linien beziehen.

32. In diesem Paragraphen erledigen wir einige bekannte, sehr einfache Aufgaben, welche sich auf Kugeln beziehen, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, indem wir die entsprechenden Linien-Probleme betrachten.

a. *Wie viele Kugeln berühren vier gegebene Kugeln?*

Die vier Kugeln transformiren sich in vier Linien-Paare $(l_1 \lambda_1)$ $(l_2 \lambda_2)$ $(l_3 \lambda_3)$ $(l_4 \lambda_4)$. Nehmen wir nun eine Gerade aus jedem Paare und fassen die so erhaltenen vier Linien zu einer Gruppe zusammen, so sucht man nach den beiden Transversalen dieser Gruppe. Wir finden 16 verschiedene Gruppen, die indessen paarweise, wie z. B.:

$$l_1 \lambda_2 l_3 l_4 \qquad \lambda_1 l_2 \lambda_3 \lambda_4$$

hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Offenbar sind die beiden Transversalen-Paare:

$$t_1 t_2 \qquad \tau_1 \tau_2$$

zweier solchen Gruppen selbst conjugirt, und bilden sich also nur als zwei Kugeln ab. *Es giebt 16, in 8 Paaren geordnete Kugeln, die vier gegebene Kugeln berühren.*

b. *Wie viele Kugeln giebt es, die vier gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden?*

Kugeln, die eine gegebene Kugel unter demselben Winkel schneiden, bilden sich ab als die Geraden zweier linearen Complexe, die einander hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Wir müssen also vier Paare linearer Complexe $(l_1 \lambda_1)(l_2 \lambda_2)(l_3 \lambda_3)(l_4 \lambda_4)$ betrachten und dieselben zunächst auf alle mögliche Weisen in Gruppen zu vier ordnen, dergestalt, dass niemals zwei Complexe einer Gruppe denselben Index haben, zweitens alle Linien finden, die den vier Complexen einer jeden Gruppe angehören. Vier lineare Complexe enthalten zwei gemeinsame Gerade und also erhält man, indem man wie im ersten Probleme verfährt, als Lösung unserer Aufgabe 16 in 8 Paare gruppirte Kugeln.

Unser Problem vereinfacht sich, wenn ein oder mehrere der gegebenen Winkel gleich 90^0 sind, indem die Orthogonal-Kugeln einer Kugel sich als die Geraden *eines* Complexes, der mit $H = 0$ in Involution liegt, abbilden. Sind endlich alle vier Winkel gleich 90^0, so fragt man nach den gemeinsamen Geraden von vier linearen Complexen, die mit $H = 0$ in Involution liegen. Die erhaltenen beiden Geraden sind hinsichtlich $H = 0$ conjugirt, und es giebt also nur *eine Kugel, die vier gegebene Kugeln orthogonal schneidet.*

c. *Alle Kugeln zu construiren, die fünf gegebene Kugeln unter demselben Winkel schneiden.*

Unsere Abbildung führt diese Aufgabe darauf zurück, fünf gegebene Paare von Geraden $(l_1 \lambda_1)(l_2 \lambda_2) \ldots (l_5 \lambda_5)$ auf alle mögliche Weisen in Gruppen zu 5 zu ordnen, doch mit der Beschränkung, dass niemals zwei Gerade einer Gruppe denselben Index haben dürfen, und sodann alle linearen Complexe zu finden, welche jedesmal alle Linien einer Gruppe enthalten. Es giebt 32 verschiedene Gruppen, die paarweise hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Dem entsprechend erhalten wir 32 paarweise conjugirte lineare Complexe, die sich als 16 lineare Kugel-Complexe abbilden. Die 16 Kugeln, deren jede von den Kugeln eines solchen Complexes unter constantem Winkel geschnitten werden, sind die Lösungen unserer Aufgabe.

Zwei Linien-Gruppen wie:

$$l_1 \; \lambda_2 \; \lambda_3 \; l_4 \; l_5 \qquad\qquad l_1 \; \lambda_2 \; \lambda_3 \; l_4 \; \lambda_5$$

enthalten vier gemeinsame Gerade $(l_1 \lambda_2 \lambda_3 l_4)$, und also schneiden die entsprechenden linearen Complexe einander nach einer linearen Congruenz, deren Directricen d_1, d_2 die beiden Transversalen der vier besprochenen Linien sind. Der Complex $H = 0$ schneidet diese Congruenz nach einer Fläche zweiten Grades, die das Bild eines Kreises ist, des Durchschnitts-Kreises zweier der gesuchten Kugeln, zugleich aber der beiden Kugeln, welche d_1 und d_2 entsprechen. Diese letzten

Kugeln lassen sich nun auch dadurch definiren, dass sie vier der fünf gegebenen berühren, und also kann man auf jeder unter den sechszehn Kugeln, welche fünf gegebene unter demselben Winkel schneiden, fünf Kreise bestimmen, vorausgesetzt, dass man die Kugeln, welche vier gegebene berühren, construiren kann.

§ 12.

Unsere Abbildung führt die Haupttangenten-Curven einer Fläche f in die Krümmungslinien der Bildfläche F über.

33. Die in den letzten Paragraphen betrachtete Abbildung erhält ein grosses Interesse durch den folgenden merkwürdigen Satz:

Die Krümmungslinien einer Fläche F transformiren sich in Linienflächen, die die Bildfläche f nach Haupttangenten-Curven berühren.

Die Tangenten der Fläche f verwandeln sich in Kugeln, die F berühren, und somit liegt der Gedanke nahe, dass die Haupttangenten der ersten Fläche sich als die Haupt-Kugeln der letzten abbilden. Dies ist in der That der Fall. Die Fläche f wird nämlich von einer Haupttangente in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten, und somit berühren drei consecutive auf der Bild-Kugel gelegene Gerade die Fläche F. Die Schnittcurve dieser Flächen hat also im betreffenden Punkte eine Spitze, und in Folge dessen ist die Kugel eine Haupt-Kugel. Bemerkt man nun ferner, dass die Richtung dieser Spitze die Tangente einer Krümmungslinie ist, so sieht man, dass zwei consecutive Punkte einer Haupttangenten-Curve sich als zwei imaginäre Gerade abbilden, welche F in consecutiven Punkten einer Krümmungslinie berühren, dass also alle Punkte der Haupttangenten-Curve sich in die Erzeugenden einer Linienfläche transformiren, welche F nach einer Krümmungslinie berührt. Hieraus folgt aber unser Theorem (§ 7., 21**e**.).

Die beiden folgenden Beispiele bestätigen unseren Satz. Eine Kugel transformirt sich in eine lineare Congruenz, als deren Brennfläche die beiden Directricen aufzufassen sind. Nun ist bekanntlich jede auf einer Kugel gelegene Curve eine Krümmungslinie, und in der That sind auch die Directricen einer linearen Congruenz Haupttangenten-Curven auf einer jeden dieser Congruenz zugehörigen Linienfläche. Andererseits wissen wir, dass ein Hyperboloid f sich als eine Dupin'sche Cyclide abbildet. Es sind nun die Linienflächen des Complexes $H = 0$, die f nach seinen Haupttangenten-Curven — den geradlinigen Erzeugenden — berühren, selbst vom zweiten Grade, und also finden wir den bekannten Satz wieder, dass *die Krümmungslinien der Dupin'schen Cyclide zwei Kreisschaaren sind.*

Als eine interessante Anwendung unseres Satzes ist die folgende zu betrachten.

*Die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten hat algebraische Haupttangenten-Curven sechszehnter Ordnung, die den vollständigen Berührungs-Durchschnitt der Fläche mit Linienflächen achter Ordnung bilden.**)

Die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten ist bekanntlich die Brennfläche der allgemeinen Congruenz zweiter Ordnung und Classe. Dieses Linien-System (§ 8. 26a.) bildet sich, wenn es $H = 0$ angehört, als eine Fläche vierter Ordnung F_4 ab, und hierbei enthält F_4 den unendlich weit entfernten imaginären Kreis als Doppel-Kegelschnitt. Nun haben die Herren Darboux und Moutard gefunden, dass die Krümmungslinien einer solchen Fläche F_4 Curven achter Ordnung sind; dieselben schneiden den imaginären Kreis in acht Punkten, und also (§ 8. 26b.) sind ihre Bildflächen Linienflächen achter Ordnung, deren Erzeugende Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche sind. Hieraus folgt unser Satz unmittelbar.

Es ist einleuchtend, dass auch die Degenerationen der Kummer'schen Fläche, z. B. die *Wellenfläche*, die Plücker'sche Complex-Fläche, die Steiner'sche**) Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, einige Linienflächen vierter Ordnung mit zwei Doppellinien, die zusammenfallen können, die Linienfläche dritter Ordnung u. s. w. algebraische Haupttangenten-Curven haben.

34. Herr Darboux hat gezeigt, dass man auf einer jeden Fläche im Allgemeinen eine im endlichen Raume gelegene Krümmungslinie angeben kann, die Berührungs-Curve nämlich mit der imaginären Developpablen, die der gegebenen Fläche und dem imaginären Kreise zugleich umgeschrieben ist.

Dem entsprechend lässt sich im Allgemeinen auf der Brennfläche einer jeden Congruenz, die einem linearen Complexe angehört, eine Haupttangenten-Curve angeben, der geometrische Ort nämlich aller Punkte, für welche die Tangentenebene zugleich die dem betreffenden Punkte durch den linearen Complex zugeordnete Ebene ist.

Die unendlich kleinen Kugeln, die eine Fläche F berühren, theilen sich nämlich in zwei Systeme, erstens die Punkte der Fläche, zweitens die Punkte der oben genannten imaginären Developpablen.

*) Herr Klein, dem ich mittheilte, dass die Haupttangenten-Curven algebraisch sind, fand, dass dieselben mit einem Curven-Systeme, welches er schon früher unter einem anderen Gesichtspunkt betrachtet hatte, identisch sind (diese Annalen II. p. 219). Vergleiche unsere gemeinsame Note in den Monats-Berichten der Berliner Akademie. Decbr. 1870.

**) Herr Clebsch hat die Haupttangenten-Curven der Steiner'schen Fläche gefunden; es sind Curven vierter Ordnung (Borchardt's Journal Bd. 67).

Also zerfallen auch die Linien des linearen Complexes $H = 0$, welche die Bildfläche f berühren, in ein System Doppeltangenten und den Inbegriff aller Geraden, die f in den Punkten einer Curve c berühren. Diese Curve ist aber als das Bild einer imaginären Linienfläche, die F nach einer Krümmungslinie berührt, eine Haupttangenten-Curve auf f. Diese Bestimmung wird jedoch illusorisch, wenn nicht die Congruenz, sondern ihre Brennfläche — oder eigentlich ein reductibler Theil derselben — allgemein gegeben wird. Auf einer Fläche findet sich nämlich im Allgemeinen nur eine endliche Zahl von Punkten, deren Tangentenebene dem betreffenden Punkte durch einen linearen Complex zugeordnet wird. — Das Vorstehende findet seinen einfachsten Ausdruck in folgendem Satze:

*Wenn eine Fläche ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines linearen Complexes ist, so enthält dieselbe eine Haupttangenten-Curve, deren Tangenten dem Complexe angehören. Diese ausgezeichnete Curve kann durch Differentiation und Elimination bestimmt werden.**)

Bemerkt man, dass eine jede Linienfläche, deren Erzeugende einem linearen Complexe gehören, ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich des Complexes ist, so lässt sich der folgende Satz aussprechen:

*Auf einer jeden Linienfläche, die in einem linearen Complexe enthalten ist, liegt eine im Allgemeinen krumme Haupttangenten-Curve***), *deren Tangenten dem Complexe gehören. Dieselbe kann immer ohne Integration gefunden werden.*

Herr Clebsch hat nun gezeigt (Borchardt's Journal Bd. 68.), dass wenn auf einer Linienfläche eine Haupttangenten-Curve ausser den Erzeugenden bekannt ist, sich die Bestimmung der übrigen auf eine Quadratur zurückführen lässt. *Also hängt die Auffindung der Haupttangenten-Curven auf einer Regelfläche, die einem linearen Complexe gehört, nur von einer Quadratur ab.*

Indem wir unsere Transformations-Methode auf dieses Theorem des Herrn Clebsch, wie auch auf die aus demselben angeführte Consequenz anwenden, erhalten wir die beiden folgenden Sätze:

Wenn auf einer Röhrenfläche (Kugel-Enveloppe) eine nicht kreisförmige Krümmungslinie bekannt ist, so können die übrigen durch Quadratur gefunden werden.

Wenn einfach unendlich viele Kugeln eine Kugel S unter con-

*) Diese Curve ist, nach einer Bemerkung von Herrn Klein, zugleich eine Curve vierpunktiger Berührung für die Fläche.

**) Eine interessante Anwendung dieses Satzes ist die folgende. Die Geraden einer linearen Congruenz gehören nach Plücker einfach unendlich vielen linearen Complexen an. *Demzufolge enthält eine jede Regelfläche, deren Linien zwei feste Gerade schneiden, einfach unendlich viele algebraische Haupttangenten-Curven, unter denen jede von den Geraden eines linearen Complexes umhüllt wird* (vergl. auch Cremona, Annali di mat. Ser. II. t. I.).

stantem Winkel schneiden, so kann man auf der Umhüllungs-Fläche zuerst eine Krümmungslinie durch Differentiation und Elimination finden und darnach die übrigen durch Quadratur bestimmen.

Dass man eine Krümmungslinie auf der betrachteten Röhrenfläche finden kann, schliesst man auch unmittelbar daraus, dass diese Fläche und die Kugel S einander unter constantem Winkel schneiden. Die Durchschnitts-Curve ist nun eine Krümmungslinie auf der Kugel S, und steht also nach einem bekannten Satze in demselben Verhältnisse zu der Röhrenfläche.

§ 13.

Entsprechen zwischen Transformationen der beiden Räume.

35. Unsere Abbildung drückt sich bekanntlich (§ 5.) durch Gleichungen aus, die eine jede Grösse aus einer der Gruppen

$$(x\,y\,z\,p\,q), \quad (X\,Y\,Z\,P\,Q)$$

als Function der Grössen in der zweiten Gruppe bestimmen. Wird nun der eine Raum z. B. r einer Transformation unterworfen, bei welcher Flächen, die sich berühren, in eben solche übergehen, so besitzt die entsprechende Umformung des zweiten Raumes dieselbe Eigenschaft. Die besprochene Transformation drückt sich nämlich durch fünf Gleichungen zwischen $(x_1\,y_1\,z_1\,p_1\,q_1)$ und $(x_2\,y_2\,z_2\,p_2\,q_2)$ aus — die beiden Indices beziehen sich auf die beiden Zustände des Raumes r — und diese Relationen werden mittelst der Abbildungs-Gleichungen in fünf Relationen zwischen $(X_1\,Y_1\,Z_1\,P_1\,Q_1)$ und $(X_2\,Y_2\,Z_2\,P_2\,Q_2)$ übergeführt, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Beschränken wir uns auf lineare Transformationen des Raumes r, so finden wir unter den entsprechenden Umformungen des zweiten Raumes: alle Bewegungen (Translation, Rotation und Schrauben-Bewegung), Parallel-Transformation *) — darunter den Uebergang von einer Fläche zu einer Parallelfläche verstanden —, eine von Herrn Bonnet angegebene reciproke Transformation, eine reciproke Umformung hinsichtlich einer Cyclide . . . u. s. w., welche alle, als linearen Transformationen des Raumes r entsprechend, die Eigenschaft besitzen, Krümmungslinien in Krümmungslinien der transformirten Fläche überzuführen. Ich beweise endlich, dass diese Transformationen des Raumes R die einzigen sind, bei denen Flächen, die sich nach einer Krümmungslinie berühren, in eben solche übergehen.

36. Betrachten wir nun zunächst diejenigen linearen Punkt-Transformationen des Raumes r, denen *lineare* Umformungen des zweiten Raumes entsprechen, so ist es klar, dass wir nur solche

*) Herrn Bonnet's Dilatation.

lineare Transformationen des Raumes R treffen können, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält, und umgekehrt erhalten wir diese auch alle. Eine solche Transformation führt nämlich einerseits Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in eben solche Linien über, andererseits Kugeln in Kugeln, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r zugleich eine Punkt- und Linien-Transformation, das heisst eine lineare Punkt-Transformation, was zu beweisen war.

Die allgemeine lineare Transformation, bei welcher der imaginäre Kreis seine Lage behält, enthält sieben wesentliche Constanten, und lässt sich bekanntlich aus Translationen, Rotationen und Aehnlichkeits-Transformationen zusammensetzen. Die entsprechende Umformung des Raumes r, die ebenso von 7 Constanten abhängt, kann dadurch charakterisirt werden, dass sie den linearen Complex $H = 0$ und eine Gerade desselben (Const. $= 0$) in sich überführt. Diese Transformation ist zugleich *die allgemeinste, die eine specielle lineare Congruenz in sich transformirt.*

Durch analytische Betrachtungen findet man in folgender Weise die einer *Translation* des Raumes R entsprechende lineare Punkt-Transformation des Raumes r. Eine Translation drückt sich, als Kugel-Transformation aufgefasst, durch die Gleichungen:

$$X_1 = X_2 + A, \quad Y_1 = Y_2 + B, \quad Z_1 = Z_2 + C, \quad H_1 = H_2$$

aus, und dieselben geben durch Benutzung der Formeln (2) in § 9.:

$$r_1 = r_2 + a, \quad s_1 = s_2 + b, \quad \varrho_1 = \varrho_2 + c, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + d.$$

Bei Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichungen einer geraden Linie:

$$r_1 z = x - \varrho_1, \quad s_1 z = y - \sigma_1$$

findet man als Definition der besprochenen Transformation:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + a z_2 + c, \quad y_1 = y_2 + b z_2 + d.$$

Ebenso ist es leicht, die einer Aehnlichkeits-Transformation entsprechende Umformung des Raumes r zu bestimmen. Die Gleichungen:

$$X_1 = m X_2; \quad Y_1 = m Y_2; \quad Z_1 = m Z_2; \quad H_1 = m H_2$$

geben nämlich durch Anwendung der Formeln (2) des § 9.:

$$r_1 = m r_2, \quad s_1 = m s_2, \quad \varrho_1 = m \varrho_2, \quad \sigma_1 = m \sigma_2,$$

welche Gleichungen eine Transformation definiren, die auch durch:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = m x_2, \quad y_1 = m y_2$$

bestimmt werden kann. Die letzten Gleichungen definiren eine lineare Punkt-Transformation, bei welcher die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten.

Durch geometrische Betrachtungen werde ich beweisen, dass auch Rotations-Bewegungen des Raumes R in Transformationen der eben

besprochenen Art übergehen. Sei A die Rotations-Axe, M, N seien die beiden Punkte des imaginären Kreises, die bei der Rotation nicht verschoben werden. Es ist dann einleuchtend, dass alle imaginären Geraden, die A schneiden, und zugleich durch M oder N gehen, während der Rotation ihre Lage behalten, und demzufolge bleiben auch die diesen Geraden zugehörigen Bildpunkte, die auf zwei Geraden liegen, während der entsprechenden Umformung des Raumes r ungeändert.

37. *Transformation durch reciproke Radien* des Raumes R transformirt Punkte in Punkte, Kugeln in Kugeln und endlich Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in ähnliche Linien, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r eine lineare Punkt-Transformation, die den linearen Complex $H = 0$ in sich überführt. Bemerkt man ferner, dass jede Transformation durch reciproke Radien die Punkte und geradlinigen Erzeugenden einer Kugel ungeändert lässt, so sieht man, dass bei der entsprechenden reciproken Punkt-Transformation des Raumes r die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten. Herr Klein hat darauf aufmerksam gemacht, dass diese Transformation sich aus zwei reciproken Transformationen hinsichtlich zweier in Involution liegender linearer Complexe zusammensetzen lässt, und zwar ist in unserem Falle $H = 0$ der eine Complex, während der andere sich als das System solcher Kugeln abbildet, welche die bei der Transformation durch reciproke Radien zu Grunde gelegte rechtwinklig schneiden.

Eine Fläche F, die bei einer Transformation durch reciproke Radien in sich selbst übergeführt wird, bildet sich somit im Raume r als eine Congruenz ab, die ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines mit $H = 0$ in Involution liegenden linearen Complexes ist. Die zugehörige Brennfläche ist ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines jeden der beiden in Involution liegenden Complexe und demzufolge zerfällt das System ihrer Doppeltangenten in drei Congruenzen, von denen die eine dem Complexe $H = 0$ gehört, während die zweite in dem zweiten Complexe enthalten ist.

38. Man betrachte die allgemeinste Linien-Transformation des Raumes r, bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und andererseits im Raume R die entsprechende Umformung, die offenbar Kugeln in Kugeln, Kugeln, die sich berühren, in eben solche überführt. Bei der besprochenen Linien-Transformation transformiren alle Tangenten einer Fläche sich in diejenigen einer zweiten, und dabei entsprechen insbesondere die Haupttangenten der beiden Flächen einander, und zwar sowohl, wenn die betreffende Transformation eine lineare Punkt-Transformation, als wenn sie eine linear-dualistische Umformung ist. Bei der entsprechenden Transformation des Raumes R gehen alle dreifach unendlich viele Kugeln, die eine

Fläche F_1 berühren, in alle Kugeln über, die in demselben Verhältnisse zu einer anderen Fläche F_2 stehen, und insbesondere entsprechen die Haupt-Kugeln der beiden Flächen einander. Hieraus folgt, dass die Krümmungslinien der Flächen einander in dem Sinne entsprechen, dass wenn eine Gleichung:

$$(1) \qquad F(X_1\, Y_1\, Z_1\, P_1\, Q_1) = 0$$

für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_1 stattfindet, auch die Gleichung, die man erhält, indem man in (1) statt $(X_1\, Y_1\, Z_1\, P_1\, Q_1)$ die Werthe dieser Grössen durch $(X_2 Y_2 Z_2 P_2 Q_2)$ setzt, für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_2 gilt.

Ich werde nun beweisen, dass wir alle Transformationen erhalten, bei denen einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien covariante Curven sind, wenn wir unsere Abbildung auf alle linearen Punkt-Transformationen (oder linear-dualistischen Umformungen) des Raumes r anwenden.

Zum Beweise bemerke ich, dass es zwei Arten von Flächen giebt, deren sämmtliche Curven Krümmungslinien sind: die Kugeln und die imaginären Developpablen, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis enthalten. Es ist klar, dass die gesuchte Transformation eine jede solche Fläche in eine, die ebenso einer dieser beiden Kategorien gehört, überführen muss, und zwar liegt die Vermuthung nahe, dass insbesondere Kugeln in Kugeln übergehen müssen. Dies ist auch der Fall. Die besprochenen imaginären Developpablen genügen nämlich der partiellen Differential-Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0,$$

und also befriedigen die entsprechenden Flächen in r auch eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung:

$$F(x\, y\, z\, p\, q) = 0.$$

Unter den Integralflächen derselben können sich höchstens dreifach unendlich viele Kugeln finden, und also können Kugeln im Allgemeinen nicht in imaginäre Developpable übergehen.

Unsere Transformation ist also eine Kugel-Transformation und zwar nach unserer Voraussetzung eine, bei welcher Kugeln, die sich berühren, in eben solche übergehen. Die entsprechende Umformung des Raumes r ist also eine *Linien*-Transformation, bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und dies ist bekanntlich nur für die linearen Punkt-Transformationen und die linear-dualistischen Umformungen der Fall.

Bemerkt man, dass alle Punkt-Transformationen, bei denen Krümmungslinien covariante Curven sind, *infinitesimale* Kugeln in *infinitesimale* Kugeln überführen, und dass in Folge dessen diese Umformun-

gen zugleich die allgemeinsten Punkt-Transformationen sind, bei denen Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird, so kann man den folgenden Satz aufstellen:

Alle linearen Transformationen des Raumes r, die den linearen Complex $H = 0$ in sich überführen, gehen durch unsere Abbildung in alle Punkt-Transformationen über, bei denen Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird.

Zugleich finden wir, mit Berücksichtigung unserer früheren Sätze, ohne Schwierigkeit das folgende, zuerst von Herrn Liouville bewiesene Theorem wieder:

Eine jede Punkt-Transformation, bei welcher Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird, lässt sich aus einer Transformation durch reciproke Radien und einer Bewegung zusammensetzen.

39. *Parallel-Transformation* — darunter verstanden den Uebergang von einer Fläche zu einer Parallelfläche — führt bekanntlich Krümmungslinien in Krümmungslinien über, und in der That ist es leicht, zu erkennen, dass dieselbe das Bild einer linearen Transformation des Raumes r ist. Den Gleichungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2, \quad H_1 = H_2 + A$$

entsprechen nämlich (36) Relationen der folgenden Form:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + az_2 + b, \quad y_1 = y_2 + cz_2 + d,$$

womit meine Behauptung erwiesen ist.

Herr Bonnet hat mehrmals eine Transformation betrachtet, die er durch die Gleichungen:

$$Z_1 = iZ_2\sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}; \quad X_1 = X_2 + P_2 Z_2; \quad Y_1 = Y_2 + Q_2 Z_2$$

definirt. Herr Bonnet zeigt, dass diese Transformation eine reciproke ist, dass die Krümmungslinien in Krümmungslinien übergeführt werden, dass endlich die Relationen:

$$(1) \qquad \zeta_1 = iH_2, \quad H_1 = -i\zeta_2$$

stattfinden, vorausgesetzt, dass H_1 und H_2 Krümmungs-Radien entsprechender Punkte bezeichnen, dass ferner ζ_1 und ζ_2 die z-Ordinaten der zugehörigen Krümmungs-Centren sind.

Die Bonnet'sche Transformation ist, wie wir sogleich beweisen werden, das Bild einer reciproken Umformung des Raumes r hinsichtlich des linearen Complexes

$$Z + iH = 0.$$

Nach Herrn Klein genügen nämlich die Coordinaten zweier Geraden $(X_1 Y_1 Z_1 H_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2 H_2)$, die einander hinsichtlich dieses Complexes conjugirt sind, den Relationen:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = iH_2, \quad H_1 = -iZ_2.$$

Diese Gleichungen aber bestimmen, wenn X, Y, Z, H als Kugel-

Coordinaten aufgefasst werden, ein Entsprechen zwischen allen Kugeln des Raumes und zwar dasselbe wie die Bonnet'sche Transformation.*)

Unter den linearen Transformationen des Raumes spielen bekanntlich die reciproken Umformungen hinsichtlich Flächen zweiten Grades eine fundamentale Rolle, und es liegt somit nahe, die entsprechenden linearen Kugel-Transformationen zu betrachten. Dieselben beziehen sich jedesmal auf die beiden Kugel-Gruppen einer Dupin'schen Cyclide, und zwar in der folgenden Weise. Eine gegebene Kugel Q_1 berührt zwei Kugeln aus jeder Gruppe, S_1, S_2 und Σ_1, Σ_2; es giebt nun bekanntlich ausser Q_1 fünfzehn Kugeln, welche diese S und Σ berühren, und unter denselben wählt man diejenige Q_2, die Q_1 in dem bekannten Sinne zugeordnet ist. Durch die betreffende Kugel-Transformation sind Q_1 und Q_2 einander zugeordnet. Bemerkenswerth ist insbesondere der Fall, dass die Erzeugenden des einen Systems auf der ursprünglich angenommenen Fläche zweiten Grades dem linearen Complexe $H=0$ angehören. Alsdann reducirt sich die Cyclide auf einen Kreis; ferner ist die Kugel-Transformation eine Punkt-Transformation. Wir finden also hier eine ausgezeichnete conforme Punkt-Transformation, bei welcher ein im endlichen Raume gelegener Kreis als Fundamental-Gebilde auftritt.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen resumire ich folgendermassen:

Durch meine Abbildung entsprechen sich:

a. alle linearen Punkt-Transformationen und linear-dualistischen Umformungen des Raumes;	*a. alle Transformationen, bei denen Berührung längs Krümmungslinien eine invariante Beziehung ist;*
b. alle ∞^{10} linearen Transformationen, bei denen ein linearer Linien-Complex in sich übergeführt wird;	*b. alle conformen Punkt-Transformationen des Raumes;*
c. alle ∞^7 linearen Transformationen, die eine specielle lineare Congruenz in sich überführen.	*c. alle conformen Punkt-Transformationen, die homographische Transformationen sind, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält.*

Diese Entwickelungen geben zu wichtigen Theorien Veranlassung. Beispielsweise sei angeführt:

*) Die Bonnet'sche Transformation ordnet den Punkten des Raumes Kugeln zu, deren Centra in einer Ebene liegen. Ersetzt man hier die Kugel jedesmal durch den Durchschnittskreis derselben mit jener Ebene, so findet man einen interessanten Zusammenhang zwischen der Bonnet'schen Transformation und einer von Möbius herrührenden Idee (Abhandlungen der Sächs. Akad. 1854). Es bietet sich hier die Idee, als Element einer Geometrie mit drei Dimensionen den Kreis in der Ebene, und als Coordinaten Centra-Coordinaten und Radius desselben anzuwenden.

Alle Transformationen, bei denen Gerade, die sich schneiden, in eben solche übergehen, können nach einer Bemerkung des Herrn Klein aus reciproken Umformungen hinsichtlich linearer Complexe zusammengesetzt werden. Dementsprechend findet man, dass alle unsere Transformationen, bei denen Krümmungslinien covariante Gebilde sind, sich aus Transformationen durch reciproke Radien und Parallel-Transformationen (Dilatationen) zusammensetzen lassen.

Betrachtet man, wie Herr Klein es vorgeschlagen hat, die Linien- oder Kugel-Geometrie mit Zugrundelegung der Coordinaten X, Y, Z, H als eine metrische Geometrie zwischen vier Variabeln, so findet man leicht, dass meine lineare Kugel-Transformation eben mit dem Inbegriff aller conformen Punkt-Transformationen dieses Kugel-Raumes identisch sind.*)

Uebrigens hoffe ich in einer anderen Abhandlung, deren Gegenstand überhaupt die Geometrie eines Raumes mit n Dimensionen sein wird, eine erschöpfende Darstellung dieser letzten Theorien, und zwar für einen jeden Raum geben zu können.**)

*) Den entsprechenden Satz habe ich in den Göttinger Nachrichten (1871. Nr. 7.) für einen Raum mit n Dimensionen aufgestellt. Weiter sei bemerkt, dass alle conformen Punkt-Transformationen eines Raumes R_n sich aus Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzen lassen. Hiermit in Verbindung steht der Satz, dass wenn $x_1\, x_2 \ldots x_n$ als solche Functionen von $y_1\, y_2 \ldots y_n$ gegeben sind, dass $\Sigma dx^2 = \Phi(y_1 \ldots y_n)\, \Sigma dy^2$ ist, auch eine Gleichung der Form gilt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_i')^2 = \Pi(y_1 \ldots y_n) \,.\, \Pi(y_1' \ldots y_n') \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y_i')^2 .$$

**) Ich führe noch an, dass jeder Satz der Linien- oder Kugel-Geometrie sich in interessanter Weise transformiren lässt in einen Satz über Flächen, die aus einer beliebig gewählten durch Anwendung aller Translationen und Parallel-Transformationen hervorgehen. Wichtig sind auch die beiden folgenden Bemerkungen, die sich mir zu spät darbieten, um im Texte Platz finden zu können. 1) Im Linien-Raume r giebt es bekanntlich zweierlei Transformationen, bei denen Gerade, die sich schneiden, in eben solche übergehen. Die entsprechenden Transformationen des Raumes R zerfallen *nicht* in zwei Classen, wenn Punkt-Coordinaten zu Grunde gelegt werden. 2) Linien-Transformationen, bei denen (Const. $= 0$) ihre Lage behält, geben sämmtliche Transformationen von R, bei denen Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bilde in eben solche Flächen übergehen. Das neue sphärische Bild entsteht aus dem alten durch eine conforme Punkt-Transformation der Bild-Kugel. Hierher gehört die Bonnet'sche Transformation.

Christiania, 10. October 1871.

II.

Im ersten Theile dieser Abhandlung habe ich, wie ich glaube, die erste vollständige analytisch-geometrische Interpretation aller Raum-Transformationen gegeben, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Ich betrachtete insbesondere eine derartige Verwandtschaft — ich bezeichne dieselbe zuweilen der Kürze wegen als eine *Kugel-Abbildung* —, welche die Geraden eines Raumes r in die Kugeln des Raumes R überführte, was so zu verstehen war, dass alle Flächen-Elemente, welche zwei consecutive Punkte einer Geraden enthielten, in die Elemente einer Kugel übergingen. Ich begründete hierauf einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie und demzufolge zwischen mehreren projectivischen und metrischen Theorien. Insbesondere zeigte es sich, dass die Haupttangenten-Curven einer Fläche f sich in die Krümmungslinien der Bildfläche F transformirten.

Wenn ich eben das Wort Kugel-Geometrie benutzt habe, so muss ich bemerken, dass meines Wissens eine solche Geometrie seither noch nicht existirte, ob auch viele particuläre Probleme und Theorien, die sich auf Kugeln beziehen, schon erledigt waren. Nachdem ich aber Herrn Darboux*) die folgende Abhandlung, die, in etwas anderer Form, das erste Mal in den Berichten der Akademie zu Christiania, Sommer 1871, erschien, zugeschickt habe, erfahre ich, dass er 1868 bei der Pariser Akademie eine noch nicht veröffentlichte Abhandlung einreichte, in welcher er sich mit solchen Kugel-Systemen beschäftigte, die ich als Kugel-Complexe bezeichnet habe. Bei derselben Gelegenheit theilte er mir mit, dass er eben eine Note vorbereite, in welcher er mehrere Probleme behandeln würde, die ich in den Paragraphen 15., 24. meiner jetzigen Abhandlung betrachtet habe. Wo ich dazu im Stande bin, werde ich im Folgenden hierauf bezügliche Citate machen, indem ich im Uebrigen auf Herrn Darboux's Arbeiten, die hoffentlich bald erscheinen werden, verweise.

Wenn aber sowohl eine Kugel-Geometrie wie eine Linien-Geometrie schon existirten, so scheint doch der eigenthümliche Zusammenhang zwischen diesen beiden Disciplinen zuerst von mir bemerkt zu sein. Plücker, dem man überhaupt die Idee verdankt, eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit vier oder mehreren Variabeln zu geben, wählte die Gerade als Element des Raumes R_4. Diese Wahl ist ohne Zweifel gut; es würde aber nach meiner Auffassung ebenso zweckmässig sein, die Kugel zu benutzen. Freilich besitzt die Linien-

---

*) Während der Correktur erfahre ich neue Beziehungen zwischen Darboux's und meinen Arbeiten. Vergl. den Schluss.

Geometrie Vorzüge, die der Kugel-Geometrie fehlen; das Umgekehrte ist aber auch wahr. Dies liegt darin, dass sowohl die Gerade wie die Kugel sich in eigenthümlicher Weise der Anschauung darbieten, andererseits auch darin, dass es einen einfachen Cyclus von Kugel-Transformationen giebt, die denjenigen Linien-Transformationen entsprechen, bei denen Schneiden eine invariante Beziehung ist. *Es wird daher fruchtbar sein, die Linien-Geometrie und die Kugel-Geometrie, wie ich es begonnen habe, neben einander zu entwickeln, indem man immer die Resultate der einen Geometrie durch meine Abbildung für die andere Geometrie verwerthet.* Wenn es mir zuweilen gelungen ist, schwierige Probleme zu erledigen, so liegt dies wesentlich darin, dass ich *abwechselnd* an Linien- und Kugel-Vorstellungen anknüpfe. Diese Methode, die für mich der Weg der Entdeckung gewesen ist, habe ich in meiner jetzigen Darstellung beibehalten, obgleich ich fürchten muss, dass der häufige Wechsel des geometrischen Bildes dem Leser Schwierigkeiten bereiten wird.

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie partieller Differential-Gleichungen zwischen drei Variablen.

In diesem Abschnitte werde ich versuchen, einerseits die von Plücker in seinem letzten Werke eingeführten geometrischen Begriffe, andererseits die eben besprochenen Entwickelungen für die Theorie partieller Differential-Gleichungen zu verwerthen. Man erkennt leicht, dass eine partielle Differential-Gleichung beliebiger Ordnung, deren Charakteristiken *Haupttangenten-Curven* auf den Integralflächen sind, durch die obengenannte Transformation in eine Differential-Gleichung derselben Ordnung, deren Charakteristiken *Krümmungslinien* sind, übergeführt wird. Es gründet sich hierauf ein interessanter Parallelismus zwischen mehreren wichtigen Classen partieller Differential-Gleichungen. An die Seite derselben stellen sich, wie wir später sehen werden, gewisse Differential-Gleichungen, deren Charakteristiken *geodätische Curven* sind.

Die folgenden Entwickelungen werden gewissermassen einen particulären Charakter haben, insofern ich mich nur mit *besonderen* Classen von Differential-Gleichungen beschäftige. Doch möchte ich hervorheben, dass der hier eingeschlagene Weg: nämlich die Behandlung von partiellen Differential-Gleichungen an erweiterte geometrische Begriffe anzuknüpfen, eine Methode zu sein scheint, aus welcher man überhaupt Fortschritte in der von Monge eingeschlagenen Richtung erwarten darf.

Ueber einige partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Zunächst betrachte ich drei in einander transformirbare Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, die ich der Kürze wegen mit den Symbolen D_{11}, D_{12}, D_{13} bezeichnen werde.

1) D_{11}. Die Charakteristiken sind Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen. Die Gleichungen D_{11} entsprechen, wie ich später zeigen werde, gewissermassen den Linien-Complexen und Linien-Congruenzen.

2) D_{12}. Die Charakteristiken sind Krümmungslinien. Eine jede D_{12} entspricht entweder einem Kugel-Complex oder einer Kugel-Congruenz.

3) D_{13}. Die Charakteristiken sind geodätische Curven. Bezeichnet H eine beliebige, bekannte Function von x, y, z und wie gewöhnlich p, q die partiellen Derivirten von z hinsichtlich x und y, so lässt eine jede D_{13} sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial H}{\partial x} p + \frac{\partial H}{\partial y} q - \frac{\partial H}{\partial z} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - 1}.$$

Diese Gleichungen sind, wie zu bemerken ist, nur vom *zweiten* Grade hinsichtlich p und q.

Aus dem Inhalte des folgenden Capitels hebe ich noch hervor, dass die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche gewissermassen darauf hinauskommt, eine particuläre D_{12} oder D_{11} zu integriren. Demzufolge lässt sich die bisherige Theorie geodätischer Curven für die neue Theorie der Plücker'schen Complexe verwerthen.

§ 14.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind.

40. Wir haben gefunden (§ 3., 10.), dass wenn die charakteristischen Curven einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden, die Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind.*) Es ist andererseits leicht zu erkennen, dass einer jeden Linien-Congruenz eine *lineare* partielle Differential-Gleichung erster Ordnung entspricht, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken — die Geraden der Congruenz nämlich — als Haupttangenten-Curven auf den Integral-

*) Herr Darboux, dem ich im Sommer 1870 in einem Gespräche mittheilte, dass jeder Linien-Complex eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung bestimmt, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven sind, kannte damals diesen Satz.

flächen auftreten. Umgekehrt werden wir beweisen, dass es keine weiteren partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung giebt, welche die besprochene Eigenschaft besitzen, als die genannten beiden Arten.

Schreiben wir eine allgemeine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung in der Form:

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0,$$

so müssen wir F, als Function von x, y, z, p, q aufgefasst, in allgemeinster Weise so bestimmen, dass in einem beliebigen Punkte einer Integralfläche die Richtung der Charakteristik mit derjenigen der Trajectorie zusammenfällt. Die beiden besprochenen Richtungen liegen nämlich hinsichtlich der beiden entsprechenden Haupttangenten harmonisch, und wenn sie also zusammenfallen, so werden sie zugleich mit der einen Haupttangente identisch. Nach Monge bestimmen aber:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dy - \frac{\partial F}{\partial q}\,dx = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)dy = 0$$

bezüglich die Richtungen der Charakteristik und der Trajectorie, und also kommt unser Problem darauf hinaus, das allgemeine Integral der partiellen Differential-Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung lässt sich nach den gewöhnlichen Methoden integriren; da wir jedoch hierdurch die Lösung in einer Form erhalten, die sich nicht unmittelbar interpretiren lässt, so wird es vortheilhafter sein, einen indirecten Weg einzuschlagen.

41. Setzen wir nun zunächst voraus, dass die gesuchte partielle Differential-Gleichung $F = 0$ keine lineare ist, so entsprechen derselben bekanntlich dreifach unendlich viele Charakteristiken, und also befriedigen diese Curven nur *eine* Gleichung von der Form:

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0.$$

Setzen wir hier statt y und z die äquivalenten Ausdrücke:

$$y = \frac{(y\,dx - x\,dy) + x\,dy}{dx}, \quad z = \frac{x\,dz - (x\,dz - z\,dx)}{dx},$$

so erhält die Gleichung der Charakteristiken ($f = 0$) die Form:

$$\chi\,[dx,\ dy,\ dz,\ (x\,dz - z\,dx),\ (y\,dx - x\,dy),\ \varphi(x)] = 0$$

und zwar wissen wir, dass wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist, und nur dann, die Charakteristiken von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden. Indem man nun nach den gewöhnlichen Regeln unter den Gleichungen:

$$\chi = 0, \quad \chi'_{dx} = \varrho p, \quad \chi'_{dy} = \varrho q, \quad \chi'_{dz} = -\varrho$$

die Grössen dx, dy, dz eliminirt, wobei ϱ wegfällt, erhält man die ursprüngliche partielle Differential-Gleichung ($F = 0$) in der Form:

$$\pi [x y z p q \varphi(x)] = 0,$$

und zwar fragt es sich hier, ob der Ausdruck π der Gleichung (1) in anderen Fällen genügen kann, als wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist.

Führt man auf π die durch (1) angegebenen Operationen aus, so bleibt nach einer Reduction, die sich darauf gründet, dass π in dem angegebenen Falle die Gleichung (1) befriedigt, nur zurück:

$$\frac{d\pi}{dp} \cdot \frac{d\pi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

eine Gleichung, die in drei zerfällt:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Ist erstens $\frac{\partial \pi}{\partial p}$ gleich Null, so kommt p gar nicht in der Gleichung $\pi = 0$ vor, und also lässt sich dieselbe auf die *lineare* Form:

$$q = \Phi(x y z)$$

bringen; diesen Fall haben wir aber beiläufig ausgeschlossen. Die Gleichungen $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sagen bezüglich, dass π nicht die Grösse φ enthält, und dass φ eine Constante ist, und somit ist meine anfängliche Behauptung, insofern sie sich auf nicht-lineare Gleichungen bezog, erwiesen.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass $F = 0$ eine lineare partielle Differential-Gleichung ist. Es giebt alsdann zweifach unendlich viele Charakteristiken, und es ist leicht zu erkennen, dass dieselben gerade Linien sein müssen, wenn die fragliche Eigenschaft eintreten soll. Betrachten wir nämlich einen Punkt p, die durch denselben gehende Charakteristik c und endlich eine variable, unendlich nahe Charakteristik c'. Es ist klar, dass die Tangentenebene der entsprechenden Integralfläche im Punkte p mit c' variirt; es soll aber diese Ebene die Curve c in diesem Punkte osculiren, und also muss c die Eigenschaft besitzen, dass ihren Punkten eine unbestimmte Osculationsebene entspricht. Dieses ist aber nur für die gerade Linie der Fall.

Die hiermit abgeleiteten Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Es giebt zwei distincte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind; die eine besteht aus linearen Differential-Gleichungen, deren geradlinige Charakteristiken eine Congruenz bilden. Die zweite Classe entspricht den Plücker'schen Linien-Complexen, in dem Sinne, dass die Charakteristiken einer solchen Differential-Gleichung von den Geraden eines Complexes umhüllt werden. Alsdann kommt die Aufgabe der Integration darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu

*finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linien-Complexe angehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen bezeichnen wir mit dem Symbole D_{11}.**)

Entspricht die D_{11} einer Linien-Congruenz, so ist die zugehörige Brennfläche das singuläre Integral. In dem zweiten Falle finden sich unter den Integralflächen, wie mir Herr Klein bemerkt, die Developpablen der singulären Linien, wie auch die Singularitätenfläche des betreffenden Linien-Complexes.

---

42. In Verbindung mit dem Inhalte dieses Paragraphen steht der folgende Satz:

Auf einer Fläche liegen einfach unendlich viele Curven, deren Tangenten einem gegebenen Linien-Complexe gehören. Haben diese Curven eine Umhüllungs-Curve, was im Allgemeinen nicht stattfindet, so sind zwei Fälle möglich. Entweder berühren diejenigen Complex-Kegel die Fläche, deren Spitzen auf der Umhüllungs-Curve liegen, und dann ist dieselbe eine Haupttangenten-Curve; oder die Tangenten der Umhüllungs-Curve sind Doppelkanten des betreffenden Complex-Kegels, in dem letzten Falle lässt sich nichts schliessen.

Es war durch Anwendung dieses Satzes, dass ich die Haupttangenten-Curven der tetraedral-symmetrischen Flächen (Götting. Nachr. Jan. 1870) bestimmte. [Durch eine andere Methode war Herr Clebsch, wie ich später erfahren habe, schon früher auf diese Bestimmung geführt worden, ohne indess etwas hierüber veröffentlicht zu haben. Später (Bulletin, Novbr. 1870, p. 8) erhielt Herr Darboux dasselbe Resultat als Corollar einer allgemeineren Bestimmung.] Jede tetraedral-symmetrische Fläche steht in der besprochenen Beziehung zu jedem Linien-Complexe, dessen Gerade das der Fläche zugehörige Fundamental-Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden.

§ 15.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind.

43. Wir wissen, dass unsere Kugel-Abbildung die Elemente einer Fläche f in die Elemente einer Fläche F überführt. Es wird hierbei offenbar ein paarweises Zusammengehören zwischen allen Curven der beiden Flächen festgestellt, und zwar entsprechen sich insbesondere

---

*) Herr Klein macht mich darauf aufmerksam, dass die Resultate dieses Paragraphen sich leicht und übersichtlich durch geometrische Betrachtungen beweisen lassen.

die Haupttangenten-Curven auf f und die Krümmungslinien auf F. Hieraus folgt, dass zwei Flächen f_1 und f_2, die einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, im Allgemeinen in Flächen F_1 und F_2 übergehen, die in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Dieser Satz erleidet jedoch eine wichtige Ausnahme (die freilich im Folgenden nicht in Betracht kommt), und um Alles möglichst klar zu stellen, gehe ich hierauf etwas näher ein.*)

Nach § 6., 18. 20. wissen wir, dass wenn die beiden Räume r und R durch ein Gleichungs-System:

$$F_1(x\,y\,z\;X\,Y\,Z) = 0, \quad F_2(x\,y\,z\;X\,Y\,Z) = 0$$

reciprok auf einander bezogen sind, sich ein Flächen-Element des einen Raumes, welches einen elementaren Complex-Kegel berührt, im anderen Raume als ein ähnliches Element abbildet. Nun giebt es offenbar im Allgemeinen in jedem Raume *vierfach* unendlich viele Elemente von dieser ausgezeichneten Lage. Wenn aber die elementaren Complex-Kegel des Raumes r *ebene* Strahl-Büschel sind, so giebt es in r nur *dreifach* unendlich viele solche Elemente — ich bezeichne sie mit dem Buchstaben e —, welche den *vierfach* unendlich vielen ausgezeichneten Elementen E des Raumes R entsprechen. *Einem Elemente e entsprechen alsdann einfach unendlich viele Elemente E.*

Dies tritt insbesondere bei unserer Kugel-Abbildung ein. Durch jeden Punkt in r geht nur *ein* ausgezeichnetes Element, dasjenige nämlich, welches dem betreffenden Punkte durch den linearen Complex $H = 0$ zugeordnet wird. Andererseits sind die ausgezeichneten Elemente E diejenigen, welche der Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0$$

genügen, wo P und Q wie früher die partiellen Derivirten von Z hinsichtlich X und Y bezeichnen sollen. Wie eine geometrische Betrachtung zeigt, *sind es jedesmal die einfach unendlich vielen Elemente E, die sich an eine Gerade von der Länge Null anschliessen, welche demselben Elemente e des Raumes r entsprechen.*

44. Nach den obenstehenden Entwickelungen können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn zwei Flächen f_1 und f_2 einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, und die Tangenten dieser Curve nicht dem linearen Complexe $H = 0$ angehören, so berühren die Bildflächen F_1 und F_2 einander nach einer Krümmungslinie. In dem ausgeschlossenen Falle gehören alle Tangenten der Flächen f_1 und f_2, die durch einen Punkt der

*) Es muss einer anderen Arbeit vorbehalten sein, eine eingehende Discussion aller Eigenthümlichkeiten zu geben, die bei der Nöther'schen Abbildung des linearen Complexes und meiner darauf begründeten Kugel-Abbildung hinsichtlich der Fundamental-Gebilde der beiden Räume stattfinden.

gemeinsamen Haupttangenten-Curve gehen, dem Complexe $H = 0$ an, und alsdann kann man nur schliessen, dass die Bildflächen F_1 und F_2 in eine gemeinsame Developpable, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis enthält, eingeschrieben sind (§ 26, 84 b.).

Berücksichtigt man indessen, dass es keine partielle Differential-Gleichung giebt, deren krummlinige Charakteristiken sämmtlich von Geraden des *linearen* Complexes $H = 0$ umhüllt werden, so lässt sich schliessen (§ 6., 17.), dass unsere Kugel-Abbildung eine jede D_{11} in eine partielle Differential-Gleichung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, überführt. Andererseits erhalten wir in dieser Weise alle Differential-Gleichungen von dieser Eigenschaft, weil der folgende Satz ohne Ausnahme gilt:

Zwei Flächen F_1 und F_2, die einander nach einer Krümmungslinie berühren, geben in r Bildflächen, die sich nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve berühren.

Es gehen also die im vorangehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in die folgenden über.

*Es giebt zwei distincte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind. Gleichungen der ersten Classe können dadurch charakterisirt werden, dass sie als vollständiges Integral den Inbegriff von zweifach unendlich vielen Kugeln — eine Kugel-Congruenz — gestatten. Das allgemeine Integral wird also von Röhrenflächen gebildet, und deren kreisförmige Krümmungslinien sind die Charakteristiken. Die zweite Classe entspricht den Kugel-Complexen. Die Aufgabe, eine solche Differential-Gleichung zu integriren, kommt geometrisch darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupt-Kugeln des einen Systems einem gegebenen Complexe angehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen werde ich mit dem Symbole D_{12} bezeichnen.**)

45. In seinem Werke: *Partielle Differential-Gleichungen* pag. 127—129 stellt Herr Du Bois-Reymond die Aufgabe, die wir eben erledigt haben. Er macht darauf aufmerksam, dass, wenn die Charakteristiken Krümmungslinien sind, dieses auch mit den Trajectorien der Fall ist. Alsdann schneiden aber Charakteristiken und Trajectorien einander orthogonal und dadurch wird das besprochene Problem (§ 14., 40.) darauf zurückgeführt, die partielle Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial q}+q\left(p\cdot\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]-\frac{\partial F}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial p}+p\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]+\frac{\partial F}{\partial z}\left[p\frac{\partial F}{\partial q}-q\frac{\partial F}{\partial p}\right]=0$$

*) Herr Darboux theilt mir mit, dass er auch bemerkt hat, dass die Aufgabe, eine Fläche durch eine Eigenschaft der Haupt-Kugeln zu bestimmen, in gewissem Sinne nur auf eine partielle Differential-Gleichung *erster* Ordnung führt. (Vergl. das auf Darboux bezügliche Citat in § 24.)

zu integriren. Herr Du Bois-Reymond führt diese Integration in einigen sehr einfachen Fällen*) aus, und äussert dabei die Vermuthung, dass auch der allgemeine Fall keine erheblichen analytischen Schwierigkeiten bieten würde. Jedenfalls hat die vorstehende Lösung ein eigenthümliches Interesse.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass, wenn zwei Flächen f_1 und f_2 mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Haupttangenten-Curve haben, die Bildflächen im Allgemeinen in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Demzufolge wird eine partielle Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind, durch unsere Kugel-Abbildung in eine Gleichung derselben Ordnung übergeführt, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind.

---

46. Ich werde hier kurz andeuten, wie sich einige metrische Theorien verallgemeinern lassen.

Der Begriff der Krümmungslinien einer Fläche erweitert sich bekanntlich folgenderweise. Es seien gegeben vierfach unendlich viele Flächen U, eine beliebige Fläche F und ein Punkt p derselben. Es giebt immer einige U, die eine stationäre Berührung mit F in p haben, und also F in einer Curve mit Spitze schneiden. Betrachtet man die Tangente dieser Spitze als eine dem Punkte p zugeordnete Richtung, so bildet die continuirliche Aufeinanderfolge einander schneidender zugeordneter Richtungen Curven, welche ich als die *U-Krümmungslinien* der Fläche F bezeichnen werde.

Bemerkenswerth ist der Fall, dass alle U aus einer gewissen Fläche U_0 durch Anwendung aller Translationen und Parallel-Transformationen hergeleitet werden können. Alle Theorien über Krümmungslinien und insbesondere die in dieser Abhandlung gegebenen erweitern sich in gewissem Sinne auf diesen Fall (§ 13., Schluss). Es ist alsdann beispielsweise immer möglich, alle Flächen zu finden, deren U-Krümmungslinien die Eigenschaft besitzen, dass die in ihren Punkten errichteten Flächen-Normalen mit einer Ebene parallel sind. Diese Aufgabe entspricht nämlich durch eine gewisse Transformation der von Herrn Bonnet gelösten: alle Flächen mit ebenen Krümmungslinien zu finden. Es gelten ferner die Sätze: a) Wenn eine Fläche nach der gewöhnlichen Methode auf einer Kugel abgebildet wird, so

*) Die beiden ersten Arten D_{12} des Herrn Du Bois-Reymond: die um eine Fläche umgeschriebenen Developpablen, und die einer gegebenen Axe zugehörigen Rotationsflächen, entsprechen *Congruenzen* eines *linearen* Kugel-Complexes. Die geometrische Bedeutung seiner dritten Art sehe ich im Augenblick nicht.

gehen die U-Krümmungslinien in eine Schaar *orthogonaler* Curven über. b) Die Bestimmung der U-Krümmungslinien einer Fläche F lässt sich darauf zurückführen, die Krümmungslinien einer gewissen anderen Fläche Φ zu finden. Sind insbesondere U_0 und F Minimalflächen oder Parallelflächen solcher, so ist auch Φ eine derartige Fläche, und dann können also die U-Krümmungslinien von F bestimmt werden.

Auch der Fall, dass alle Flächen U ähnlich und ähnlich gelegen sind, verdient eine besondere Untersuchung. Alsdann haben die einem Punkte zugehörigen Richtungen der U-Krümmungslinien paarweise eine harmonische Lage hinsichtlich der Haupttangenten der Fläche, wie hinsichtlich der Haupttangenten der stationär berührenden U.

Setzt man endlich voraus, dass alle U unendlich dünne Cylinder, das heisst gerade Linien sind, so werden die U-Krümmungslinien mit den Haupttangenten-Curven der betreffenden Fläche identisch.

§ 16.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Curven auf den Integralflächen sind.

47. Die Entwickelungen dieses Paragraphen lassen sich auf den bekannten Satz gründen: Wenn zwei Flächen I und U mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Krümmungslinie haben, so stehen ihre Centerflächen C_i und C_u in demselben gegenseitigen Verhältnisse hinsichtlich einer gemeinsamen geodätischen Curve.

Betrachtet man nun einerseits die Integralflächen I einer D_{12} und unter denselben die Flächen U eines vollständigen Integrals, andererseits die zugehörigen Centerflächen C_i und C_u, so sieht man leicht (§ 6., 17.), dass die Flächen C_i einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung D_{13} genügen, deren Charakteristiken geodätische Curven sind, und hierbei bilden die Flächen C_u ein vollständiges Integral.

Allgemein können wir sagen, dass den Integralflächen einer partiellen Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung D_{n2}, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, Centerflächen entsprechen, welche einer Differential-Gleichung derselben Ordnung D_{n3} genügen, und zwar sind die Charakteristiken des einen Systems geodätische Curven.*)

Nach dem Obenstehenden entspricht jeder D_{n2} eine Differential-Gleichung, deren Charakteristiken geodätische Curven sind; das Umge-

*) Einer jeden Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung entsprechen Integralflächen, deren Centerflächen einer gewissen Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügen. Ausser den Centerflächen besitzt die letzte Gleichung im allgemeinen Falle noch andere Integralflächen.

kehrte ist dagegen nicht wahr, und demzufolge sind die D_{n3} nicht die einzigen partiellen Differential-Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, dass ihre Charakteristiken geodätische Curven sind.

48. Zur Bestimmung der allgemeinen Form der Gleichungen D_{13} schlagen wir einen anderen Weg ein, indem wir uns auf die im ersten Abschnitte entwickelte Theorie reciproker Curven-Complexe stützen.

Sei nämlich im Raume r ein beliebiger Linien-Complex und in R der entsprechende Kugel-Complex gegeben, die sich beide durch eine Gleichung:

$$F(X\,Y\,Z\,H) = 0$$

darstellen lassen; hierbei muss man X, Y, Z, H einerseits als Linien-Coordinaten (§ 10., 30.) hinsichtlich vier paarweise in Involution liegender linearer Complexe, andererseits als Kugel-Coordinaten auffassen. *Indem wir nun den Mittelpunkt* $(X\,Y\,Z)$ *einer beliebigen Kugel* $(X\,Y\,Z\,H)$ *des besprochenen Kugel-Complexes als das Bild der Geraden* $(X\,Y\,Z\,H)$ *auffassen, erhalten wir eine Abbildung des Linien-Complexes* $F(X\,Y\,Z\,H) = 0$ *im Punktraume* R, bei welcher einer jeden Complex-Linie ein bestimmter Punkt entspricht, während es eine Anzahl von Complex-Geraden giebt, die sich als derselbe Punkt abbilden — so viele nämlich, wie der Grad der Gleichung $F(X\,Y\,Z\,H) = 0$ hinsichtlich H beträgt. Den Complex-Linien, die durch einen Punkt gehen, entsprechen die Punkte einer Curve C, und es ist einleuchtend, dass *alle C einen Curven-Complex bilden, der zu unserem Linien-Complexe in der reciproken Beziehung steht,* die wir im ersten Abschnitte betrachtet haben. Hierbei müssen wir erinnern, dass die zwei reciproken Curven-Complexen zugehörigen partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung in dem Sinne mit einander äquivalent sind, dass die Lösung der einen diejenige der anderen giebt.

Setzt man (§ 9., 27.) in die Gleichungen einer Geraden:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

die Werthe:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(X + iY), \quad s = \tfrac{1}{2}(X - iY),$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}(Z \pm H), \quad r = -\tfrac{1}{2}(Z \mp H)$$

ein, so bestimmen die hervorgehenden Relationen:

$$-(Z \mp H)z = 2x - (X + iY)$$
$$(X - iY)z = 2y - (Z \pm H)$$

in denen man H als die durch $F(X\,Y\,Z\,H) = 0$ bestimmte Function von X, Y, Z auffasst, die eben besprochene Abbildung der beiden Räume. Indem man nun (§ 3., 6.) hinsichtlich X, Y, Z differentiirt:

$$-(dZ \mp dH)z = -(dX + idY)$$
$$(dX - idY)z = -(dZ \pm dH),$$

und zwischen diesen beiden (und den ursprünglichen) Gleichungen

x, y, z eliminirt, erhält man die *Differential-Gleichung des Curven-Complexes in R:*

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (i\,dH)^2 = 0,$$

oder, wie man auch schreiben kann:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2,$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung ist, dass die beiden Kugeln $(X\,Y\,Z\,H)$ und $(X + \Delta X,\ Y + \Delta Y,\ Z + \Delta Z,\ H + \Delta H)$ einander berühren, dass also die entsprechenden Geraden sich schneiden.

Die elementaren Complex-Kegel:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial X}\,dX + \frac{\partial H}{\partial Y}\,dY + \frac{\partial H}{\partial Z}\,dZ\right)^2$$

berühren, wie ihre Gleichung zeigt, den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis in den beiden Durchschnittspunkten desselben mit der Ebene:

$$\frac{\partial H}{\partial X}\,dX + \frac{\partial H}{\partial Y}\,dY + \frac{\partial H}{\partial Z}\,dZ = 0,$$

und also sind sie Umdrehungs-Kegel, deren Axe die Richtungs-Cosinus: $\frac{\partial H}{\partial X}$, $\frac{\partial H}{\partial Y}$, $\frac{\partial H}{\partial Z}$ besitzt. Wir erhalten somit die folgende übersichtliche Vorstellung von diesem Curven-Complexe:

Die elementaren Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Fläche aus der Schaar $H =$ Const. liegen, sind Umdrehungs-Kegel, deren Axe die entsprechende Normale der genannten Fläche ist. Die Winkel-Oeffnung dieser Kegel variirt, wie die Gleichung:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2$$

zeigt, in solcher Weise, dass die unendlich nahen Flächen $H = C$ und $H = C + \Delta C$ auf den Erzeugenden dieser Kegel Segmente derselben Grösse abschneiden. Hieraus folgt, wie wir sogleich zeigen werden, dass die Flächen $H = C$ die Integralflächen unserer D_{13} noch äquidistanten Curven schneiden; hierbei sind die zugehörigen orthogonalen Curven bekanntlich geodätische Linien und zugleich Charakteristiken hinsichtlich der D_{13}. Diese geometrische Interpretation einer D_{13} giebt leicht als allgemeine Form derselben:

$$\frac{\partial H}{\partial X}P + \frac{\partial H}{\partial Y}Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2 - 1},$$

welche Gleichung wir später durch eine analytische Methode finden werden.

Man betrachte eine beliebige auf $H = C$ gelegene Curve k und die den Punkten derselben zugehörigen elementaren Complex-Kegel, deren infinitesimale Durchschnitts-Curven mit der Fläche $H = C + \Delta C$ zwei Umhüllungs-Curven k' bestimmen, unter denen wir die eine wählen; bekanntlich gehört der zwischen k und k' gelegene Flächen-Streifen einer Integralfläche an. Durch Wiederholung

dieser Operation findet man auf den successiven Flächen $H = C$ eine Schaar Curven k, deren Inbegriff eine Integralfläche bildet, und dabei folgt aus dem Vorstehenden, dass alle k äquidistante Curven sind. Nun stehen immer die Tangente einer k und die Axe des zugehörigen Complex-Kegels senkrecht auf einander, und also berührt dieser Kegel die betreffende Integralfläche nach einer Richtung, die ebenso die Tangente von k orthogonal schneidet. *Die Charakteristiken und die Curven k bilden, wie früher behauptet, ein Orthogonal-System.* Die Curven k sind aber äquidistant, und also finden wir den Satz wieder, dass die Charakteristiken einer D_{13} geodätische Curven auf den Integralflächen sind.

Um die der Differential-Gleichung:

$$W = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ\right)^2 = 0$$

zugehörige partielle Differential-Gleichung zu bestimmen, muss man unter den Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial dX} = \varrho P, \quad \frac{\partial W}{\partial dY} = \varrho Q, \quad \frac{\partial W}{\partial dZ} = -\varrho$$

die Grössen dX, dY, dZ eliminiren, und hierbei findet man als *allgemeine Form der partiellen Differential-Gleichungen D_{13}*:

$$\frac{\partial H}{\partial X} P + \frac{\partial H}{\partial Y} Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2 - 1},$$

vorausgesetzt, dass H eine beliebige bekannte Function von X, Y, Z bezeichnet.

Aus unseren früheren Entwickelungen (§ 6., 18.) folgt, dass die Integration einer D_{13} auf die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des entsprechenden Linien-Complexes zurückgeführt werden kann. Die betreffenden Charakteristiken sind ja reciproke Curven hinsichtlich der Abbildungs-Gleichungen:

$$-(Z \mp H) z = 2x - (X + iY)$$
$$(X - iY) z = 2y - (Z \pm H),$$

und wenn man also die allgemeine Gleichung des einen Curven-Systems kennt, so findet man diejenige des anderen durch Differentiation und Elimination. Wenn wir andererseits sagen, dass die Integration einer D_{13} mit derjenigen einer D_{12} äquivalent ist, so kommt dies, geometrisch aufgefasst, darauf hinaus, statt eine Fläche durch eine Eigenschaft der Haupt-Kugeln zu bestimmen, die entsprechende Centerfläche zu suchen. Herr Bonnet benutzt eine solche Transformation bei seiner Bestimmung aller Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

Die obenstehende Form einer D_{13} theilte ich der Akademie zu Christiania (October 1870) in einer Note mit, in welcher ich unter anderem die drei Classen D_{11}, D_{12}, D_{13} aufstellte. Eine symmetrische

Form erhält man, wenn man die Aufgabe folgendermassen stellt: Es soll eine Gleichung $\Phi(XYZH) = 0$ gefunden werden, die, mit derjenigen des betreffenden Kugel-Complexes $\Pi(XYZH) = 0$ verbunden, Z als die verlangte Function von X und Y giebt. Diese Bemerkung, oder eigentlich eine damit äquivalente, verdanke ich Herrn Klein, der darauf durch seine liniengeometrischen Untersuchungen geführt wurde (vergl. dessen zweite, hier folgende Arbeit). Andererseits theilt Herr Darboux mir eben (October 1871) mit, dass er eine entsprechende Form durch Untersuchungen über Kugel-Complexe gefunden hat.

Die wichtigsten Resultate der drei vorangehenden Paragraphen fasse ich folgendermassen zusammen:

Partielle Differential-Gleichungen n^{ter} Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind, und eine Classe, deren Charakteristiken geodätische Linien sind, bilden äquivalente Probleme in dem Sinne, dass sie gegenseitig in einander transformirt werden können. Ist insbesondere n gleich 1, so entsprechen diesen Problemen Untersuchungen über Congruenzen und Complexe, deren Elemente gerade Linien oder Kugeln sind.

Hier soll auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass ebenso wie es einen Cyclus von Verwandtschaften giebt, welche die Gleichungen D_{n1} in Gleichungen derselben Art überführen, alle linearen Punkt-Transformationen nämlich zusammen mit allen dualistischen Umformungen des Raumes, es auch einen Cyclus von Verwandtschaften giebt, welche bezüglich die Gleichungen D_{n2} und D_{n3} ihren Charakter behalten lassen.

§ 17.

Ueber Linien-Complexe, welche infinitesimale lineare Transformationen in sich selbst besitzen.*)

49. Linien-Complexe, die sich durch eine Gleichung der Form:

$$F(XYZ) = 0$$

darstellen lassen, bilden sich als die Kugeln ab, deren Mittelpunkte auf der Fläche $F(XYZ) = 0$ liegen. Dieser Kugel-Complex wird nun offenbar durch eine *beliebige* Parallel-Transformation, oder was auf dasselbe hinauskommt, durch eine *infinitesimale* solche in sich selbst übergeführt, und also können wir nach § 13., 38. den Linien-Complex

*) Cfr. *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* par Klein et Lie, Comptes rendus 1870. *Ueber vertauschbare lineare Transformationen* von Klein und Lie, Math. Ann. Bd. 4.

$F(XYZ) = 0$ dadurch charakterisiren, dass er eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$z_1 = z_2; \quad x_1 = x_2 + a z_2 + b; \quad y_1 = y_2 + c z_2 + d$$

gestattet.

Nun ist es bekannt, dass die Aufgabe, die allgemeine Fläche zu finden, deren Krümmungs-Centra des einen Systems auf einer gegebenen Fläche liegen, darauf hinauskommt, die geodätischen Curven dieser Fläche zu finden. Unsere früheren Theorien geben also den folgenden interessanten Satz: *Die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes $F(XYZ) = 0$ und die Auffindung der geodätischen Curven auf der Fläche $F(XYZ) = 0$ sind äquivalente Probleme.* Es ist zu bemerken, dass der Grad des Linien-Complexes gleich der Ordnung der Fläche ist; während aber die Fläche eine beliebige ist, muss der Complex die besprochene infinitesimale Transformation in sich selbst besitzen.

Unter den linearen Tangential-Complexen des Kugel-Complexes $F(XYZ) = 0$ betrachte ich den folgenden:

$$\frac{\partial F_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0) = 0,$$

dessen Kugeln eine Tangential-Ebene der Fläche $F(XYZ) = 0$ orthogonal schneiden (§ 10., 30.). Eine beliebige Parallel-Transformation führt sowohl den gegebenen Complex wie den Tangential-Complex in sich selbst über, und also sehen wir, dass diese Complexe einander in einfach unendlich vielen gemeinsamen Kugeln berühren. Der Complex $F(XYZ) = 0$ lässt sich in Folge dessen als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen auffassen. Wenden wir uns zu den Linien-Vorstellungen, so können wir den entsprechenden Linien-Complex definiren als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit einem gegebenen linearen Complexe $H = 0$ in Involution liegen, und ausserdem eine gemeinsame Gerade desselben (die Fundamental-Gerade des Raumes r) enthalten (cfr. § 10., 30.).

Zweifach unendlich viele lineare Complexe, die mit einem gegebenen in Involution liegen und ausserdem eine Gerade dieses letzten Complexes enthalten, umhüllen einen Linien-Complex, dessen Haupttangenten-Curven sich dadurch bestimmen lassen, dass man die geodätischen Curven einer gewissen Fläche aufsucht.

Im nächsten Abschnitte werde ich auf den Inhalt dieser Nummer zurückkommen.

50. Durch die Entwickelungen der vorangehenden Nummer wird man darauf geführt, sich die Frage zu stellen, ob die Bestimmung der Haupttangenten-Curven sich immer vereinfachen lässt, wenn der betreffende Linien-Complex eine infinitesimale lineare Transformation

gestattet. Die Antwort liegt unmittelbar in den obengenannten Arbeiten von Herrn Klein und mir (vergl. besonders diese Annalen Bd. 4. p. 80.). Wir haben nämlich überhaupt die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass wenn bei einem Gebilde eine infinitesimale Transformation bekannt ist, sich die Bestimmung von anderen Gebilden, die mit dem gegebenen in einer durch die betreffende Transformation unzerstörbaren Beziehung stehen, im Allgemeinen durch passende Coordinaten-Wahl vereinfachen lässt.

Hierbei muss man diejenigen Curven anwenden, die den geometrischen Ort bilden für die infinitesimalen Wege, welche alle Punkte des Raumes während der besprochenen Transformation beschreiben. Setzen wir insbesondere voraus, dass die bekannte Transformation eine lineare ist, so werden diese Curven eben die von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung Raum-Curven W untersuchten. Man ordne die betreffenden, zweifach unendlich vielen Curven W auf zwei Weisen zusammen in Flächen-Schaaren:

$$U_1 = A; \quad U_2 = B.$$

Es geht alsdann jede Fläche U_1 oder U_2 durch die zugehörige Transformation in sich über. Man wähle ferner eine dritte Schaar: diejenigen Flächen

$$V = C$$

nämlich, die aus einer beliebig gewählten durch continuirliche Anwendung der betreffenden Transformation hervorgehen, und hierbei soll C der Parameter der Transformation sein.

Führt man nun U_1, U_2 und V als Punkt-Coordinaten ein, so nimmt beispielsweise die Gleichung einer jeden Fläche, die jene Transformation gestattet, die Form an:

$$F(U_1\, U_2) = 0.$$

Ebenso kann eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Inbegriff von elementaren Complex-Kegeln durch die Transformation ungeändert bleibt, folgenderweise geschrieben werden:

$$F\left(U_1\, U_2\, \frac{\partial V}{\partial U_1}\, \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0,$$

was bekanntlich ein Schritt vorwärts ist. Dieses ist insbesondere der Fall mit der D_{11} eines Linien-Complexes, der selbst ungeändert bleibt.

Betrachten wir z. B. die vier paarweise in Involution liegenden linearen Complexe $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $H = 0$ und einen Linien-Complex, dessen Gleichung die folgende ist:

$$F\left(\frac{X}{H}\, \frac{Y}{H}\, \frac{Z}{H}\right) = 0,$$

so ist es einleuchtend, dass eine jede Transformation unter den unendlich vielen:

$$X_1 = mX_2, \quad Y_1 = mY_2, \quad Z_1 = mZ_2, \quad H_1 = mH_2$$

unseren Complex in sich überführt, und also nimmt die zugehörige D_{11} die obenstehende Form an. Hierher gehört, wie im nächsten Abschnitte gezeigt werden soll, ein Complex zweiten Grades mit 17 Constanten, und zwar ist derselbe der allgemeine Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche eine Regelfläche ist. Die Complexe zweiten Grades mit 18 und 19 Constanten gestatten keine infinitesimale lineare Transformation.*)

51. Ebenso ist es für die Untersuchung von räumlichen Gebilden, welche zwei infinitesimale und permutable lineare Transformationen gestatten, vortheilhaft, eine besondere Coordinaten-Wahl zu machen. Erstens nimmt man die einfach unendlich vielen Flächen

$$V = A,$$

die durch unsere Transformationen ungeändert bleiben. Man wähle ferner zwei distincte *infinitesimale* Transformationen β, γ aus unserem geschlossenen Systeme und endlich zwei Flächen B_0 und C_0. Durch continuirliche Anwendung der Transformationen β und γ auf diese Flächen erhält man zwei Flächen-Schaaren:

$$U_1 = B, \quad U_2 = C,$$

wo B und C Transformations-Constanten bezeichnen. Wählt man nun V, U_1 und U_2 zu Punkt-Coordinaten, so nimmt die D_{11} eines Linien-Complexes, der durch unsere Transformationen ungeändert bleibt, die Form:

$$F\left(V \frac{\partial V}{\partial U_1} \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung lässt sich bekanntlich auf eine Quadratur zurückführen.

Wir treffen somit eine Classe Complexe, deren Haupttangenten-Curven wir bestimmen können. Hierher gehört z. B. der Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche in zwei Flächen zweiten Grades zerfallen ist, welche dann nothwendig vier Erzeugende gemein haben.

---

*) Der Linien-Complex $F\left(\frac{X}{H} \frac{Y}{H} \frac{Z}{H}\right) = 0$ lässt sich auch definiren als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit zwei gegebenen linearen Complexen in Involution liegen. Unter den Haupttangenten-Curven eines solchen Complexes giebt es einfach unendlich viele ausgezeichnete Schaaren. Jede besteht aus einfach unendlich vielen Complex-Curven eines linearen Complexes $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$ Das eben ausgesprochene Theorem ist zu gleicher Zeit eine Transformation und Verallgemeinerung des bekannten Satzes: Unter den geodätischen Curven einer Fläche giebt es einfach unendlich viele, deren Tangenten den imaginären Kugel-Kreis schneiden. Die hier betrachteten Linien-Complexe besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass ihre Singularitäten-Flächen Regelflächen mit zwei geraden Leitlinien sind. Jede krumme Haupttangenten-Curve einer solchen Regelfläche wird auch von Geraden eines linearen Complexes $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$ umhüllt.

Man erhält hier beispielsweise eine allgemeine Bestimmung der geodätischen Curven auf einer jeden Schraubenfläche. Der Inbegriff aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer solchen Fläche liegen, gestattet nämlich zwei permutable infinitesimale Transformationen in sich selbst: eine Schrauben-Bewegung und eine Parallel-Transformation, und nach § 13. entsprechen solche Umformungen des Kugel-Raumes R linearen Punkt-Transformationen des Linien-Raumes r. Es gehört also diejenige D_{11}, deren Integration mit der Bestimmung jener geodätischen Curven äquivalent ist, in die in N. 51. besprochene Kategorie, womit meine Behauptung erwiesen ist.

Sucht man die geodätischen Curven auf einer Fläche, die eine infinitesimale lineare Punkt-Transformation gestattet, bei welcher der imaginäre Kugel-Kreis seine Lage behält, so kann man nach der in N. 50. auseinander gesetzten Methode dieses Problem darauf zurückführen, eine gewöhnliche Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zu integriren. Die Krümmungslinien und Haupttangenten-Curven dieser Flächen können bestimmt werden. (Vergl. die citirte Arbeit Math. Ann. Bd. 4. p. 84.)

---

52. Als letztes Beispiel betrachte ich endlich die bekannte Aufgabe: alle Flächen zu finden, deren Normalen einem gegebenen Linien-Complexe angehören.*) Herr Abel Transon hat gezeigt, dass dieses Problem, welches unmittelbar auf eine Gleichung der Form:

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0$$

führt, immer eine Vereinfachung zulässt.**) Dieselbe kann auf die folgende einfache Bemerkung des Herrn Darboux (Bulletin, Novbr. 1870, p. 3) gestützt werden: Die Parallelflächen einer Integralfläche sind selbst Integralflächen. Der Inbegriff aller Integralflächen gestattet also eine infinitesimale Parallel-Transformation, und somit gehört die Gleichung $F = 0$ in die Kategorie der Nummer 50.

Setzen wir nun weiter voraus, dass der Linien-Complex eine infinitesimale Bewegung zulässt, so wird $F = 0$ integrabel. Dies ist insbesondere der Fall, wenn der Complex durch Rotation einer Linien-Congruenz um eine feste Axe beschrieben werden kann. Hierher gehört der lineare Complex, und es ist in der That auch bekannt, obgleich

*) Es ist vielleicht nirgendwo ausgesprochen worden, dass diese Aufgabe in gewissem Sinne mit der folgenden äquivalent ist: alle Flächen zu finden, die eine Schaar geodätische Curven enthalten, deren Tangenten einem gegebenen Linien-Complexe angehören. Sieht man ab von den Developpablen des betreffenden Linien-Complexes, so drückt sich das eben besprochene Problem *unmittelbar* durch eine partielle Gleichung *erster* Ordnung aus.

**) Journal de l'Ecole Polytechnique 1861.

es vielleicht nirgendwo explicite ausgesprochen worden ist, dass alle Schraubenflächen, die einer gewissen Schrauben-Bewegung entsprechen, der betreffenden Gleichung $F=0$ genügen.*) Hierher gehört ferner ein Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche aus einer Kugel und zwei parallelen Tangenten-Ebenen derselben besteht, endlich auch der bekannte Complex, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden, unter der Voraussetzung, dass zwei Tetraeder-Ecken auf dem imaginären Kugel-Kreise liegen.

Herr Darboux findet mittelst seiner obenstehenden Bemerkung, dass es eine andere homographische Particularisation dieses Complexes giebt, die von Binet und Chasles betrachtete nämlich, dessen zugehörige $F=0$ sich integriren lässt. Dies liesse sich auch daraus schliessen, dass man in diesem Falle, wie Herr Reye bemerkt hat, zweifach unendlich viele Flächen zweiten Grades angeben kann, deren Normalen Complexlinien sind.

§ 18.

Trajectorie-Kreis. Trajectorie-Curve.

53. Auf jeder Kugel eines Kugel-Complexes liegt ein ausgezeichneter Kreis, der gewissermassen als Repräsentant der benachbarten Kugeln aufzufassen ist. Um den Sinn dieser Behauptung zu erklären, um ferner die Gleichung dieses Kreises zu finden, wird es vortheilhaft sein, sich auf die Linien-Geometrie zu stützen.

Nach Plücker giebt es einfach unendlich viele lineare Complexe, die einen gegebenen Complex $F(XYZH)=0$ in einer Geraden $(X_0 Y_0 Z_0 H_0)$ desselben berühren; dies ist so zu verstehen, dass die unendlich benachbarten Geraden allen diesen Complexen gemein sind. In unserem Coordinaten-Systeme ist ein Tangential-Complex ausgezeichnet, der folgende nämlich:

$$H - H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0).$$

Derselbe besteht, wenn wir zu den Kugel-Vorstellungen zurückkehren, aus allen Kugeln, welche die Ebene:

$$-H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0)$$

*) Ein linearer Complex gestattet zwei infinitesimale und permutable Bewegungen. In Folge dessen besitzt die zugehörige $F=0$ *drei* infinitesimale und permutable Transformationen in sich selbst. Die entsprechende partielle Differential-Gleichung des Linien-Raumes r gestattet drei solche Transformationen, die *lineare Punkt*-Transformationen sind. Hieraus lässt sich z. B. schliessen, dass eine jede Schrauben-Bewegung zweifach unendlich viele Schraubenflächen giebt, auf denen die betreffenden Schraubenlinien Krümmungslinien sind.

unter demselben Winkel schneiden, wie die Kugel:

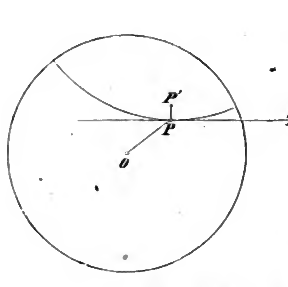
$$H_0^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2.$$

Man sieht, dass die beiden letzten Gleichungen oder der durch dieselben dargestellte Kreis die benachbarten Kugeln definirt. Insbesondere wird die Kugel $(X_0\, Y_0\, Z_0\, H_0)$ in den Punkten dieses Kreises von einfach unendlich vielen benachbarten Kugeln berührt. Man kann bemerken, dass unser Kreis zugleich auf dem der Kugel H_0 zugehörigen elementaren Complex-Kegel:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2$$
$$= \left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0)\right]^2$$

liegt, und dies ist geometrisch evident, indem dieser Kegel alle Richtungen definirt, nach denen man aus dem Punkte $(X_0\, Y_0\, Z_0)$ gehen muss, wenn die zugehörige Kugel die ursprüngliche $(X_0\, Y_0\, Z_0\, H_0)$ berühren soll.

Erinnert man nun die geometrische Bedeutung des Problems: die einem Kugel-Complexe zugehörige D_{12} zu integriren, so sieht man, dass jede Integralfläche, die eine stationäre Berührung mit der Kugel H_0 hat, dieselbe in einem Punkte jenes Kreises berührt; hierbei ist, wie ich sogleich beweisen werde, die zugehörige Tangente PT (siehe die Figur) des Kreises jedesmal die entsprechende Trajectorien-Richtung der Integralfläche.



Die Gerade PO (O ist der Mittel-Punkt unserer Kugel) berührt nämlich in O eine auf der Centerfläche unserer Integralfläche gelegene geodätische Curve, deren Tangenten die Integralfläche in den Punkten einer Charakteristik (Krümmungslinie) treffen. Bezeichnet nun P' einen von diesen Punkten, der P unendlich nahe liegt, so osculirt die Ebene OPP' die besprochene geodätische Curve in O, und steht in Folge dessen senkrecht auf der Ebene OPT, die zugleich den elementaren Complex-Kegel

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2$$
$$= \left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0)\right]^2$$

nach der Geraden OP und die Centerfläche im Punkte O berührt. Die elementare Linie PT schneidet also die Krümmungs-Richtung

PP' orthogonal — PT ist die Trajectorien-Richtung. Es soll darum unser Kreis der Trajectorien-Kreis der Kugel H_0 heissen.

Jede Kugel eines Kugel-Complexes wird in den Punkten eines gewissen Kreises von benachbarten Kugeln des Complexes berührt. Alle Integralflächen der zugehörigen D_{12}, für welche die Kugel Haupt-Kugel ist, berühren dieselbe in einem Punkte jenes Kreises, und hierbei ist die entsprechende Tangente des Kreises jedesmal die Trajectorien-Richtung. Dieser Kreis, den ich als Trajectorien-Kreis der Kugel bezeichne, spielt eine bedeutende Rolle in Untersuchungen über Kugel-Complexe.

Alle Kugeln des Raumes, die eine gegebene Kugel eines Complexes in den Punkten des Trajectorien-Kreises berühren, bilden eine Kugel-Congruenz, die das Bild derjenigen speciellen linearen Linien-Congruenz ist, welche allen einer Complexlinie zugehörigen linearen Tangential-Complexen gemein ist.

54. Eine sinnliche Vorstellung des Problems, eine gegebene D_{12} zu integriren, erhält man folgenderweise. Eine jede partielle Differential-Gleichung ersten Grades:

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0$$

scheidet aus den fünffach unendlich vielen Flächen-Elementen des Raumes vierfach unendlich viele aus. Die einer D_{12} entsprechenden Flächen-Elemente vertheilen sich insbesondere in dreifach unendlich viele Schaaren, deren jede von einfach unendlich vielen Elementen gebildet ist, die auf einer Kugel des gegebenen Complexes liegen und sich an den Trajectorien-Kreis derselben anschliessen.

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, dass man aus der Gleichung eines Kugel-Complexes $H = F(X\,Y\,Z)$ folgendermassen die Differential-Gleichung zwischen $X\,Y\,Z\,dX\,dY\,dZ$ finden kann, welche die Trajectorien der zugehörigen D_{12} befriedigen. Aus den beiden Gleichungen des Trajectorien-Kreises:

$$U = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 - H_0^2 = 0$$

$$V = H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0) = 0$$

und den entsprechenden Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial X}dX + \frac{\partial U}{\partial Y}dY + \frac{\partial U}{\partial Z}dZ = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial X}dX + \frac{\partial V}{\partial Y}dY + \frac{\partial V}{\partial Z}dZ = 0$$

eliminirt man $X_0\,Y_0\,Z_0$, und es geht die gesuchte Gleichung hervor.

Um endlich die partielle Differential-Gleichung D_{12} selbst aus der Gleichung des Kugel-Complexes zu finden, könnte man in folgender Weise vorgehen. Der Trajectorien-Kreis genügt der Gleichung:

$$(1)\quad H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0) = 0,$$

ferner gelten für die Flächen-Elemente unserer Kugel, die sich an diesen Kreis anschliessen, welche somit der Gleichung D_{12} genügen, die folgenden Relationen:

$$(2)\quad X - X_0 = \frac{H_0 P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}; \quad Y - Y_0 = \frac{H_0 Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}; \quad Z - Z_0 = \frac{-H_0}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}.$$

Bei Einsetzung dieser Werthe in (1) findet man:

$$\sqrt{1+P^2+Q^2} + P\frac{\partial H_0}{\partial X_0} + Q\frac{\partial H_0}{\partial Y_0} - \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} = 0,$$

und in diese Gleichung muss man statt $X_0\, Y_0\, Z_0$ setzen die aus (2) genommenen Werthe dieser Grössen, ausgedrückt durch X, Y, Z, P und Q.

In den letzten analytischen Entwickelungen dachten wir uns immer H_0 als eine gegebene Function von $X_0\, Y_0\, Z_0$.

55. Unter den elementaren Complex-Kegeln einer D_{12}, deren Scheitel in einer Ebene liegen, giebt es einfach unendlich viele, welche diese Ebene berühren. Der Ort der betreffenden Scheitel ist eine Curve c, deren Tangente (als Trajectorien-Richtung) jedesmal senkrecht steht hinsichtlich der Berührungs-Richtung des entsprechenden Complex-Kegels (die Richtung der Charakteristik). Die Curve c liesse sich auch definiren als *geometrischer Ort aller Flächen-Elemente unserer Ebene, welche der gegebenen D_{12} genügen.*

Man könnte ebenso alle elementaren Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Kugel liegen, betrachten und den Ort der Punkte suchen, deren zugehöriger Kegel die Kugel berührt. Ich behaupte, dass auch *die Tangente dieser Curve und die entsprechende Berührungs-Richtung des Kegels orthogonal sind.* Zum Beweis ist nur erforderlich, eine Transformation durch reciproke Radien auszuführen, in solcher Weise nämlich, dass die Kugel in eine Ebene, der Kugel-Complex in einen neuen Kugel-Complex übergeht. Die besprochene Curve nennen wir die Trajectorien-Curve unserer Kugel, und es ist klar, dass wenn die Kugel dem Complexe gehört, dass dann die Trajectorien-Curve in den Trajectorien-Kreis und eine zweite Curve zerfällt. Wir können auch sagen, dass *die Trajectorien-Curve einer Kugel der geometrische Ort für alle Flächen-Elemente derselben ist, welche der gegebenen D_{12} genügen.*

Wenn die Kugel infinitesimal wird, so umhüllen diejenigen Flächen-Elemente derselben, die sich an die Trajectorien-Curve anschliessen, den betreffenden elementaren Complex-Kegel.

Der Kegel, dessen Spitze im Centrum einer beliebigen Kugel liegt und welcher die Trajectorien-Curve derselben enthält, geht, wenn die Kugel infinitesimal wird, in den entsprechenden *Normalen-Kegel* über, das heisst in denjenigen Kegel, dessen Erzeugende Normalen aller Integralflächen sind, die durch den betreffenden Punkt gehen.

Denkt man sich beispielsweise, dass man eine D_{12} kennt, deren sämmtliche Trajectorien-Curven Kreise sind, so lässt sich schliessen, dass alle Normal-Kegel und also zugleich alle elementaren Complex-Kegel *Umdrehungs-Kegel* sind. Alsdann hat unsere D_{12} die folgende Form:

$$\sqrt{1+P^2+Q^2} + F_1(XYZ).P + F_2(XYZ).Q + F_3(XYZ) = 0.$$

Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung.

Partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung theilen sich bekanntlich in zwei Gruppen, indem durch jeden Punkt einer Integralfläche entweder nur eine oder auch zwei Charakteristiken gehen können. Unter den Gleichungen der ersten Gruppe betrachte ich diejenigen, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind. Diese Gleichungen haben die folgende Form, vorausgesetzt, dass F eine beliebige Function von $x\,y\,z\,p\,q$ bezeichnet:

$$r + 2Fs + F^2 t = 0 \qquad (D'_{21})$$

$$[rt - s^2]F^2 - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,F + [1+p^2+q^2]^2 = 0. \qquad (D'_{22})$$

Die Integration einer D'_{21} kommt geometrisch darauf hinaus: alle Flächen zu finden, deren Haupttangenten des einen Systems nach irgend einem Gesetz durch die Lage des Flächen-Elementes $(x\,y\,z\,p\,q)$ bestimmt werden. Andererseits ist die geometrische Bedeutung einer D'_{22} die folgende: alle Flächen zu finden, deren Haupt-Kugeln des einen Systems durch das Flächen-Element bestimmt werden.

Ebenso betrachte ich unter den Gleichungen der zweiten Gruppe alle, deren beide Schaaren von Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind. Die Form derselben ist:

$$rt - s^2 = F \qquad (D''_{21})$$

$$r - \frac{1+p^2}{pq}s + \frac{1+q^2}{pq}Fs - Ft = 0. \qquad (D''_{22})$$

Eine D''_{21} bestimmt jedesmal alle Flächen, deren Krümmungs-Mass von der Lage des Flächen-Elementes nach einem gegebenen Gesetze abhängt. Endlich kommt die Integration einer D''_{22} darauf hinaus, alle Flächen zu finden, auf denen die Richtungen der Krümmungslinien durch das Flächen-Element bestimmt werden.

Diese vier wichtigen Gleichungen, die durch meine Abbildung paarweise einander entsprechen, sind, wie man sieht, Specialfälle der bekannten Differential-Gleichung:

$$(1) \qquad (rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0.$$

Man weiss, dass Gleichungen dieser Art zuweilen ein oder zwei allgemeine erste Integrale besitzen, und es existirt sogar eine allgemeine

Methode, um zu entscheiden, ob dies bei einer gegebenen Gleichung der Fall ist. Dagegen hat man sich, so viel ich weiss, nicht damit beschäftigt, die allgemeinste Form der Gleichungen (1) anzugeben, welche ein erstes Integral, bezüglich zwei allgemeine erste Integrale zulassen. Es ist mir gelungen, diese Bestimmung für die Gleichungen D'_{21}, D'_{22}, D''_{21}, D''_{22} durchzuführen, und ich möchte sogleich hervorheben, dass die Lösung dieser Fragen eine sehr einfache Form erhält, wenn man die Begriffe Linien-Complex, Linien-Congruenz, Kugel-Complex und Kugel-Congruenz anwendet.*)

§ 19.

Partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar von Charakteristiken enthalten, und zwar solche, welche Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind.

56. Zunächst bestimme ich die allgemeine Form aller partiellen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar von Charakteristiken enthalten, welche zugleich die Haupttangenten-Curven des einen Systems der betreffenden Fläche sind. Bezeichnet

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0$$

die allgemeine partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, und ferner, wie gewöhnlich, R, S, T die partiellen Derivirten von F hinsichtlich r, s und t, so ist bekanntlich

$$R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

die Differential-Gleichung der beiden Charakteristiken. Andererseits bestimmt

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

die Richtungen der beiden Haupttangenten, und also drückt

$$Rr + Ss + Tt = 0 \tag{1}$$

die Forderung aus, dass die beiden Charakteristiken überall hinsichtlich der entsprechenden Haupttangenten harmonische Lage haben sollen. Es sagt ferner

$$4\,RT - S^2 = 0, \tag{2}$$

aus, dass die beiden Charakteristiken immer zusammenfallen. Gelten also sowohl (1) als (2), so fallen die beiden Richtungen der Charakteristiken überall mit der einen Haupttangente zusammen, und das war unsere ursprüngliche Forderung.

*) Es ist einleuchtend, dass Gleichungen zweiter Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, durch meine Abbildung mit denen äquivalent sind, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangenten-Curven sind u. s. w.

Die Gleichung (1) zeigt, dass F die Form:

$$F\left(x\,y\,z\,p\,q\,\frac{r}{s}\,\frac{t}{s}\right)=0$$

besitzt, und bezeichnen wir hier der Kürze wegen $\frac{r}{s}$ und $\frac{t}{s}$ durch ϱ und τ, so geht (2) in die folgende über:

$$(3)\qquad 4\frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial F}{\partial \tau}=\left(\varrho\frac{\partial F}{\partial \varrho}+\tau\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2$$

eine Gleichung, die sich nach den allgemeinen Methoden integriren lässt. Man findet so als allgemeine Form der Gleichungen D'_{21}

$$r+2Ns+N^2t=0\ ^{*}),$$

und hierbei genügt die Richtung der Charakteristik der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}=N(x\,y\,z\,p\,q).$$

*Aus dem Vorstehenden folgt, dass eine jede D'_{21} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: die allgemeine Fläche zu finden, deren Haupttangenten des einen Systems nach einem gegebenen Gesetz durch die Lage des entsprechenden Flächen-Elements $(x\,y\,z\,p\,q)$ bestimmt werden***).

57. Es ist bekannt, dass wenn eine Differential-Gleichung:

$$(1)\qquad ar+bs+ct+d=0$$

ein allgemeines erstes Integral:

$$(2)\qquad u-f(v)=0$$

besitzt, auf einer Fläche, welche (2) und also auch (1) genügt, die Charakteristiken hinsichtlich (2) zugleich Charakteristiken des einen Systems hinsichtlich (1) sind. Es folgt hieraus (§ 14.), dass *wenn eine D'_{21} ein erstes Integral $u=0$ zugiebt, dasselbe eine D_{11} sein muss*, und hierbei muss man erinnern, dass es zwei distincte Classen D_{11} giebt.

---

*) Das singuläre Integral der Gleichung (3) giebt die bekannte Differential-Gleichung:

$$rt-s^2=0$$

Dieselbe besitzt bekanntlich ein allgemeines erstes Integral.

**) Schon früher habe ich gesagt, dass es vortheilhaft sein wird, die erweiterten geometrischen Begriffe der modernen Geometrie bei der Behandlung partieller Differential-Gleichungen anzuwenden. Als weiteres Beispiel deute ich im Folgenden eine Theorie an, die ich eben (während der Correktur) finde, und welche mir wichtig scheint. Zunächst bemerke ich, dass eine jede Gleichung

$$(\mathrm{I})\qquad rt-s^2+Ar+Bs+Ct+D=0$$

bei passender Wahl des Raumelements zu der linearen Form $r+As+Bt+C=0$ gebracht werden kann. Besitzt nun die Gleichung nur *eine* Schaar Charakteristiken, so ist dieselbe der analytische Ausdruck eines Problems, welches sich ganz in derselben Weise auf vierfach unendlich viele Raumcurven bezieht, wie die Gleichung $r+2Ns+N^2=0$ auf alle Raumgerade. Hieraus folgt, wenn ich nicht irre, dass *jede* Gleichung (I) mit intermediärem Integrale und *einer* Schaar Charakteristiken sich in dem von Boole angegebenen Sinne auf einem Flächen-Complexe bezieht.

Wir wissen, dass eine D'_{21} oder die äquivalente Gleichung $\frac{dy}{dx} = N$ jedem Flächen-Element eine Richtung zuordnet. Betrachten wir nun die Elemente einer Ebene, so bildet die continuirliche Aufeinanderfolge dieser Richtungen eine Curven-Schaar c, die in diesem Paragraphen eine wichtige Rolle spielen wird.

Man denke sich, dass unserer D'_{21} als particuläres Integral eine D_{11} entspricht, und zwar eine, deren Charakteristiken die Geraden einer *Congruenz* sind. In jeder Ebene E des Raumes liegt eine oder einige Gerade l dieser Congruenz, und offenbar müssen dieselben in der dieser Ebene zugehörigen Curven-Schaar c enthalten sein. Unter den Integralflächen unserer D_{11} giebt es nämlich unbegrenzt viele, die l enthalten und dabei die Ebene E in einem beliebig gegebenen Punkte p dieser Geraden berühren. Auf allen diesen Flächen ist nun l eine gemeinsame Haupttangente, und also ist die Richtung, welche unsere D'_{21} dem Flächen-Elemente (pE) zugeordnet, mit dem betreffenden Linien-Elemente von l identisch; hiermit ist meine Behauptung erwiesen.

Man setze andererseits voraus, dass unsere D'_{21} als particuläres Integral eine D_{11}, welche einem Linien-*Complex* entspricht, zugiebt. In einer beliebigen Ebene liegen einfach unendlich viele Complex-Linien, welche eine Curve k umhüllen. Es ist einleuchtend, dass k eine von den Curven c dieser Ebene sein muss.

Einfach unendlich viele Linien-Complexe bestimmen in jeder Ebene des Raumes eine Schaar Complex-Curven k. Man wähle, was immer möglich ist, die Function N in solcher Weise, dass diese Curven k eben die zugeordneten Curven c sind. Alsdann erhält man eine D'_{21}, die ein erstes Integral mit arbiträren Constanten besitzt. Es ist andererseits leicht zu erkennen, dass eine D'_{21} höchstens einfach unendlich viele erste Integrale dieser Art besitzen kann. Man betrachte nämlich in einer beliebigen Ebene unter den einfach unendlich vielen Curven c eine bestimmte, ferner eine Tangente g derselben und endlich eine zweite Ebene E', welche ebenso die Gerade g enthält. In E' liegen einfach unendlich viele Curven c', und unter denselben wähle man eine, welche g berührt. In dieser Weise kann man nun unbegrenzt weiter gehen, und wir finden somit, dass eine gewählte Curve c zur Construction des betreffenden Linien-Complexes *hinreicht*, vorausgesetzt natürlicherweise, dass diese Construction möglich ist. Meine Behauptung ist also erwiesen: *Soll eine Gleichung von der Form*

$$r + 2Ns + N^2 t = 0$$

ein erstes Integral besitzen, welches keine lineare partielle Differential-Gleichung ist, sich also nicht auf eine Liniencongruenz begiebt, so kann dasselbe zwar eine arbiträre Constante, dagegen keine arbiträre Function

enthalten. Es ergiebt sich dieses Integral durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variablen.

58. Wenn die Curven c krumme Linien sind, so können nur erste Integrale der eben besprochenen Art auftreten. Sind dagegen alle c gerade Linien, so existirt zuweilen ein allgemeines erstes Integral. Dies ist der Fall, wenn die allen Ebenen zugeordneten Geraden-Schaaren einen Complex, und nicht den Inbegriff aller Geraden des Raumes, bilden. Alsdann ist jede in dem betreffenden Complexe enthaltene Linienfläche eine Integralfläche, und demzufolge entspricht jeder, diesem Complexe zugehörigen Congruenz eine D_{11}, die ein erstes Integral darstellt*).

Soll die Gleichung $r + 2Ns + N^2t = 0$ ein allgemeines erstes Integral besitzen, so muss die gewöhnliche Differential-Gleichung zwischen x und y:

$$\frac{dy}{dx} = N(x,\, y,\, px + qy + k,\, p,\, q)$$

sich in der Form:

$$y = \pi x + f(\pi)$$

integriren lassen, und ausserdem muss zwischen den vier Linien-Coordinaten der Geraden:

$$y = \pi x + f(\pi)\,; \quad z = px + qy + k$$

eine Relation stattfinden. Der hierdurch definirte Linien-Complex bestimmt nach dem Obenstehenden sowohl ein allgemeines erstes Integral, wie das allgemeine zweite Integral mit zwei arbiträren Functionen. In diesem Falle existirt nach § 3., 10. *zugleich ein singuläres erstes Integral, die unserem Linien-Complexe zugehörige D_{11}.*

Wenn endlich die Differential-Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x,\, y,\, px + qy + k,\, p,\, q)$$

eine Zahl particulärer Lösungen von der Form $(y = \alpha x + \beta)$ zugiebt, und ferner zwei Relationen stattfinden zwischen den Linien-Coordinaten der Geraden:

---

*) Man sagt gewöhnlich, glaube ich, dass wenn die Integralflächen einer Gleichung:

$$(1) \qquad A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

nur eine Schaar Charakteristiken enthalten, höchstens *ein* allgemeines erstes Integral existirt. Dieses ist nicht correct. Beispielsweise *besitzt die einem Linien-Complexe zugehörige D'_{21} unbegrenzt viele allgemeine erste Integrale, die wesentlich verschieden sind.* Dasselbe gilt einer jeden Gleichung $r + 2Ns + N^2t + U = 0$, die einem Curven-Complexe entspricht (§ 3., 8. 9.), wie auch jeder Gleichung (1), die in dem von Boole angegebenen Sinne (Crelle-Borchardt's Journal. 61.) einem Flächen-Complexe entspricht.

$$y = \alpha x + \beta,\ z = px + qy + k,$$

so besitzt die gegebene D'_{21} als particuläres Integral die der hervorgehenden Linien-Congruenz zugehörige D_{11}.

59. Alles, was wir über Gleichungen D'_{21} gefunden haben, überträgt sich nun unmittelbar auf Differential-Gleichungen D'_{22}. Wir beschränken uns auf das Folgende:

Eine jede Differential-Gleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar Charakteristiken enthalten und zwar solche, welche Krümmungslinien sind, lässt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeine Fläche zu finden, deren Haupt-Krümmungs-Radius des einen Systems von der Lage des Flächen-Elements nach einem gegebenen Gesetze abhängt).*

Wir schliessen hieraus, dass die Gleichung der *Haupt-Krümmungs-Radien:*

$$(rt-s^2)R^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.R+(1+p^2+q^2)^2=0,$$

vorausgesetzt, dass man in derselben R als eine beliebig gegebene Function von $(x\ y\ z\ p\ q)$ auffasst, eben die allgemeine Form einer D'_{22} ist.

Wenn eine D'_{22} dreifach unendlich viele Kugeln als particuläre Integrale besitzt, dann und nur dann existirt ein allgemeines erstes Integral. Dasselbe entspricht den in dem besprochenen Kugel-Complexe enthaltenen Kugel-Congruenzen. Die dem Complexe zugehörige D_{12} ist ein singuläres erstes Integral.

Endlich möchte ich ausdrücklich aussprechen — was freilich in dem Obenstehenden implicite liegt —, dass jeder Linien- oder Kugel-Complex eine D'_{21} oder D'_{22} bestimmt, welche ein allgemeines erstes Integral besitzt.

§ 20.

Ueber partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen zwei Schaaren von Charakteristiken und zwar eben die Krümmungslinien enthalten.

60. Bei der Behandlung partieller Differential-Gleichungen zweiter Ordnung lege ich im Folgenden eine einfache geometrische Auffassung der allgemeinen ersten Integrale $u - f(v) = 0$ zu Grunde. Vielleicht wird es nicht unnöthig sein, einige Worte hierüber zu sagen.

---

*) Die Monge'sche Differential-Gleichung zur Bestimmung aller Flächen, auf denen nur eine Schaar Krümmungslinien liegen, ist eine ausgezeichnete D'_{22}. Dieselbe entspricht der in der letzten Nummer gefundenen ausgezeichneten $D'_{21}\ (rt-s^2=0)$. Wir wissen ja, dass Developpablen des Linien-Raumes sich im Kugel-Raume R als Regelflächen, die den imaginären Kreis enthalten, abbilden.

Man fasse $u = 0$ und $v = 0$ als die Gleichungen zweier Flächen auf und betrachte dabei die beiden Flächen-Schaaren

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.},$$

wie auch die zweifach unendlich vielen Durchschnitts-Curven je zweier Flächen, die verschiedenen Schaaren gehören. Einfach unendlich viele solcher Curven erzeugen bekanntlich immer eine Fläche, deren Gleichung die Form $u - f(v) = 0$ besitzt und andererseits entspricht jeder Fläche mit dieser Gleichungsform eine solche Erzeugung.

Bezeichnen nun u und v Functionen von $x\,y\,z\,p\,q$, so gestattet die Gleichung $u - f(v) = 0$ eine ähnliche Interpretation. Hierbei betrachte ich eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung als die analytische Definition von vierfach unendlich vielen Flächen-Elementen, unter denen diejenigen, die durch einen Punkt gehen, den entsprechenden elementaren Complex-Kegel umhüllen. Zwei solche Gleichungen bestimmen dreifach unendlich viele Flächen-Elemente, diejenigen nämlich, die beiden Gleichungen genügen. Dieses vorausgesetzt betrachte man die beiden Schaaren von Differential-Gleichungen:

$$u = u_n, \quad v = v_n$$

und ordne dieselben auf alle mögliche Weisen in Paar $(u_n\, v_n)$ zusammen. Jedes Paar $(u_n\, v_n)$ — und es giebt zweifach unendlich viele solche — bestimmt dreifach unendlich viele Flächen-Elemente. Wählt man nun nach einem arbiträren Gesetze einfach unendlich viele Paare $(u_n\, v_n)$, so bestimmt der Inbegriff der zugehörigen Flächen-Elemente eine partielle Differential-Gleichung, die sich in der Form $u - f(v) = 0$ schreiben lässt.

Hierbei sind zwei Fälle möglich. Entweder, und das ist der allgemeine Fall, durchziehen die gemeinsamen Elemente der beiden Gleichungen $u = u_n$, $v = v_n$ den ganzen Raum, und alsdann ordnet das Paar $(u_n\, v_n)$ jedem Punkte des Raumes ein oder einige Elemente zu; oder dieselben haben zweifach unendlich viele elementare Complex-Kegel gemein, und dann definiren die gemeinsamen Elemente in gewissem Sinne eine Fläche, den Ort nämlich aller Spitzen der besprochenen Kegel.

61. Bei Herrn Du Bois-Reymond*) finde ich angegeben, dass die allgemeinste partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, deren beide, und zwar distincte, Schaaren von Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind, die folgende ist:

$$(1) \qquad r - \left(\frac{1+p^2}{pq}\right) s + F\left(\frac{1+q^2}{pq} s - t\right) = 0$$

*) Partielle Differentialgleichungen, pg. 130.

Man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichung sich auch folgenderweise schreiben lässt:

$$(2)\quad [pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)s-pqr]=0,$$

vorausgesetzt, dass f wie F eine willkürliche Function von $(x\,y\,z\,p\,q)$ bezeichnet. Wenn man aber in (2) statt f $\frac{dx}{dy}$ setzt, so erhält man eben die Differential-Gleichung der Krümmungslinien einer Fläche, und also können wir sagen:

Eine jede D''_{22} lässt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeinste Fläche zu finden, deren Krümmungs-Richtungen nach irgend einem gegebenen Gesetz durch die Lage des entsprechenden Flächen-Elements bestimmt sind.

Man bemerke wohl, dass eine jede D''_{22} in der eben angegebenen Bedeutung jedem Flächen-Elemente zwei orthogonale Richtungen zuordnet. Betrachtet man nun alle Elemente einer Fläche, so bildet die continuirliche Aufeinanderfolge der zugeordneten Richtungen zwei orthogonale Curven-Schaaren, die ich mit den Symbolen s und σ bezeichnen werde. Eine Integralfläche unserer D''_{22} lässt sich dadurch charakterisiren, dass die zugeordneten Curven s und σ eben Krümmungslinien der Fläche sind. Im Folgenden *werden die einer beliebigen Kugel zugehörigen Curven s und σ eine wichtige Rolle spielen.*

62. Aus der Form der Differential-Gleichungen D''_{22} (§ 19., 57.) folgt, dass *wenn eine solche Gleichung ein particuläres erstes Integral besitzt, dasselbe eine D_{12} sein muss,* und hierbei ist zu erinnern, dass es zwei distincte Classen D_{12} giebt.

Setzen wir zunächst voraus, dass unser erstes Integral D_{12} einer *Kugel-Congruenz* entspricht. Eine jede Kugel dieser Congruenz wird von den unendlich nahen Kugeln derselben Congruenz nach einfach unendlich vielen Kreisen geschnitten, und offenbar bilden diese Schnittlinien in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonal-Curven das unserer Kugel durch die gegebene D''_{22} zugeordnete Orthogonal-System $(s,\ \sigma)$.

Es ist leicht zu erkennen, dass es D''_{22} giebt, welche einfach unendlich viele particuläre Integrale von dieser Art besitzen. Man denke sich nämlich einfach unendlich viele Kugel-Congruenzen und auf jeder Kugel einer solchen Congruenz die besprochenen Kreise mit den zugehörigen Orthogonal-Curven. Es werden in dieser Weise jedem Flächen-Elemente des Raumes zwei orthogonale Richtungen zugeordnet, und es ist klar, dass die D''_{22}, welche eben diese Zuordnung bestimmt, durch die gegebenen einfach unendlich vielen D_{12} befriedigt wird.

Wir setzen nun die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals dieser Art:

$$u-f(v)=0$$

voraus, wobei wir der Bequemlichkeit wegen *Linien*-Vorstellungen anwenden werden. Es bezeichnet alsdann jede der Gleichungen:

$$u = \text{Const.}, \; v = \text{Const.}$$

einfach unendlich viele lineare Differential-Gleichungen D_{11}, deren zugehörige Linien-Congruenzen jedesmal einen Complex bilden; und zwar werden wir erstens den Fall erledigen, dass die beiden Congruenz-Schaaren *demselben* Complexe gehören.

Ein in dem allgemeinen Integrale enthaltenes particuläres Integral

$$u - f_0(v) = 0$$

ordnet jedem Werthe von u einen entsprechenden Werth von v zu: $(u_0 v_0)(u_1 v_1) \ldots (u_n v_n)$. Nun repräsentirt sowohl $u = u_n$ als $v = v_n$ eine dem Complexe angehörige Congruenz*), und also stellt die Gruppe $(u_n v_n)$ eine in dem Complexe enthaltene Linienfläche dar; demzufolge ist auch $u - f_0(v) = 0$ eine lineare D_{11}, deren zugehörige Linien-Congruenz unserem Complexe gehört. Die Integralflächen der Differential-Gleichungen $u - f(v) = 0$ sind somit Linienflächen des Complexes. Es ist aber nach § 19., 58. die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, welche diese Flächen befriedigen, eine D'_{21} und nicht eine D''_{21}.

Seien zweitens die Complexe, in denen die zu u=Const., v=Const. gehörigen Liniencongruenzen liegen, verschieden. Es enthalten alsdann im Allgemeinen zwei Congruenzen u_p und v_q nur eine endliche Zahl gemeinsame Gerade, und also durchziehen die gemeinsamen Elemente der Differential-Gleichungen u_p und v_q den ganzen Raum. Wir können somit sagen, dass die Gruppe $(u_p v_q)$ *jedem* Punkte ein Flächen-Element zuordnet. Man erhält zweifach unendlich viele solcher Zuordnungen, und wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, so werden jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zugeordnet. Es soll die hierdurch definirte partielle Differential-Gleichung erster Ordnung eine lineare D_{11} sein. Da nun der Inbegriff dieser D_{11} ein *allgemeines* erstes Integral bilden soll, so muss jede Zuordnung unbegrenzt vielen D_{11} gehören können, und demzufolge muss dieselbe durch einen *linearen* Complex vermittelt sein; dieser Linien-Complex ist nämlich der einzige, der die Eigenschaft besitzt, dass die durch einen Punkt gehenden Geraden einen ebenen Büschel bilden**). Den zweifach un-

*) Jede partielle Differential-Gleichung erster Ordnung bestimmt vierfach unendlich viele Flächen-Elemente. Einer linearen D_{11} entsprechen insbesondere Elemente, die sich in zweifach unendlich viele Gruppen vertheilen; die Elemente jeder Gruppe schliessen sich an eine Gerade der zugehörigen Linien-Congruenz an.

**) Herrn Klein verdanke ich die Bemerkung, dass es *specielle* Linien-Complexe giebt, deren Complex-Kegel ebene Strahlbüschel sind. So ist es z. B. der Fall bei den Complexen, die aus dem Inbegriffe aller Tangenten einer developpablen

endlich vielen Zuordnungen entsprechen somit zweifach unendlich viele lineare Complexe, und zur Existenz eines allgemeinen ersten Integrals ist nothwendig, dass jedesmal einfach unendlich viele dieser Complexe, die beliebig gewählt sind, eine Congruenz gemein haben, dass ferner diese Congruenz mit der Complex-Schaar variirt. Dieses ist aber absurd.

Eine D''_{21} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral lineare Differential-Gleichungen D_{11}.

Eine D''_{22} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral Differential-Gleichungen D_{12}, welche Kugel-Congruenzen entsprechen.

63. Setzen wir nun voraus, das eine gegebene D''_{22} als particuläres erstes Integral eine D_{12} zugiebt, die einem Kugel-*Complexe* entspricht, und betrachten wir eine Kugel dieses Complexes. Es ist nach § 18., 53. klar, dass *der entsprechende Trajectorien-Kreis sich unter den dieser Kugel durch die gegebene D''_{22} zugeordneten Curven* (s, σ) *befindet.* Existiren einfach unendlich viele Integrale dieser Art, so muss, weil einfach unendlich viele Kugel-Complexe alle Kugeln des Raumes umfassen, das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) einen, oder einige Kreise enthalten.

Soll endlich ein allgemeines erstes Integral dieser Art existiren, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Unter den einer Kugel zugeordneten Curven (s, σ) befinden sich entweder nur eine endliche Zahl oder auch unendlich viele Kreise. Ich werde beweisen, das der erste Fall unmöglich ist.

Setzen wir denselben voraus. Bezeichnet alsdann $H = F(X\,Y\,Z)$ einen Kugel-Complex, dessen zugehörige D_{12} ein erstes Integral ist, so liegt der Trajectorien-Kreis einer Kugel dieses Complexes in der Ebene (§ 18., 53.):

$$-H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0).$$

Andererseits lässt die Gleichung dieser Ebene sich auch folgendermassen schreiben:

$$-H_0 = F_1(X - X_0) + F_2(Y - Y_0) + F_3(Z - Z_0),$$

und hierbei bezeichnen F_1, F_2, F_3 Functionen von X_0, Y_0, Z_0, H_0, die nach dem Obenstehenden durch die gegebene D''_{22} bestimmt sind. Es gelten also die Gleichungen:

$$\frac{\partial H_0}{\partial X_0} = F_1, \quad \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} = F_2, \quad \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} = F_3,$$

Fläche bestehen. Man erkennt leicht, dass es ausser diesen und den linearen Complexen keine Complexe giebt, welche die geforderte Eigenschaft besitzen. Dass die Bemerkung von Herrn Klein die Resultate des Textes nicht beeinflusst, liegt darin, dass man keine zweifach unendliche Flächenschaar finden kann, welche die Eigenschaft besitzt, dass jedesmal ∞^1 Flächen der Schaar ∞^2 gemeinsame Tangenten haben.

die — vorausgesetzt, dass sie nicht contradictorisch sind, — ein Integral mit arbiträrer *Constante* gestatten.

Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral gestatten soll, so muss das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) *aus einer Schaar von Kreisen und den zugehörigen Orthogonal-Curven bestehen.*

Soll eine D''_{22} zwei) allgemeine erste Integrale besitzen, so muss das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System* (s, σ) *aus zwei Kreis-Schaaren bestehen. Es gehen alsdann, nach einer Bemerkung des Herrn Bonnet, die Kreise jeder Schaar durch zwei feste Punkte.*

Es ist in einem gegebenen Falle leicht zu verificiren, ob diese Bedingungen erfüllt sind. Ich muss hier zufügen, dass ich die Frage, ob die vorstehenden nothwendigen Forderungen auch *hinreichend* sind, nicht entschieden habe. Da es mir aber, wie ich später zeigen werde, gelungen ist die allgemeinste D''_{22} anzugeben, welche ein, bezüglich zwei, allgemeine erste Integrale besitzt, so scheint mir diese Frage von untergeordneter Bedeutung.

§ 21.

Ueber einige Gleichungen D''_{21} und D''_{22}.

64. Um nicht im Folgenden die Darstellung abbrechen zu müssen, schicke ich in dieser Nummer einige Entwickelungen voraus, auf welche ich mich später mehrmals stützen werde. Es ist überhaupt der Zweck dieses Paragraphen, einerseits einige bekannte Theorien in Verbindung mit meinen Complex-Theorien zu bringen, andererseits das Verständniss der wichtigen Ergebnisse des nächsten Paragraphen vorzubereiten.

Die Gleichung:

$$F(X\ Y\ Z\ H\ \lambda) = 0$$

definirt, wenn λ ein Parameter ist, X, Y, Z, H Linien- oder Kugel-Coordinaten bezeichnen, einfach unendlich viele Complexe, die *linear* sein sollen. Denselben entspricht in gewöhnlicher Bedeutung des Wortes

---

*) Man sagt oft, dass wenn eine Gleichung:

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

ein allgemeines erstes Integral $u - f(v) = 0$ besitzt, noch ein solches Integral existirt. Und doch ist es wohl bekannt, dass wenn die Gleichung:

$$Rdy^2 - Sdy\,dx + Tdx^2 = 0$$

in zwei lineare Gleichungen zerfällt, jene Behauptung im Allgemeinen falsch ist, dass ferner in dem allgemeinen Falle die sogenannten *beiden* Integrale ein *irreductibles* Integral bilden.

ein Enveloppe-Complex A, dessen Gleichung man findet, wenn man zwischen $F = 0$ und $\frac{dF}{d\lambda} = 0$ die Grösse λ eliminirt.

Um eine geometrische Vorstellung von der dem Complexe A zugehörigen D_{11} oder D_{12} zu erhalten, kann man die folgenden Betrachtungen machen. Ein Linien-Complex ordnet im Allgemeinen jedem Punkte des Raumes einfach unendlich viele Flächen-Elemente zu, die den betreffenden Complex-Kegel umhüllen. Eine Ausnahme macht nur der lineare Complex, dessen Gerade bekanntlich dreifach unendlich viele ebene Büschel bilden. Dagegen ordnet der Inbegriff von einfach unendlich vielen linearen Complexen jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar umhüllen dieselben, wie eine einfache Ueberlegung zeigen wird, jedesmal den Complex-Kegel des Enveloppe-Complexes. Zwei consecutive lineare Complexe schneiden sich nämlich nach einer linearen Congruenz, und demzufolge lässt der Enveloppe-Complex A sich auffassen als gebildet von einer Schaar Congruenzen, aus denen immer zwei consecutive demselben Complexe gehören. Betrachtet man nun insbesondere unter den Geraden von A solche, die durch einen Punkt gehen, so ist es klar, dass zwei unendlich nahe unter denselben jedesmal einem der gegebenen linearen Complexe angehören, und also ist meine Behauptung erwiesen.

Andererseits wissen wir, dass die vierfach unendlich vielen Flächen-Elemente einer D_{12} sich an die dreifach unendlich vielen Trajectorien-Kreise (§ 18., 54.) anschliessen. Nun schneiden die Kugeln eines linearen Complexes die zugehörige Fundamental-Kugel S (§ 10., 30.) unter constantem Winkel und zwar jedesmal nach den Trajectorien-Kreisen. Es giebt alsdann nur dreifach unendlich viele ausgezeichnete Flächen-Elemente, die sich in zweifach unendlich viele elementare Umdrehungs-Kegel von derselben Winkel-Oeffnung zusammenfassen lassen, und hierbei liegen die Kegel-Spitzen auf S, ferner sind die Kegel-Axen Radien dieser Kugel. *Betrachten wir nun einfach unendlich viele lineare Kugel-Complexe, so liegen also auf jeder der zugehörigen Fundamental-Kugeln die Spitzen von zweifach unendlich vielen Umdrehungs-Kegeln, und der Inbegriff aller dieser Kegel giebt die geometrische Definition von der dem Enveloppen-Complexe zugehörigen* D_{12}.

Es ist auch bemerkenswerth, dass eine jede solche D_{12} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: *alle Flächen zu finden, die eine Schaar Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden;* hierbei sind die Schnitt-Curven Krümmungslinien des einen Systems.

Die elementaren Kegel unserer D_{12} sind im Allgemeinen, wie gesagt, Umdrehungs-Kegel, und also besitzen diese Gleichungen die folgende Form:

$$F_1\sqrt{1 + p^2 + q^2} + F_2 p + F_3 q + F_4 = 0;$$

hier bezeichnen alle F Functionen von x, y, z, die indessen gewisse Relationen befriedigen müssen. Wir werden später beweisen (§ 22., 69.), dass wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral besitzt, die betreffenden Differential-Gleichungen erster Ordnung zu der hier besprochenen Kategorie gehören.

Wir setzen nun voraus, dass die gegebenen einfach unendlich vielen linearen Complexe C mit dem linearen Complexe $H = 0$ in Involution liegen. Jeder C wird alsdann bekanntlich von den Orthogonal-Kugeln einer gegebenen Kugel gebildet, und also degeneriren alle elementaren Umdrehungs-Kegel in Ebenen-Büschel. Die dem Enveloppe-Complexe zugehörige D_{12} ist somit eine *lineare* partielle Differential-Gleichung, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken die gegebenen Fundamental-Kugeln orthogonal schneiden. Eine solche Gleichung entspricht dem von Herrn Bonnet gelösten Probleme: alle Flächen zu finden, welche einfach unendlich viele gegebene Kugeln orthogonal schneiden*).

65. *Wir fordern, dass in der Gleichung einer D''_{22}:*

(1) $[pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)s-pqr]=0$

f nur die Variabeln x und y enthält, und suchen dabei die allgemeinste Form dieser Grösse, für welche unsere D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale zugiebt.

Die Differential-Gleichung der Charakteristiken des einen Systems:

$$\frac{dy}{dx} = f(x\,y)$$

besitzt ein Integral mit arbiträren Constanten $\varphi\,(x\;y) =$ Const., welches eine Schaar von Cylindern darstellt, und nach § 20., 61. ist es

*) Schliesst man diejenigen linearen partiellen Differential-Gleichungen aus, deren Charakteristiken Gerade von der Länge Null sind, so kann man behaupten, dass die im Texte besprochenen Gleichungen die einzigen linearen D_{12} sind. Betrachten wir nämlich zweifach unendlich viele Curven c, die nach einem arbiträren Gesetze zu Flächen zusammengefasst, immer Krümmungslinien derselben sind, und ferner das simultane System:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

dessen Integrale eben die Curven c bestimmen. Es lässt sich beweisen, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ der Integrabilitäts-Bedingung genügt, dass also die Curven c eine Flächen-Schaar S orthogonal schneiden. Nun bilden einfach unendlich viele c immer eine Fläche, die eine jede S orthogonal schneidet und zwar nach einer gemeinsamen Krümmungslinie dieser Flächen. Hieraus folgt, dass eine jede auf S gelegene Curve eine Krümmungslinie derselben ist, dass also alle S Kugeln sind. Den linearen D_{12} entspricht eine ausgezeichnete Classe D_{11}. Jede solche Gleichung besitzt ∞^3 *geradlinige* Integralflächen, unter denen ∞^2 einem linearen Complexe gehören.

klar, dass die Gleichung (1) alle Flächen bestimmt, deren Krümmungslinien des einen Systems auf diesen Cylindern liegen.

Das einer beliebigen Kugel (§ 20., 61.) zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) wird nun offenbar von den Durchschnitts-Curven mit den Cylindern $\varphi =$ Const. in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonal-Curven gebildet. Es soll aber nach § 20., 63. das System (s, σ) aus zwei Kreis-Schaaren bestehen. Unsere Cylinder müssen also eine jede Kugel und also zugleich eine jede Ebene nach Kreisen schneiden, und demzufolge sind sie selbst Ebenen. Ferner sollen die Kreise der beiden Schaaren s und σ jedesmal durch zwei feste Punkte gehen, und also enthalten die Ebenen $\varphi =$ Const. eine gemeinsame Axe. *Wir werden somit auf das von Joachimsthal gelöste Problem geführt: alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem Ebenen-Büschel liegen.*

Joachimsthal hat gezeigt, dass in diesem Falle zwei allgemeine erste Integrale existiren, und wir werden finden, dass dieselben zu der in der letzten Nummer besprochenen Kategorie gehören. Man ordne jeder Ebene des Büschels $\varphi =$ Const. nach einem *beliebigen* Gesetze einen Winkel zu und betrachte alle linearen Kugel-Complexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter dem betreffenden Winkel schneiden. Dem Enveloppe-Complexe entspricht eine D_{12}, die nach § 21., 64. ein erstes Integral ist. Man betrachte andererseits einfach unendlich viele Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Axe des Ebenen-Büschels liegen. Es ist geometrisch evident, dass die Curven, welche diese Kugeln orthogonal schneiden, in den Ebenen φ liegen, und also ist die *lineare* D_{12}, deren Charakteristiken (§ 21., 64. Schluss) diese Curven sind, ein erstes Integral.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes der beiden allgemeinen ersten Integrale in einer gewissen Beziehung zu zweifach unendlich vielen linearen Complexen steht. Wenn $L_1 + \lambda L_2 = 0$ alle Ebenen des Büschels φ darstellt, so definirt die Gleichung:

$$L_1 + \lambda L_2 + \mu H = 0,$$

in welcher λ und μ Parameter bezeichnen, die zweifach unendlich vielen Complexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter constantem Winkel schneiden, deren Punkt-Kugeln also in dieser Ebene liegen. Alle diese Complexe bilden eine dreigliedrige Gruppe*), und enthalten also einfach unendlich viele *gemeinsame Kugeln, die Punkt-Kugeln nämlich der Axe* des Ebenen-Büschels:

$$L_1 = 0, \; L_2 = 0, \; H = 0.$$

*) Plücker neue Geometrie (1868—69) pg. 112 und fg.

Andererseits giebt es zweifach unendlich viele Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Axe ($L_1 = 0$, $L_2 = 0$) liegen. Die zugehörigen Orthogonal-Kugeln bilden zweifach unendlich viele lineare Complexe, welche die *Ebenen φ als gemeinsame Kugeln* enthalten. Auch hier treffen wir somit eine dreigliedrige Gruppe.

Die Beziehung zwischen den beiden Gruppen wird vielleicht noch anschaulicher, wenn wir zum Linien-Raume r übergehen, und dabei erinnern, dass einer Geraden in R, aufgefasst einmal als Punktgebilde, andermal als Ebenengebilde, im Raume r die beiden Geraden-Schaaren eines Hyperboloids entsprechen. *Unsere beiden dreigliedrigen Gruppen linearer Complexe stehen also in der Beziehung, dass die gemeinsamen Geraden der einen Gruppe eine Fläche zweiten Grades bilden, deren Erzeugende des zweiten Systems allen Complexen der anderen Gruppe angehören. Solche Gruppen werde ich als conjugirte bezeichnen**).

Die Joachimsthal'sche Theorie giebt somit die folgenden für die Geometrie der Complexe bemerkenswerthen Resultate:

Es seien zwei conjugirte dreigliedrige Gruppen linearer Complexe gegeben. Man wähle in jeder Gruppe einfach unendlich viele, und suche die beiden zugehörigen Enveloppe-Complexe; denselben entsprechen zwei partielle Differential-Gleichungen D_{11} (oder D_{12}), welche immer einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen. Alle D_{11} der einen Gruppe bilden das allgemeine erste Integral einer D''_{22}, welches noch ein allgemeines erstes Integral zugiebt, und zwar steht dieses in derselben Beziehung zu der zweiten Gruppe.

Wählt man in der einen Gruppe die Complexe eines Büschels, so degenerirt der Enveloppe-Complex in eine lineare Congruenz**). Die zugehörige lineare D_{11} ist natürlicherweise ein particuläres erstes Integral, und offenbar finden sich zweifach unendlich viele solche in jedem allgemeinen Integrale. Der obenstehende Satz über gemeinsame

---

*) Seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_6 = 0$ Herrn Kleins sechs Fundamental-Complexe (Math. Annalen, Bd. II, pg. 198). Die beiden Gruppen: $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$, $x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$ stehen in der hier besprochenen Beziehung. Ein Complex der ersten Gruppe liegt nach Herrn Kleins Ausdrucke immer in Involution mit einem jeden Complexe der zweiten Gruppe.

**) Die Gruppe $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ enthält zweifach unendlich viele solcher linearen Congruenzen K, deren Directricen auf der zugehörigen Fläche zweiten Grades liegen. Ebenso bestimmt $x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$ zweifach unendlich viele lineare Congruenzen K', deren Directricen der zweiten Erzeugung der besprochenen Fläche gehören. Zwei Congruenzen K und K' stehen somit immer in der Beziehung, dass die beiden Directricen-Paare ein räumliches Vierseit bilden. *Zwei solche Congruenzen liegen, werde ich sagen, in Involution.* Dieser Ausdruck entspricht der von Herrn Klein eingeführten Terminologie.

Integrale zeigt insbesondere, dass wenn man eine *lineare* D_{11} aus jedem allgemeinen Integrale nimmt, dieselben einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen, und dieses ist a priori geometrisch evident; unsere beiden linearen D_{11} entsprechen nämlich linearen Congruenzen, deren Directricen-Paar ein räumliches Vierseit bilden, und es giebt bekanntlich einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, die ein solches enthalten.

66. Der Fall, dass in der Gleichung einer D''_{22}:

$$[pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)-pqr]=0$$

f nur p und q enthält, dass also die Richtungen der Krümmungslinien jedesmal nur von der *Richtung* des Flächen-Elements abhängen, entspricht dem bekannten Probleme: *alle Flächen zu finden, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen.* Das Orthogonal-System (s, σ) einer beliebigen Kugel ist nun mit dem gegebenen sphärischen Bilde, auf diese Kugel übergeführt, identisch, und also geben unsere früheren Resultate (§ 20., 63.) den folgenden Satz:

Die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, die alle Flächen von einer gegebenen sphärischen Abbildung definirt, kann nur unter der Voraussetzung ein allgemeines erstes Integral gestatten, dass jene Abbildung aus einer Schaar Kreise und den zugehörigen Orthogonal-Curven besteht; zwei allgemeine erste Integrale können nur auftreten, wenn auch diese letzten Curven Kreise sind).*

Herr Bonnet hat gezeigt, dass in den angegebenen Fällen ein, bezüglich zwei, allgemeine erste Integrale existiren, und wir werden nun dieselben etwas näher untersuchen. Wir betrachten die Ebene eines Kreises, der dem gegebenen sphärischen Bilde angehört, und ferner alle Kugeln, welche diese Ebene unter demselben Winkel wie die Bild-Kugel schneiden. Auf den daraus hervorgehenden linearen Kugel-Complex wenden wir alle mögliche Translationen an und erhalten so einfach unendlich viele Complexe. Indem wir in derselben Weise mit allen Kreisen des sphärischen Bild's verfahren, bekommen wir *zweifach unendlich viele lineare Kugel-Complexe C*, und es ist einleuchtend, dass wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, dem Enveloppen-Complexe eine D_{12} entspricht, die ein erstes Integral ist.

Wir setzen nun insbesondere voraus, das die sphärische Abbildung aus zwei Kreisschaaren besteht, und betrachten die durch zwei

---

*) Es lässt sich sogar sehr leicht beweisen, dass auch particuläre Integrale nur in den angegebenen Fällen existiren. Herr Darboux hat gefunden, dass die besprochene Aufgabe sich auch in anderen Fällen als in dem von Herrn Bonnet gelösten erledigen lässt. Seine Methode kann nach dem Texte nicht darin bestehen, dass er allgemeine erste Integrale gesucht hat.

feste Punkte p_1 und p_2 gehenden Kreise der einen Schaar, die offenbar Trajectorien-Kreise sind für alle Complexe C, welche unsere Bild-Kugel Q enthalten. Diese Complexe haben ausser Q alle Punkt-Kugeln der Geraden p_1, p_2 gemein; sie enthalten also zugleich die hierdurch bestimmte lineare Congruenz und bilden ein Büschel, dessen Gleichung sei:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0.$$

Giebt man nun λ einen bestimmten Werth und versteht unter μ eine Constante, so ist:

$$L_1 + \lambda L_2 + \mu = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines Complexes, in den der gewählte durch eine Translation übergeführt wird. Wir finden somit, dass die Complexe C eine dreigliedrige, durch (1) dargestellte, Gruppe bilden. Wir werden beweisen, dass diese Gruppe eine particularisirte ist, und hierbei wird es vortheilhaft sein, Linien-Vorstellungen anzuwenden. Die Gleichungen $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ sind hinsichtlich X, Y, Z, H linear, und somit (§ 10., 30.) enthalten die entsprechenden Linien-Complexe als gemeinsame Gerade die Fundamental-Gerade des Raumes r. Ferner stellt Const. $= 0$ alle Geraden dar, welche die letztgenannte Linie schneiden, und wir finden so, dass die gemeinsamen Geraden aller Complexe (1) eine *zerfallende* Fläche zweiten Grades, das heisst zwei ebene Büschel bilden.

Die hier auftretenden Gebilde sind also ein Degenerationsfall von den in der vorangehenden Nummer untersuchten. *Die beiden conjugirten dreigliedrigen Gruppen werden nun durch zwei Punkte p_1, p_2 und zwei durch dieselben gehende Ebenen E_1, E_2 bestimmt.* Die Complexe der einen Gruppe enthalten sämmtlich die beiden Strahlen-Büschel $(p_1 E_1)$ $(p_2 E_2)$; ebenso enthalten die Complexe der zweiten Gruppe die Büschel $(p_1 E_2)$ $(p_2 E_1)$. Dies Resultat entspricht dem bekannten Satze:

Die Bonnet'sche Differential-Gleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung aller Flächen, deren sämmtliche Krümmungslinien eben sind, lässt sich als ein Degenerationsfall auffassen von der Joachimsthal'schen, welche alle Flächen giebt, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem gegebenen Ebenen-Büschel liegen.

67. Als letztes Beispiel betrachte ich die Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems einer gegebenen Relation von der Form:

$$\Pi(x\, y\, z\, dx\, dy\, dz) = 0$$

genügen. Zur Existenz von zwei allgemeinen ersten Integralen ist es, werde ich beweisen, nothwendig und hinreichend, dass Π hinsichtlich der Differentiale linear ist, dass ferner $\Pi = 0$ integrabel ist, dass

endlich die Integralflächen dieser totalen Differential-Gleichung eine Kugel-Schaar $S_1 + \lambda S_2 = 0$ sind.

Wir setzen die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals:

$$u - f(v) = 0$$

voraus und betrachten für eine particuläre Wahl der Function f den einem Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel, der ein Umdrehungs-Kegel sein muss*). Die constanten Krümmungs-Richtungen aller Flächen-Elemente, welche diesen Kegel umhüllen, sind die Berührungs-Richtung des Elements mit dem Kegel und die zugehörige Orthogonal-Richtung, und zwar ist es geometrisch evident, dass *diese letzten Richtungen einen ebenen Büschel bilden, dessen Axe zugleich die Mittellinie des Umdrehungs-Kegels ist.* Die Gleichung $\Pi = 0$ ist also hinsichtlich dx, dy, dz linear, und ferner ist klar, dass *alle elementaren Rotations-Kegel, die für eine verschiedene Wahl der arbiträren Function f einem gegebenen Punkte entsprechen, dieselbe Axe haben.*

Man betrachte nun zwei particuläre Integrale:

$$u - f_1(v) = 0, \quad u - f_2(v) = 0$$

und zwei Integralflächen derselben, I_1 und I_2, welche eine gemeinsame, $\Pi = 0$ genügende Curve c enthalten. Alsdann ist c eine Krümmungslinie auf den beiden Flächen, die sich in Folge dessen unter constantem Winkel schneiden. Für einen jeden Punkt der Curve c ist aber der besprochene Winkel gleich der Differenz zwischen den Winkel-Oeffnungen der beiden zugehörigen elementaren Umdrehungs-Kegel, und also hat *diese Differenz denselben Werth für alle Punkte unserer Curve.* Lässt nun $\Pi = 0$ sich *nicht* integriren, so kann man zwischen zwei beliebigen Punkten des Raumes eine Curve ziehen, welche $\Pi = 0$ genügt, und in diesem Falle existirt also höchstens ein Integral mit einer *arbiträren Constanten.*

Es bleibt zu untersuchen der Fall, dass $\Pi = 0$ ein Integral $S(x\,y\,z) =$ Const. besitzt. Das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) besteht nun aus den Durchschnitts-Curven mit allen Flächen S zusammen mit den zugehörigen Orthogonal-Curven. Es ist aber die Kugel die einzige Fläche, welche *jede* beliebige Kugel nach Kreisen schneidet, und also sind die Flächen S, wie oben behauptet, Kugeln. Sollen ferner immer sowohl die Curven s als σ Kreise sein, die jedesmal durch zwei feste Punkte gehen, so müssen die Kugeln S unendlich viele Punkte gemein haben, das heisst, sie bilden einen Büschel $S + \lambda S' = 0$. Wir werden also auf die Aufgabe geführt: *alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Sy-*

---

*) Der Beweis dieser Behauptung liegt in den Schluss-Bemerkungen des Paragraphen 18. Vergl. auch Nummer 63.

stems auf einem Büschel von Kugeln liegen, und bekanntlich führt eine Transformation durch reciproke Radien dieses Problem in das von Joachimsthal gelöste über.

Nach Herrn Bonnet bestimmt unsere Aufgabe alle nicht röhrenförmigen Flächen, deren sämmtliche Krümmungslinien sphärische Curven sind.

---

68. Endlich werde ich andeuten, wie die von den Herren Bonnet und Serret erledigte Aufgabe: alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu bestimmen, nach den Anschauungen der Kugel-Geometrie zu behandeln ist. Alles kommt, wie man leicht beweist (§ 24., 80.), darauf hinaus, in allgemeinster Weise zwei Schaaren linearer Complexe zu finden, die paarweise in Involution liegen. Herrn Klein's Theorie der sechs Fundamental-Complexe*):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \ldots . x_6 = 0$$

beantwortet unmittelbar diese Frage. Man betrachte nämlich entweder die beiden dreigliedrigen Gruppen:

$$x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0,\ x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$$

oder die beiden Gruppen:

$$x_1 + \alpha x_2 = 0,\ x_3 + \beta x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0,$$

und wähle jedesmal einfach unendlich viele Complexe aus jeder Gruppe. Die den beiden Enveloppe-Complexen zugehörigen D_{11} (oder D_{12}) besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen, die unsere Aufgabe in allgemeinster Weise befriedigen. Die hiermit angedeutete Methode giebt zugleich mit grösster Leichtigkeit die verschiedenen bei diesen Untersuchungen gefundenen Resultate. (Vergl. eine Note des Herrn Picart in den Comptes rendus. 1858.)

§ 22.

Bestimmung aller D''_{21} und D''_{22}, welche allgemeine erste Integrale besitzen.

69. Es hat sich gezeigt, dass wenn eine D''_{21} ein allgemeines erstes Integral:

$$u - f(v) = 0$$

zugiebt, dasselbe zuweilen durch zweifach unendlich viele lineare Complexe definirt werden kann, und ich behaupte, *dass dieses immer der Fall ist.* Der Beweis gründet sich darauf, dass ein jedes in dem

*) Man muss die verschiedenen Degenerationen des Systems der sechs Fundamental-Complexe berücksichtigen.

allgemeinen Integrale enthaltenes particuläres eine D_{11} (62., 63.) sein muss, und zwar eine, welche einem Linien-Complexe — ich nenne denselben in der folgenden Entwickelung einen *Integral-Complex* — entspricht.

Eine jede der Gleichungen:

$$u = \text{Const.}, \ v = \text{Const.}$$

bestimmt einfach unendlich viele solche Integral-Complexe, welche wir auf alle möglichen Weisen in Paare $(u_p \, v_q)$ zusammenfassen und dabei bemerken, dass eine beliebige Gruppe $(u_p \, v_q)$ jedem Punkte*) des Raumes ein oder einige Flächen-Elemente zuordnet — gemeinsamen Tangenten-Ebenen von Complex-Kegeln, welche dieselbe Spitze haben, entsprechend. Wählt man unter den zweifach unendlich vielen Gruppen $(u_p \, v_q)$ nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele, so ordnet man damit jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar wissen wir, dass dieselben jedesmal den Complex-Kegel eines Integral-Complexes umhüllen.

Zwei consecutive Gruppen $(u_p \, v_q)$, $(u_{p+\Delta p} \, v_{q+\Delta q})$ ordnen jedem Punkte eine oder einige Richtungen zu, und dieselben gehören offenbar unbegrenzt vielen Integral-Complexen an. Es folgt hieraus, dass der geometrische Ort dieser dreifach unendlich vielen Richtungen eine *Linien-Congruenz* sein muss, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass wenn $(u_p \, v_q)$ constant bleibt, $(u_{p+\Delta p} \, v_{q+\Delta q})$ dagegen variirt, wir, allen Werthen der Grösse $\frac{\Delta u_p}{\Delta v_q}$ entsprechend, einfach unendlich viele Congruenzen erhalten, deren Inbegriff einen Complex C bildet. *Die Geraden dieses Complexes, die durch einen Punkt gehen, liegen nun immer in einer Ebene*, derjenigen nämlich, die durch die Gruppe $(u_p \, v_q)$ dem betreffenden Punkte zugeordnet wird, und also ist C ein linearer Complex. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen**):

---

*) Die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente zweier partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung brauchen nicht den ganzen Raum zu durchziehen; es ist nämlich möglich, dass zweifach unendlich viele elementare Complex-Kegel zugleich beiden Gleichungen angehören. Dieser Fall kann hier nicht eintreten; zweifach unendlich viele Complex-Kegel bestimmen nämlich bereits einen *Linien*-Complex, und unsere D_{11} entsprechen ja Linien-Complexen.

**) Herrn Klein's Bemerkung, dass die Tangenten einer developpablen Fläche einen Complex bilden, dessen Complex-Kegel ebene Büschel sind, macht es nothwendig, die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass alle C solche Complexe wären. Alsdann würden jedesmal ∞^1 C einen speciellen Complex umhüllen, dessen Integralflächen *Developpablen* wären. Wir würden also höchstens die bekannte Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

erhalten, die wir schon als eine D'_{21} mit allgemeinem ersten Integrale angegeben haben.

Wenn eine D''_{21} ein allgemeines erstes Integral besitzt, so entsprechen demselben zweifach unendlich viele lineare Complexe C und zwar in solcher Weise, dass einfach unendlich viele C immer einen Enveloppe-Complex geben, dessen zugehörige D_{11} ein particuläres erstes Integral ist.

Wir erledigen nun die Frage, ob zweifach unendlich viele lineare Complexe immer eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung mit einem allgemeinen ersten Integrale bestimmen, und hierbei wird es vortheilhaft sein, Kugel-Vorstellungen anzuwenden. Einem jeden linearen Kugel-Complexe entsprechen, wie wir wissen (64.), dreifach unendlich viele Flächen-Elemente, die sich an die betreffende Fundamental-Kugel anschliessen. Betrachten wir also zweifach unendlich viele lineare Kugel-Complexe C, so gehört jedes Element des Raumes nur einem oder einigen C als ausgezeichnetes Element an. Man ordne nun einem jeden Flächen-Elemente die Durchschnitts-Richtung mit der Fundamental-Kugel des zugehörigen C zu und betrachte diejenige D''_{22}, welche eben diese Zuordnung (§ 20., 61.) bestimmt. Dieselbe wird offenbar von einer jeden D_{12} befriedigt, die dem Enveloppe-Complexe von einfach unendlich vielen C entspricht.

Zweifach unendlich viele lineare Linien- oder Kugel-Complexe bestimmen immer eine D''_{21} oder D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale.

Unsere zweifach unendlich vielen linearen Complexe, deren Gleichung mit zwei Parametern λ und μ sich folgendermassen schreiben lässt:

$$\Phi(X\ Y\ Z\ H\ \lambda\ \mu) = 0,$$

bestimmen einen Enveloppe-Complex A, dessen Gleichung man findet, indem man zwischen den Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

die Parameter eliminirt. Es liegt nahe zu vermuthen, dass die dem Complexe A zugehörige D_{12} ein singuläres erstes Integral darstellt, und das ist in der That auch der Fall. Betrachten wir nämlich eine in A enthaltene Kugel Q und zugleich den entsprechenden linearen Complex C, der sich offenbar unter den einfach unendlich vielen linearen Tangential-Complexen befindet, welche A in Q besitzt, so ist es klar, dass dieser Kugel Q *derselbe Trajectorien-Kreis hinsichtlich A wie hinsichtlich eines beliebigen unter den früher betrachteten Enveloppe-Complexen*, der von C umhüllt wird, entspricht. Es zeigt sich also, dass die Integralflächen von A unserer D''_{22} genügen.

Eine D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale besitzt im Allgemeinen ausserdem ein singuläres erstes Integral.

Ich werde nun andeuten, wie man durch analytische Operationen entscheidet, ob eine gegebene D''_{22} ein allgemeines erstes Integral besitzt, wie man ferner in diesem Falle dasselbe bestimmt.

Man untersucht zuerst, ob die einer beliebigen Punkt-Kugel durch die D''_{22} zugeordneten Curven s oder σ Kreise sind, und bestimmt unter dieser Voraussetzung die elementaren Umdrehungs-Kegel*), welche diese Kreise enthalten (55.). Sei

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,v) = 0$$

die allgemeine Gleichung der besprochenen Kegel mit einer arbiträren Constanten v ausser der Scheitel-Coordinaten x, y, z. Man sucht nun den analytischen Ausdruck erstens von der Winkel-Oeffnung:

$$W = \Phi(x\,y\,z\,v),$$

ferner von der Richtung der Kegel-Axe:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

In den Functionen X, Y, Z, die von x, y, z, v abhängen, setzt man statt v den Werth dieser Grösse, genommen aus der Gleichung

$$W_0 = \Phi(x\,y\,z\,v)$$

und bildet den Ausdruck:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Wenn diese Gleichung sich integriren lässt, und zwar in der Form:

$$[x - F_1(H)]^2 + [y - F_2(H)]^2 + [z - F_3(H)]^2 = H^2,$$

dann und nur dann existirt ein allgemeines erstes Integral. Die letzte Gleichung enthält zwei Parameter W_0 und H und stellt also die zweifach unendlich vielen Fundamental-Kugeln unserer linearen Kugel-Complexe C dar. Hieraus findet man leicht die allgemeine Gleichung:

$$\Pi(X\,Y\,Z\,H\,\lambda\,\mu) = 0$$

dieser Complexe, und damit ist das allgemeine erste Integral bestimmt. Endlich giebt die Elimination von λ und μ zwischen den Gleichungen

$$\Pi = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = 0$$

das singuläre erste Integral.

*Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral zugiebt, so lässt sich dasselbe wie auch das zugehörige singuläre erste Integral immer angeben***).

---

*) Wenn die auf einer beliebigen Punkt-Kugel gelegenen Curven s und σ Kreise sind, so ordnet unsere D''_{22} in dem angegebenen Sinne jedem Punkte einfach unendlich viele *Umdrehungs*-Kegel zu. Die so gefundenen ∞^4 Kegel ordnen sich, wenn erste Integrale existiren, in Schaaren von ∞^3, die jedesmal ein erstes Integral bestimmen.

**) Ein gutes Beispiel einer D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale und einem zugehörigen singulären Integrale giebt die Aufgabe: alle Flächen zu finden, die einfach unendlich viele Tangentenebenen einer gegebenen Fläche Φ orthogonal schneiden. Das singuläre erste Integral entspricht der Bestimmung aller Flächen, deren Krümmungs-Centra des einen Systems auf Φ liegen.

70. In der folgenden Untersuchung, deren Zweck ist, alle D''_{22} mit *zwei* allgemeinen ersten Integralen zu bestimmen, werde ich mich auf den früher (65.) eingeführten Begriff der involutorischen Lage zweier linearen Congruenzen stützen. Wir müssen dabei erinnern, dass wenn zwei *Linien*-Congruenzen in dieser Beziehung stehen, die beiden Directricen-Paare ein räumliches Vierseit bilden. Es sei andererseits Q die eine gemeinsame Kugel der entsprechenden linearen Kugel-Congruenzen, und es seien p_1, p_2 die beiden auf Q gelegenen *Punkt-Kugeln* der einen Congruenz, π_1, π_2 die entsprechenden Punkt-Kugeln der anderen Congruenz. Die vier Punkte p_1, p_2, π_1, π_2 unserer Kugel stehen alsdann in der Beziehung, dass ein jeder durch p_1 und p_2 gehender Kreis einen beliebigen Kreis, der durch π_1 und π_2 geht, orthogonal schneidet.

Dieses vorausgesetzt, betrachten wir die durch unsere D''_{22} einer beliebigen Kugel Q zugeordneten (61.) orthogonalen Kreis-Schaaren, die bezüglich durch zwei Punkte p_1, p_2 oder durch zwei andere π_1, π_2 gehen. Alle Integral-Complexe, welche Q enthalten, theilen sich in zwei Systeme, und zwar ist es klar, dass der Trajectorien-Kreis eines jeden Complexes des einen Systems durch p_1 und p_2 geht, während die Complexe des zweiten Systems in derselben Beziehung zu den Punkten π_1 und π_2 stehen. Hieraus lässt sich schliessen, *dass einem Integral-Complexe des ersten Systems, der die Kugel Q enthält, ausserdem die beiden unendlich nahen Kugeln Q' und Q'', welche Q bezüglich in p_1 und p_2 berühren, angehören.* Indem wir dieselben Schlüsse auf Q' und Q'', u. s. w. anwenden, sehen wir, dass alle Complexe des einen Systems, welche eine gegebene Kugel enthalten, ausserdem wenigstens zweifach unendlich viele Kugeln gemein haben. Mehr können es auch nicht sein; denn sonst wären sie identisch, und dann hätten wir kein allgemeines Integral. Es zeigt sich also, dass eine jede Kugel des Raumes eine Kugel-Congruenz bestimmt, und zwar giebt es zweifach unendlich viele solche, die, wenn man sie nach einem arbiträren Gesetze zu Complexen zusammenfasst, immer Integral-Complexe geben.

Ich werde nun zeigen, dass diese erzeugenden Congruenzen — ich nenne die des einen Systems S, diejenigen des zweiten Σ — *lineare* Congruenzen sind. Zu diesem Zwecke betrachte ich noch einmal die Kugel Q mit den Punkten p_1 und p_2, in denen Q' und Q'' die gegebene Kugel berühren. Einer jeden dieser letzten Kugeln ordnet unsere D''_{22} gewisse ausgezeichnete Punkte p_1', p_2' und p_1'', p_2'' zu, und zwar erkennt man leicht, *dass p_1' mit p_1, p_2'' mit p_2 identisch sein müssen.* Hieraus folgt durch eine einfache Ueberlegung, *dass alle einfach unendlich vielen Kugeln, welche Q in p_1 oder p_2 berühren, unserer Congruenz S gehören;* diese Congruenzen lassen sich also in einfach un-

endlich viele Schaaren von Kugeln, die jedesmal einen gemeinsamen Berührungspunkt haben, zusammenfassen, und hierbei gehört jede Kugel *zwei* solchen Schaaren an. Die entsprechenden Linien-Congruenzen ordnen sich also in einfach unendlich viele ebene Büschel, und zwar gehört eine jede Congruenz-Linie zwei solchen Büscheln an. Dieses ist aber für die *lineare* Congruenz charakteristisch.

Wenn eine D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale besitzt, so entsprechen derselben zwei Schaaren von zweifach unendlich vielen linearen Congruenzen S und Σ. Einfach unendlich viele S oder Σ bilden immer einen Integral-Complex.

Mit Berücksichtigung des Anfangs dieser Nummer findet man nun, dass zwei beliebige Congruenzen S und Σ immer in Involution liegen, dass also die beiden Directricen-Paare der betreffenden Linien-Systeme jedesmal ein räumliches Vierseit bilden.

Hieraus folgt, dass die Directricen aller S keine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, sondern nur eine Linienfläche bestimmen. Sonst existirten nämlich zwei Linien-Congruenzen — alle Directricen unserer beiden Systeme — deren gegenseitige Beziehung eine solche wäre, dass eine jede Gerade der einen Congruenz alle Linien der zweiten träfe. Dieses ist aber unmöglich.

Die Directricen bilden also die beiden Erzeugungen einer Linienfläche, die bekanntlich eine Fläche zweiten Grades sein muss, und also werden wir auf die in Nummer 66. untersuchten Gebilde zurückgeführt.

*Zwei conjugirte dreigliedrige Gruppen linearer Complexe definiren die allgemeinste D''_{21} (oder D''_{22}) mit zwei allgemeinen ersten Integralen**).

71. Ehe ich diesen Abschnitt schliesse, will ich noch beweisen, dass, wie früher behauptet, die allgemeine Form einer D''_{21} die folgende ist:

$$rt - s^2 = \Phi(x\,y\,z\,p\,q),$$

ferner an diese Form eine Interpretation und einige Sätze anknüpfen. Die Differential-Gleichung der Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung zweiter Ordnung $F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0$ schreibt sich bekanntlich:

$$\frac{\partial F}{\partial r}\,dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\,dy\,dx + \frac{\partial F}{\partial t}\,dx^2 = 0.$$

Andererseits befriedigen die Haupttangenten-Curven die Relation:

$$t\,dy^2 + 2s\,dy\,dx + r\,dx^2 = 0.$$

Sollen also die Haupttangenten-Curven beider Systeme Charakteristiken sein, so gelten die folgenden Gleichungen:

---

*) Auf den Integralflächen einer solchen D''_{21} gehören die Tangenten einer beliebigen Haupttangenten-Curve jedesmal einem linearen Complexe an.

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{t} = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}}{-2s} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{r},$$

und wenn man hier nach den gewöhnlichen Methoden integrirt, so findet man die obenstehende Form.

Wie bekannt, ist

$$\frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2}$$

die Formel des Krümmungs-Masses, und also kommt die Integration einer D''_{21} darauf hinaus: *alle Flächen zu finden, deren Krümmungs-Mass nach einem gegebenen Gesetze von der Lage des Flächen-Elements abhängt.*

Unser früherer Satz, dass wenn eine D''_{21} ein erstes Integral $u = 0$ besitzt, dasselbe eine D_{11} sein muss, dass ferner jede D_{11} unbegrenzt vielen D''_{21} genügt, giebt leicht das folgende Theorem, welches sich übrigens unmittelbar aus einem Satze des Herrn Enneper (diese Annalen II., p. 596, Anm.) ableiten lässt:

Wenn zwei Flächen einander nach einer Curve berühren, und dabei jedem Punkte dieser Curve dasselbe Krümmungs-Mass hinsichtlich beider Flächen entspricht, so ist die Curve eine gemeinsame Haupttangenten-Curve. Wenn andererseits zwei Flächen einander nach einer solchen Curve berühren, so findet jene Beziehung immer statt.

Vierter Abschnitt.

Zur Theorie der Complexe.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnittes beschäftige ich mich mit den Haupttangenten-Curven des Complexes zweiten Grades. In § 25. zeige ich, dass mehrere bekannte Theorien, die sich auf zwei zuerst von Herrn Kummer untersuchte Flächen vierter Ordnung — die mit 16 Knotenpunkten und die mit einem Doppel-Kegelschnitt — beziehen, durch meine Kugel-Abbildung in einander übergeführt werden können. Endlich beabsichtige ich mit den Entwickelungen des letzten Paragraphen, den Zusammenhang zwischen den Ideen dieser Abhandlung und einigen Arbeiten des Herrn Klein darzulegen.

§ 23.

Ueber einen Linien-Complex zweiten Grades.

72. In § 17. haben wir gefunden, dass die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes $F(X\,Y\,Z) = 0$ immer durch Differentiation

und Elimination bestimmt werden können, wenn zuerst die geodätischen Curven der Fläche $F = 0$ gefunden sind. Die hier auftretenden Linien-Complexe charakterisirten wir dadurch, dass sie eine infinitesimale Transformation von der Form:

(1) $$z_1 = z_2,\ x_1 = x_2 + az_2 + b,\ y_1 = y_2 + cz_2 + d$$

besitzen; es folgt hieraus, dass auch die zugehörigen Singularitätenflächen, deren Beziehung zu den Complexen bekanntlich eine durch lineare Transformationen unzerstörbare ist, durch die besprochene infinitesimale Transformation in sich übergeführt werden, und demzufolge müssen sie jedesmal von einfach unendlich vielen Curven W (vgl. § 17.) des entsprechenden Transformations Cyclus erzeugt sein. Nun bestimmen die Gleichungen (1) in jeder Ebene $z =$ Const. eine Parallel-Verschiebung, und also sind die betreffenden Curven W die Geraden einer speciellen linearen Congruenz, deren Directricen in die unendlich weit entfernte Gerade der xy-Ebene zusammengefallen sind. *Die Singularitätenfläche eines jeden Linien-Complexes $F(X\ Y\ Z) = 0$ ist eine Linienfläche, deren Erzeugende dieser speciellen linearen Congruenz angehören.*

Wenn man die Singularitätenfläche eines Linien-Complexes bestimmen will, so kann man nach Plücker in folgender Weise verfahren. Man sucht alle Geraden des Complexes, deren zugehörige lineare Tangential-Complexe specielle Complexe sind. Die gefundenen zweifach unendlich vielen Complexlinien umhüllen zwei Flächen, unter denen die Singularitätenfläche die eine ist.

Unser Complex $F(X\ Y\ Z) = 0$ besitzt, wissen wir, nur zweifach unendlich viele (§ 17., 49.) Tangential-Complexe mit der Gleichungsform:

(1) $$aX + bY + cZ + dR + e = 0,$$

und auf die Betrachtung derselben können wir uns beschränken. Hierbei ist immer $d = 0$, indem ein Complex (1) von allen Kugeln gebildet wird, deren Centra auf einer Tangentenebene der Fläche $F = 0$ liegen. Ein solcher Complex kann nur unter der Voraussetzung ein specieller sein, dass die betreffende Tangentenebene zugleich den imaginären Kugel-Kreis berührt. Wir werden somit auf die Betrachtung der imaginären Developpablen geführt, die zugleich um $F = 0$ und den imaginären Kugel-Kreis umgeschrieben ist. *Die Ebenen dieser Abwickelbaren bilden sich im Linien-Raume r als die Erzeugenden* (§ 9., 27., § 10., 30.) *der Singularitätenfläche ab*), und zwar erhalten wir in*

*) Hieraus folgt, dass wenn $F(X\ Y\ Z\ \lambda) = 0$ in der gewöhnlichen Interpretation alle Flächen eines Orthogonal-Systems darstellt, die Linien-Complexe $F(X\ Y\ Z\ \lambda) = 0$ eine gemeinsame Singularitätenfläche haben. Diese Complexe

dieser Weise die vollständige Singularitätenfläche. Hierbei ist, wie eine geometrische Ueberlegung zeigt, die Classe der imaginären Developpablen gleich der Ordnung der Singularitätenfläche*).

Es sei nun insbesondere $F = 0$ eine Regelfläche. Alsdann bildet der Inbegriff aller Kugeln, deren Centra auf einer geraden Erzeugenden liegen, eine lineare Kugel-Congruenz. Der Linien-Complex $F = 0$ wird also von einfach unendlich vielen linearen Congruenzen gebildet, und hierbei sind die zugehörigen Directricen jedesmal das Bild derjenigen Tangentenebenen der Fläche $F = 0$, welche die besprochene Erzeugende enthalten und zugleich den imaginären Kugel-Kreis berühren. Die Erzeugenden der Singularitätenfläche τ ordnen sich in diesem Falle paarweise zusammen als Directricen jener linearen Congruenzen.

Eine Fläche zweiten Grades $F_2 = 0$ kann bekanntlich auf zwei Weisen durch eine gerade Linie erzeugt werden, und also enthält der Linien-Complex $F_2 = 0$ zwei Schaaren linearer Congruenzen. Es ist aber zu bemerken, dass die eben besprochene imaginäre Developpable im Allgemeinen nicht zerfällt, dass also die beiden Directricen-Systeme eine irreductible Fläche τ bilden. Nun gehört jede Linie unseres Complexes *zwei* linearen Congruenzen an — einer aus jeder Schaar — und schneidet in Folge dessen die Fläche τ wenigstens in vier Punkten. Andererseits wissen wir, dass die Singularitätenfläche des allgemeinen Complexes zweiten Grades von vierter Ordnung ist, also ist dieselbe eine Linienfläche vierten Grades.

Die Singularitätenfläche des Complexes $F_2 = 0$ ist eine Linienfläche vierten Grades mit zwei zusammengefallenen Doppellinien; alle Complexlinien, die eine Erzeugende schneiden, treffen ausserdem die eine von zwei zugeordneten Erzeugenden.

73. Es ist bekannt, dass Jacobi die geodätischen Curven auf der Fläche zweiten Grades mittelst hyperelliptischer Transcendenten bestimmt hat, und also können die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes $F_2 = 0$ mittelst hyperelliptischer Transcendenten gefunden werden. Im Folgenden werde ich alle hierher gehörigen Complexe aufzählen und dabei aus den Eigenschaften der verschiedenen Flächen zweiten Grades

---

bilden in Verbindung mit den linearen Complexen $H = \text{Const.}$ ein vollständiges Involutions-System in Herrn Klein's metrischer Linien-Geometrie.

*) Ist die Fläche $\Phi(X\,Y\,Z) = 0$ eine imaginäre Developpable, die den imaginären Kugel-Kreis enthält, so ist der Linien-Complex $\Phi(X\,Y\,Z) = 0$ der Inbegriff aller Tangenten einer Regelfläche, die einer speciellen linearen Congruenz gehört. Insbesondere ist $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ einerseits die Gleichung einer Punkt-Kugel, andererseits wie Herr Klein es durch andere Betrachtungen gefunden hat, die Complex-Gleichung einer Fläche zweiten Grades (vgl. diese Annalen II, p. 209).

entsprechende Eigenthümlichkeiten des Bild-Complexes schliessen. Zum leichteren Verständnisse schicke ich einige Bemerkungen voraus.

In § 13. dachte ich mir den Raum r einer *linearen* Transformation unterworfen und betrachtete die entsprechenden Umformungen von R, unter denen ich alle Bewegungen, die Aehnlichkeits-Transformation und die Parallel-Transformation fand. Es ist nun einleuchtend, dass wenn eine gegebene Fläche oder Complex des einen Raumes durch eine infinitesimale Transformation in sich übergeführt wird, dasselbe mit der entsprechenden Figur des anderen Raumes der Fall ist. Eine Rotationsfläche des Raumes R gestattet z. B. eine infinitesimale Rotations-Bewegung, und also können wir schliessen, dass die Bildfläche eine gewisse infinitesimale *lineare* Transformation zugiebt.

Ferner ist klar, dass wenn ein Gebilde *zwei* unabhängige, infinitesimale und zugleich *permutable* Transformationen gestattet, dieses auch mit der entsprechenden Figur der Fall ist. In diese Kategorie gehört z. B. einerseits der Inbegriff von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Schraubenfläche liegen — die betreffenden permutablen Operationen sind Schrauben-Bewegung und Parallel-Transformation — andererseits der entsprechende Linien-Complex wie auch die zugehörige Singularitätenfläche, welche also nach Herrn Klein's und meinen Untersuchungen entweder durch die Gleichung $x^a y^b z^c =$ Const. dargestellt wird, oder als Degeneration einer solchen Fläche sich auffassen lässt (vgl. Comptes Rendus 1870). Als letztes Beispiel betrachte man endlich alle Kugeln, deren Centra auf einem Rotations-Kegel liegen. Dieser Complex gestattet drei unabhängige infinitesimale Transformationen: 1) eine Aehnlichkeits-Transformation, deren Centrum die Kegel-Spitze ist, 2) eine Rotations-Bewegung um die Kegel-Axe, 3) eine Parallel-Transformation, und zwar ist die zweite Operation sowohl mit der ersten wie mit der letzten permutabel, während dieses nicht mit der ersten und letzten der Fall ist. Der Linien-Complex und die zugehörige Singularitätenfläche besitzen die entsprechenden Eigenschaften.

74. Im Raume R ist bei unserer Abbildung der unendlich weit entfernte, imaginäre Kreis und sonst nichts ausgezeichnet — das heisst, für eine projectivische Auffassung. Wenn wir also alle Special-Formen des Linien-Complexes $F_2(X\ Y\ Z) = 0$ suchen, so müssen wir zunächst erinnern, dass die projectivische Punkt-Geometrie nur *eine* Particularisation der Fläche zweiten Grades kennt — den Kegel nämlich; ferner fragt es sich, wie viele verschiedene Lagen diese beiden Flächen hinsichtlich des genannten Kreises haben können. Nun ist es eben nach diesen Gesichtspunkten, dass die *metrische* Geometrie die Flächen zweiten Grades ordnet; hierbei muss man indessen wohl bemerken, dass die gewöhnlichen Aufzählungen keine Fläche berücksichtigen, deren Gleichung imaginäre Coefficienten enthält Zunächst stellen wir zwei

Gruppen auf, je nachdem die unendlich weit entfernte Ebene eine Tangentenebene ist oder nicht.

A. Wenn F_2 nicht von der unendlich weit entfernten Ebene berührt wird, so schreibt sich die entsprechende Gleichung in der folgenden Form:

$$(1) \qquad a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = d,$$

vorausgesetzt dass $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Hauptebenen sind. Durch eine Bewegung lässt die Fläche (1) sich im Allgemeinen in:

$$(2) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = d$$

überführen, und zwar können wir uns auf die Betrachtung dieser letzten Fläche beschränken; einer Bewegung des Raumes R entspricht nämlich eine *lineare* Transformation des anderen Raumes.

Es sind nun $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ allgemeine lineare Complexe, Const. $= 0$ dagegen ein specieller Complex; ferner liegen diese Complexe (§ 10., 30.) paarweise in Involution, und also hängt ihr System von 13 Constanten ab; wir finden somit, dass der Linien-Complex F_2 16 wesentliche Constanten enthält. Setzt man in (2) statt X, Y, Z (§ 9., 27.) die entsprechenden Ausdrücke durch die Plücker'schen Linien-Coordinaten r, ϱ, s, σ:

$$X = \varrho + s, \; iY = \varrho - s, \; Z = \sigma - r,$$

so findet man nach der gewöhnlichen Methode die Gleichung der Singularitätenfläche in der folgenden Form:

$$4abc(yz - xt)^2 - dc(a-b)(z^4 + t^4) + d(4ab - 2ac - 2bc)z^2t^2 = 0 \; ^{*)}.$$

1) Wenn die Coefficienten a, b, c, d allgemein sind, so ist die Singularitätenfläche, wie wir schon von früher wissen (70.), eine Linienfläche vierter Ordnung; dieselbe wie auch der Complex gestattet eine infinitesimale lineare Transformation.

2) Sei $a = b$; die Fläche F_2 ist dann eine Rotationsfläche, und also besitzt der Linien-Complex F_2 zwei permutable infinitesimale lineare Transformationen, welche einer Rotations-Bewegung und einer Parallel-Transformation entsprechen. Die Singularitätenfläche:

$$\left(zy - xt - \sqrt{\frac{a-c}{ac}} \cdot dzt\right)\left(zy - xt + \sqrt{\frac{a-c}{ac}} \cdot dzt\right) = 0$$

zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades, die einander nach einer gemeinsamen Erzeugenden ($z = 0$, $t = 0$) berühren.

3) Sei $d = 0$; F_2 ist ein Kegel. Der Kugel-Complex besitzt zwei infinitesimale Transformationen, die nicht permutabel sind: Parallel-Transformation und Aehnlichkeits-Transformation. Die Singularitäten-

---

*) Es soll die Grösse t eine homogene vierte Coordinate bezeichnen.

fläche des Linien-Complexes ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(yz - xt)^2 = 0.$$

4) Sei $d = 0$, $a = b$; F_2 ist ein Rotations-Kegel; der Kugel-Complex gestattet drei infinitesimale Transformationen: Parallel-Transformation, Rotations-Bewegung und Aehnlichkeits-Transformation. Die beiden ersten wie auch die beiden letzten sind permutabel; dies ist dagegen nicht der Fall mit der ersten und letzten. Der Linien-Complex besitzt die entsprechenden Eigenschaften. Die Singularitätenfläche ist wiederum eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades.

5) Sei $c = 0$; F_2 ist ein Cylinder. Der Kugel-Complex besitzt zwei permutable Transformationen: Translations-Bewegung und Parallel-Transformation. Die Singularitätenfläche des Linien-Complexes wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet ($z^2 t^2 = 0$).

6) Sei $a = b$, $c = 0$; F_2 ist ein Rotations-Cylinder. Der Kugel-Complex gestattet drei permutable, infinitesimale Transformationen: Translation, Rotation und Parallel-Transformation. In Folge dessen ist der Linien-Complex eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen ($z^2 t^2 = 0$) gebildet.

7) Sei $a = b = c$; F_2 ist eine Kugel. Der Kugel-Complex gestattet drei unabhängige infinitesimale Rotationen, die indessen nicht permutabel sind. Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(zy - xt)^2 = 0.$$

B. Wenn die unendlich weit entfernte Ebene die Fläche F_2 berührt, so nimmt die Gleichung derselben die folgende Form:

$$aX^2 + aY^2 + 2cZ = 0.$$

1) Die Singularitätenfläche:

$$4ab\,zt(xt - yz) - (a - b)\,c(z^4 + t^4) - 2(a + b)\,cz^2 t^2 = 0$$

ist, wenn a, b, c allgemein sind, eine Linienfläche vierten Grades.

2) Sei $a = b$; F_2 ist ein Rotations-Paraboloid. Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades und zwei Tangentenebenen derselben.

3) Sei $a = 0$; F_2 ist ein parabolischer Cylinder. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet.

---

75. Die folgende Aufzählung aller Complexe, deren Gleichung die Form $F_2(X\,Y\,Z) = 0$ erhalten kann, ist vollständig.

F_2 ist eine allgemeine Fläche zweiten Grades.

Der Complex kann in zwei Weisen durch eine lineare Congruenz erzeugt werden.

A. Schneidet F_2 die unendlich entfernte Ebene nach einem nicht zerfallenen Kegelschnitt δ, so fallen die Leitlinien jener linearen Congruenzen, das heisst die Erzeugenden der Singularitätenfläche niemals mit der Fundamental-Geraden in r (Const. $= 0$) zusammen. Nach der Lage des Kegelschnitts δ hinsichtlich des imaginären Kugel-Kreises erhalten wir sechs Unter-Formen.

1) δ und $\varkappa$ haben eine allgemeine gegenseitige Lage.

Die Developpable $(F_2 \varkappa)$ ist eine allgemeine Abwickelbare vierter Classe. δ und $\varkappa$ haben vier gemeinsame Punkte und vier gemeinsame Tangenten.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit zwei zusammengefallenen Doppellinien (N. 12. der Cremona'schen Aufzählung). Es giebt vier Congruenzen in jeder Gruppe, die speciell sind. Es giebt vier singuläre Erzeugende.

2) δ und $\varkappa$ berühren einander in einem Punkte.

Die Developpable $(F_2 \varkappa)$ ist eine Abwickelbare vierter Classe mit einer Doppel-Ebene. In den Berührungspunkt zwischen δ und $\varkappa$ fallen zwei gemeinsame Tangenten wie zwei gemeinsame Punkte zusammen.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung, die ausser der Doppellinie Const. $= 0$ noch eine Doppelerzeugende enthält. In dieselben haben sich zwei Leitlinien specieller Congruenzen wie auch zwei singuläre Erzeugende vereinigt. (Cremona's Aufzählung N. 6.)

3) δ und $\varkappa$ haben zwei verschiedene Berührungspunkte.

Die Developpable $(F_2 \varkappa)$ zerfällt in zwei Abwickelbare zweiter Classe mit zwei gemeinsamen Ebenen.

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades mit zwei gemeinsamen Erzeugenden jeder Schaar. Die Directricen der linearen Congruenzen bilden die eine Erzeugung auf jeder Fläche.

4) δ berührt $\varkappa$ dreipunktig in einem Punkte.

$(F_2 \varkappa)$ ist eine Developpable vierter Classe mit einer stationären Ebene. In den besprochenen Berührungspunkt sind drei gemeinsame Punkte und ebensoviele Tangenten zusammengefallen.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer Doppellinie (Const. $= 0$) und einer stationären Erzeugenden, in die sich drei Leitlinien specieller Congruenzen, wie auch drei singuläre Erzeugende vereinigt haben. (Cremona's N. 6.)

5) δ berührt $\varkappa$ vierpunktig.

$(F_2\varkappa)$ ist zerfallen in zwei Kegel zweiten Grades, die einander nach einer gemeinsamen Erzeugenden berühren.

Die Singularitätenfläche wird von zwei Flächen zweiten Grades, deren Durchschnitt aus zwei doppeltzählenden Geraden besteht, gebildet.

6) δ und $\varkappa$ sind identisch.

Die Abwickelbare $(F_2\varkappa)$ ist ein doppeltzählender Kegel zweiten Grades, nämlich der Asymptoten-Kegel der betreffenden Kugel. Durch jede imaginäre Erzeugende geht nur eine Tangenten-Ebene des Asymptoten-Kegels.

Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades. Der Complex wird in zwei Weisen von ∞^1 speciellen linearen Congruenzen erzeugt, und hierbei bilden die betreffenden Leitlinien jedesmal dieselbe Erzeugung der Singularitätenfläche.

B. F_2 berührt die unendlich weit entfernte Ebene. Der Durchschnitts-Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade g und j, die fünf verschiedene Lagen hinsichtlich $\varkappa$ haben können. Unter den linearen Congruenzen jeder Gruppe giebt es im Allgemeinen eine, deren zusammengefallene Leitlinien mit Const. $= 0$ identisch sind.

7) g und j haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ ist eine Abwickelbare vierter Classe, unter deren Ebenen sich die unendlich entfernte zweimal findet; sowohl g wie j schneiden $\varkappa$ in zwei Punkten. Durch den Durchschnittspunkt von g und j gehen zwei Tangenten an $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer Leitlinie, mit welcher zwei Erzeugende zusammenfallen. Es giebt in jeder Schaar linearer Congruenzen zwei specielle, deren Leitlinien von Const. $= 0$ verschieden sind. Es giebt, wie schon früher gesagt, zwei singuläre Erzeugende, die mit

$$\text{Const.} = 0$$

zusammengefallen sind. (Cremona's N. 10.)

8) g berührt $\varkappa$, j schneidet denselben.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ zerfällt in ein Ebenen-Büschel, dessen Axe g ist und eine Abwickelbare dritter Classe, unter deren Ebenen sich die unendlich entfernte einmal findet. Die Erzeugenden des einen Systems schneiden g.

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Cayley'schen Linienfläche dritter Ordnung zusammen mit einer durch die Doppellinie gehenden Ebene. Den Congruenzen der einen Schaar entsprechen Leitlinien, unter denen jedesmal die eine auf der Linienfläche liegt, während die zweite einem ebenen Büschel in jener Ebene gehört. Die

Es giebt eine Erzeugende der Fläche F_2, die $\varkappa$ berührt. | Leitlinien der zweiten Erzeugung liegen alle auf der Cayley'schen Linienfläche. Es giebt eine zerfallende Congruenz.

9. Sowohl g wie j berühren $\varkappa$.

Die Abwickelbare $(F_2 \varkappa)$ besteht aus einem Kegel zweiten Grades und zwei Ebenen-Büscheln. F_2 hat zwei Erzeugende, eine aus jeder Schaar, g und j, die $\varkappa$ berühren. | Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades und zwei Tangentenebenen derselben. Den Congruenzen jeder Schaar entsprechen Leitlinien, unter denen die eine auf der Linienfläche, die zweite in der einen Tangentenebene liegt. Es giebt zwei zerfallende lineare Congruenzen.

10. Der Durchschnittspunkt der Geraden g und j liegt auf $\varkappa$.

Die Abwickelbare $(F_2 \varkappa)$ ist eine Developpable vierter Classe mit der unendlich entfernten Ebene als stationäre Ebene. | Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer dreifachen Linie, mit welcher die Erzeugende zweimal zusammenfällt. (Cremona N. 10.) In jeder Congruenz-Schaar giebt es zwei specielle; die Leitlinie der einen ist Const. $= 0$.

11. g berührt $\varkappa$ in einem Punkte, durch den j geht.

$(F_2 \varkappa)$ besteht aus einer Developpablen dritter Classe und einem Ebenen-Büschel, dessen Axe g diejenige Linie jener Developpablen ist, die in der unendlich entfernten Ebene liegt. | Die Singularitätenfläche besteht aus einer Cayley'schen Linienfläche dritter Ordnung und der singulären Tangentenebene derselben. Es giebt eine zerfallende Congruenz.

$F_2 = 0$ *ist ein Kegel.*

Der Complex enthält im Allgemeinen nur *eine* Schaar linearer Congruenzen.

C. Die Kegel-Spitze liegt im endlichen Raume. Die Developpable $(F_2 \varkappa)$ ist ein doppeltzählender Kegel zweiten Grades. Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades. Die Leitlinien der linearen Congruenzen sind die Erzeugenden des einen Systems. Dieselben sind im allgemeinen Falle zwei-zweideutig auf einander bezogen.

12. δ und $\varkappa$ haben eine allgemeine gegenseitige Lage. Unter den linearen Congruenzen giebt es vier specielle.

13. δ und $\varkappa$ berühren einander einmal. Unter den vier speciellen Congruenzen sind zwei zusammengefallen.

14. δ und $\varkappa$ berühren einander in zwei verschiedenen Punkten. Unter den vier speciellen Congruenzen fallen paarweise zwei zusammen.

15. δ und $\varkappa$ haben drei consecutive Punkte gemein. Drei specielle Congruenzen fallen zusammen.

16. δ und $\varkappa$ haben vier consecutive Punkte gemein. Alle specielle Congruenzen haben sich vereinigt.

17. δ und $\varkappa$ sind identisch. Alle lineare Congruenzen sind specielle. Zwei consecutive Erzeugenden der Fläche zweiten Grades bestimmen jedesmal eine Congruenz und somit besteht dieselbe aus allen Tangenten der Fläche längs jener Erzeugenden. In der That hat auch Herr Klein schon 1869 (Math. Annal. II, pg. 198.) angegeben, dass die Gleichung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ (die in gewöhnlicher Interpretation die Punkt-Kugel bestimmt) alle Tangenten einer Fläche zweiten Grades definirt.

D. Die Kegel-Spitze liegt in der unendlich entfernten Ebene, die den Kegel nach zwei Geraden g und j schneidet.

18. g und j haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Developpable $(F_2 \varkappa)$ besteht aus zwei doppeltzählenden Ebenen-Büscheln. Die Singularitätenfläche ist in zwei Ebenen zerfallen. In diesen Ebenen liegt je ein Strahl-Büschel, deren Gerade zwei-zweideutig auf einander bezogen sind. Entsprechende Gerade sind Directricen einer linearen Congruenz, die dem Complexe angehört. Unter den Congruenzen giebt es zwei, und zwar specielle, deren Directricen mit Const. $= 0$ identisch sind.

19. g schneidet $\varkappa$, j berührt denselben.

Die Geraden der beiden Strahl-Büschel sind ein-zweideutig auf einander bezogen. Es giebt nur eine specielle Congruenz, deren Leitlinien in Const. $= 0$ zusammengefallen sind, ausserdem eine zerfallende Congruenz.

20. g und j berühren beide $\varkappa$.

Die beiden Strahl-Büschel sind eindeutig auf einander bezogen. Der Complex ist eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden. Zwei zerfallende Congruenzen.

21. Der Schnittpunkt der Linien g und j liegt auf $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht nur aus einer vierfachen Ebene. Der Complex besteht aus einer Schaar specieller linearer Congruenzen, deren Leitlinien einen ebenen Büschel bilden. Hierbei ist jede Linie des Büschels Leitlinie zweier speciellen Congruenzen.

22. g berührt $\varkappa$ in einem Punkte, durch den j geht.

Die Singularitätenfläche ist eine vierfache Ebene. Der Complex besteht aus einer Schaar specieller linearer Congruenzen, deren Leitlinien einen ebenen Strahl-Büschel bilden. Jede Linie des Büschels

ist Leitlinie *einer* Congruenz. Es giebt eine von Const. = 0 verschiedene Leitlinie, welcher eine zerfallende Congruenz entspricht.

E. Der Kegel F_2 berührt die unendlich entfernte Ebene nach einer Geraden g.

23. Die Kegel-Spitze und g haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei ebenen Strahl-Büscheln, deren Gerade zwei-zweideutig auf einander bezogen sind. Entsprechende Linien sind Directricen einer linearen Congruenz. Es giebt eine doppeltzählende Congruenz, deren Leitlinien in Const. = 0 zusammengefallen sind. Const. = 0 entspricht sich selbst, sowohl wenn man dieselbe als dem ersten Büschel, wie als dem zweiten angehörig betrachtet.

24. g berührt $\varkappa$. Die Kegel-Spitze liegt nicht auf $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei ebenen Strahlen-Büscheln, die ein-zweideutig auf einander bezogen sind. Const. = 0 entspricht sich selbst, sowohl wenn sie als dem einen, als dem andern Büschel angehörig betrachtet wird.

25. Die Kegel-Spitze liegt auf $\varkappa$; g hat eine allgemeine Lage.

Die Singularitätenfläche ist eine vierfache Ebene. Der Complex besteht aus einer Schaar specieller Congruenzen, deren Leitlinien einen ebenen Strahl-Büschel zweimal erzeugen. Es giebt zwei Gerade in dem Büschel, und zwar ist Const. = 0 die eine, welche nur für *eine* specielle Congruenz Leitlinie sind.

26. Die Kegel-Spitze liegt auf dem Kegelschnitte $\varkappa$, der von g berührt wird.

Der Complex besteht aus einer Schaar specieller Congruenzen, deren Leitlinien *einmal* einen ebenen Strahl-Büschel erzeugen. Der Leitlinie Const. = 0 entspricht eine zerfallende Congruenz. Der Complex ist eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden.

Es bleibt die Frage zu entscheiden, ob diese 26 Complexe wesentlich verschieden sind. Wie die Untersuchung derselben zeigt, sind 21. und 25., wie auch 22. und 26. paarweise identisch, und sonst keine. *Es giebt also 24 verschiedene Complexe zweiten Grades, deren Gleichung die Form* $F_2(X\,Y\,Z) = 0$ *erhalten kann.* Die Haupttangenten-Curven derselben hängen von hyperelliptischen Transcendenten oder einfacheren Functionen ab.

Die Linien-Complexe $F(X\,Y\,Z) = 0$ sind, wie ich wiederholt bemerkt habe, als Degenerationen derjenigen Complexe zu betrachten, die durch eine homogene Gleichung zwischen X, Y, Z, H dargestellt

werden. Diese letzten Complexe können dadurch charakterisirt werden, dass ihre Singularitätenflächen Regelflächen mit zwei geraden Leitlinien sind. Hierher gehören insbesondere alle Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche eine Regelfläche ist.

Nach Herrn Klein entsprechen jeder Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten, und also zugleich jeder Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppellinien einfach unendlich viele Complexe zweiten Grades, deren gemeinsame Singularitätenfläche die Fläche ist. Jeder Complex bestimmt eine Curve auf der Fläche, den geometrischen Ort nämlich aller Punkte, deren sämmtliche zugehörige Tangenten Complexlinien sind. Diese Curve ist eine Haupttangenten-Curve. Es ist eben in dieser Weise, dass Herr Klein die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche findet. Diese Bestimmungsweise wird in gewissem Sinne illusorisch, wenn die Fläche eine Regelfläche ist, indem man alsdann bei directer Anwendung von Herrn Klein's Methode nur die Erzeugenden selbst findet. Dies liegt darin, dass die einer solchen Regelfläche zugehörige Schaar von Complexen in ein System von Complexen zweiten Grades und ein System linearer Complexe:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$$

zerfällt. Diese letzteren Complexe stehen, wie ich in § 12. unter einem anderen Gesichtspunkte gefunden habe, in derjenigen Beziehung zu der Regelfläche, in welcher nach Klein ein allgemeiner Complex zweiten Grades zu seiner Singularitätenfläche steht.

§ 24.

Ueber die Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades.

76. Ein jeder Linien-Complex bestimmt (§ 3., 10.; § 14.) eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung D_{11}, deren Charakteristiken von den Geraden des Complexes umhüllt werden, und insofern existirt für einen gewissen Gesichtspunkt ein Zusammenhang zwischen der Plücker'schen Linien-Geometrie und der Monge'schen Theorie partieller Differential-Gleichungen. Diese Bemerkung macht es a priori plausibel, bei dem Studium der Complexe den Haupttangenten-Curven derselben eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen, und hoffentlich wird der Inhalt des dritten Abschnitts bewiesen haben, dass eine solche Richtung der Untersuchung in der That fruchtbar ist. Insbesondere schien es mir wahrscheinlich, dass die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades Interesse darbieten würde, dies um so mehr, weil diese Curven für den

Complex, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, mit den von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung der Curven W untersuchten identisch sind, und diese letzten Curven — als ein räumliches Analogon der logarithmischen Spirale — höchst merkwürdige Eigenschaften besitzen. Für einen Complex mit 16 Constanten führte ich, wie im vorangehenden Paragraphe auseinandergesetzt, die betreffende Differential-Gleichung auf das von Jacobi gelöste Problem: die geodätischen Curven einer Fläche zweiten Grades zu finden, zurück. Endlich fand ich, dass auch der allgemeine Fall von der Integration eines bestimmbaren algebraischen Differentials abhing (Akademie zu Christiania. Octbr. 1870); die Form dieses Differentials zu bestimmen, war mir aber noch nicht gelungen, als eine briefliche Mittheilung des Herrn Klein mir es möglich machte, dasselbe, oder eigentlich ein damit äquivalentes, hinzuschreiben*).

77. Die folgenden Betrachtungen waren der Ausgangspunkt für den geometrischen Weg, der mich zu dem obenstehenden Resultat führte.

a) Herr Klein hat gefunden, dass die Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten gemeinsame Singularitätenfläche ist für einfach unendlich viele Complexe zweiten Grades, deren allgemeine Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{k_2+\lambda}+\cdots\frac{x_6^2}{k_6+\lambda}=0$$

derjenigen der confocalen Flächen zweiten Grades analog ist. Diese Complexe werde ich mit Herrn Klein als *confocale Complexe zweiten Grades bezeichnen.*

b) Die Kugeln, deren Centra auf einer beliebigen Fläche zweiten Grades aus einem gegebenen confocalen Systeme liegen, bilden sich (§ 23., 72.) jedesmal als einer unter einfach unendlich vielen Linien-Complexen ab, die eine Linienfläche vierten Grades als gemeinsame Singularitätenfläche besitzen.

c) Der bekannte Satz, dass wenn man auf einer Fläche zweiten Grades die Tangenten einer geodätischen Curve zieht, dieselben eine confocale Fläche berühren, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass zwei confocale Flächen zweiten Grades die vollständige Centerfläche für eine Schaar paralleler Flächen bilden, transformirt sich durch meine Kugel-Abbildung in das folgende Theorem: Den unter b)

---

*) In der zweiten der nachstehenden Abhandlungen giebt Herr Klein eine elegante und vollständige algebraische Lösung des hier betrachteten Problems. Herr Darboux theilt mir eben mit, dass er die betreffende Kugel-Aufgabe erledigt hat und zwar in einer Weise, die durch meine Kugel-Abbildung genau der von Herrn Klein befolgten Methode entspricht.

untersuchten confocalen Linien-Complexen entsprechen Differential-Gleichungen D_{11}, die paarweise einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen.

d) Aus Herrn Klein's und meinen Untersuchungen über Flächen W folgt, dass zwei Complexe zweiten Grades, deren gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen.

Es schien mir wahrscheinlich, dass die beiden letzten Sätze, die sich auf *verschiedenartige* Complexe zweiten Grades beziehen, Special-Fälle des folgenden Theorems sein:

Zwei confocale Complexe zweiten Grades besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen.

78. Indem ich meine Aufmerksamkeit auf die entsprechenden Kugel-Complexe und die zugehörigen D_{12} richtete, sah ich, dass wenn meine Vermuthung richtig war, *für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente zweier D_{12} jedesmal die beiden zugehörigen charakteristischen Richtungen orthogonal sein mussten.* Dass diese nothwendige Forderung auch genügt, folgt aus dem bekannten Satze: Zwei partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integrale, wenn für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente jedesmal die charakteristische Richtung jeder Gleichung mit der Trajectorien-Richtung der anderen zusammenfällt.

Es war also nothwendig und hinreichend zu beweisen, dass die einer beliebigen Kugel durch unsere einfach unendlich vielen D_{12} zugeordneten Trajectorien-Curven (§ 18., 55.) ein Orthogonal-System bilden, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass dieses mit den einem beliebigen Punkte zugehörigen einfach unendlich vielen Normal-Kegeln der Fall ist (§ 18., 55.). Wenn nun $H = 0$ ein linearer Complex des confocalen Systems ist, so sind die besprochenen Kegel, wie man leicht sieht, vom zweiten Grade, und also müssen sie vier gemeinsame Tangentenebenen, welche zugleich den imaginären Kreis berühren, besitzen. Alsdann müssen die einem beliebigen Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel vier gemeinsame Erzeugende, deren Länge gleich Null ist, haben.

Dieses letzte ist aber, wie wir sogleich beweisen werden, durch unsere Kugel-Abbildung eine Consequenz davon, dass die betreffenden Linien-Complexe dieselbe Singularitätenfläche haben. Man betrachte nämlich im Raume R einen Kugel-Complex des confocalen Systems und einen beliebigen Punkt P, andererseits in r den entsprechenden Linien-Complex und die Linie l, welche das Bild von P ist. Die Kugeln unseres Complexes, deren Trajectorien-Kreise durch P gehen,

umhüllen den zugehörigen elementaren Complex-Kegel und bilden sich in r als Gerade g*) ab, welche l schneiden und zugleich in diesem Schnittpunkte einen Complex-Kegelschnitt, dessen Ebene die Linie l enthält, berühren. Wenn zwei consecutive Gerade g sich in einem auf l gelegenen Punkte p schneiden — was nur in den vier Schnittpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 von l mit der Singularitätenfläche eintritt —, so berühren sich die Bild-Kugeln, deren Durchschnitts-Curve somit zerfällt, und zwar in eine durch P gehende Gerade L zusammen mit einer anderen imaginären Linie, die hier nicht in Betracht kommt. Nun sind die Geraden L_1, L_2, L_3, L_4 einerseits die Bilder der Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, andererseits liegen sie auf dem elementaren Complex-Kegel, und also enthalten, wie früher behauptet, die einem Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel vier gemeinsame Linien, die den imaginären Kreis schneiden.

*Zwei confocale Linien-Complexe zweiten Grades bestimmen immer einfach unendlich viele Flächen, deren beide Systeme von Haupttangenten bezüglich den beiden Complexen angehören. Wenn die gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, so sind die eben besprochenen Flächen mit denen identisch, welche Herr Klein und ich unter der Bezeichnung: Flächen W untersucht haben***).

Mit Berücksichtigung dieses Satzes wie der Entwickelungen in Nummer 50. würde es nicht schwer sein zu beweisen, dass die Haupttangenten-Curven eines Complexes zweiten Grades mit 17 Constanten $[aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dH^2 = 0]$ durch Quadratur eines algebraischen Differentials bestimmt werden können; ich gehe aber darauf nicht näher ein.

79. Eine Schaar confocaler Kugel-Complexe zweiten Grades ordnet nach dem Obenstehenden jedem Punkte P einfach unendlich viele con-

---

*) Die Complexlinien g gehören der Polar-Congruenz der Geraden l hinsichtlich unseres Complexes. Cfr. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, n. 304.

**) Wenn ein Complex zweiten Grades aus unserem confocalen Systeme continuirlich in einen doppeltzählenden linearen Complex übergeht, so wird die zugehörige D_{11} eine *lineare* Differential-Gleichung, und zwar entspricht dieselbe der dem linearen Complexe zugehörigen Congruenz zweiter Ordnung und Classe, welche von Doppeltangenten der betreffenden Kummer'schen Fläche gebildet wird. Setzen wir nun voraus, dass in dem Satze des Textes der eine Complex ein allgemeiner, der zweite ein linearer ist, so werden also die gemeinsamen Integralflächen Linienflächen. *Unter den Integralflächen eines Complexes zweiten Grades finden sich im Allgemeinen sechs Schaaren von Regelflächen, deren Erzeugende die Singularitätenfläche zweifach berühren.* Wenn beide Complexe linear sind, so erhält man den folgenden Satz: Zwei beliebige unter den sechs Congruenzen zweiter Ordnung und Classe, die einer Kummer'schen Fläche angehören, bestimmen einfach unendlich viele Hyperboloide, deren Erzeugende bezüglich den beiden Congruenzen angehören. Diese Hyperboloid-Schaaren zerfallen übrigens jedesmal in zwei Gruppen.

focale Kegel zweiten Grades zu*), und offenbar finden sich unter denselben drei paarweise orthogonale Ebenen, den drei**) Complexen, welche die Punkt-Kugel P enthalten, entsprechend. Man erkennt leicht, dass diese Ebenen in P drei Flächen berühren, solche nämlich, die den geometrischen Ort für Punkt-Kugeln unserer Complexe bilden. Berücksichtigt man nun, dass diese Flächen als das Bild einer Schaar Linien-Congruenzen zweiter Ordnung und Classe, von vierter Ordnung sind und dabei den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis zweifach enthalten, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Die Punkt-Kugeln confocaler Kugel-Complexe zweiten Grades bilden einfach unendlich viele Flächen vierter Ordnung, die einem irreductiblen Orthogonal-Systeme, und zwar dem Darboux-Moutard'schen angehören.

Wählt man nun, wie sich von selbst darbietet, dieses Orthogonal-System zum Coordinaten-Systeme und zu Punkt-Coordinaten die Parameter λ_1, λ_2, λ_3 der durch einen Punkt gehenden Flächen, so lässt die Gleichung D_{12} eines Complexes, dessen Parameter c ist, sich folgendermassen schreiben:

$$(1)\quad f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_1}\right)^2 + f(\lambda_2 \lambda_3 \lambda_1 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_2}\right)^2 + f(\lambda_3 \lambda_1 \lambda_2 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\right)^2 = 0.$$

Dieses liegt darin, dass die früher besprochenen drei orthogonalen Tangentenebenen jedesmal Hauptebenen des elementaren Complex-Kegels sind.

Wenn nun λ_1, λ_2, λ_3 constant bleiben, c dagegen variirt, so sollen wir nach dem Obigen eine Schaar Kegel erhalten, welche vier Erzeugende, und zwar solche, die den imaginären Kreis schneiden, gemein haben. Die Gleichung dieser Kegel in Ebenen-Coordinaten hat dieselbe Form wie diejenige confocaler Kegel in Punkt-Coordinaten, und also kann $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ auf die Form:

$$\frac{F(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{\varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c) - \varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_1)}$$

gebracht werden. Der Nenner soll *nur* unter der Voraussetzung $c = \lambda_1$ verschwinden, und also muss $\varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ eine ganze und lineare Function der Grösse c sein***):

---

*) Wenn die confocalen Kugel-Complexe von Kugeln gebildet werden, deren Mittelpunkte auf confocalen Flächen zweiten Grades liegen, so sind die im Texte besprochenen confocalen Kegel Tangenten-Kegel der genannten Flächen.

**) Ueberdies gehört die Punkt-Kugel P dem linearen Complexe $H = 0$ an.

***) Es wäre auch denkbar, dass φ eine ganze und lineare Function eines folgenden Ausdrucks $\frac{a+c}{b+c}$ wäre, dabei vorausgesetzt, dass a und b nur von den Variabeln λ_1, λ_2, λ_3 abhängen. Dieser Fall wird leicht auf den im Texte besprochenen zurückgeführt.

$$\varphi = \psi_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) c + \psi_2 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3).$$

Bei Einsetzung dieses Werthes erhält $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ die folgende Form:

$$\frac{\Pi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{c - \lambda_1}.$$

Wenn nun unter den drei Functionen Π die eine gleich Null wird, so zerfallen alle dem betreffenden Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel in zwei ebene Büschel, deren Axen in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dieses tritt nur ein, wenn der Punkt λ auf einer unter den fünf Kugeln, die unserem Orthogonal-Systeme angehören, gelegen ist.

Wenn andererseits unter den Functionen Π die eine unendlich wird (oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwei zu gleicher Zeit verschwinden), so gehen alle elementaren Complex-Kegel in *dasselbe* doppeltzählende Ebenen-Büschel über. Dieses kann nur eintreffen, wenn der Punkt λ sich auf der dem Orthogonal-Systeme zugehörigen imaginären Developpablen befindet.

In dieser Weise lässt sich beweisen, dass $\Pi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ auf die folgende Form gebracht werden kann*):

$$\frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_3)},$$

dass also (1) sich folgendermassen schreiben lässt:

$$U(c) = \frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_3)} \cdot \frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_1}\right)^2}{\lambda_1 - c} + \frac{F(\lambda_2)}{\varphi(\lambda_3) - \varphi(\lambda_1)} \cdot \frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_2}\right)^2}{\lambda_2 - c} + \frac{F(\lambda_3)}{\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)} \cdot \frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\right)^2}{\lambda_3 - c} = 0.$$

Ich betrachte nun die einfach unendlich vielen gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen:

$$U(c_1) = 0, \quad U(c_2) = 0 \tag{2}$$

und die entsprechenden Durchschnitts-Curven mit einer gewählten Fläche λ_1. Diese Curven-Schaar wird bestimmt durch eine Differential-Gleichung zwischen λ_2 und λ_3, die aus (2) sich herleiten lässt, und zwar findet man, dass die Variabeln unmittelbar separirt werden können. Es werden aber die besprochenen Integralflächen *zweifach* von solchen Durchschnitts-Curven erzeugt, und also giebt die allgemeine Gleichung der Curven zugleich die Gleichung der zugehörigen Integralflächen.

Lässt man endlich c_2 variiren, c_1 dagegen constant bleiben, so erhält man ein vollständiges Integral der Differential-Gleichung $U(c_1)=0$,

---

*) Meine Betrachtungen schliessen nicht die Möglichkeit aus, dass $\Pi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ nur von λ_1 abhängt, worauf ich aber hier nicht näher eingehen will.

und also können wir behaupten, dass die *Bestimmung der Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades auf Quadratur eines algebraischen Differentials zurückgeführt werden kann.*

---

80. Im Anschluss zu dem Vorangehenden möchte ich hier anführen, dass ich durch ähnliche Betrachtungen den folgenden interessanten Satz gefunden habe:

Wenn zwei beliebige Linien-Complexe eines irreductiblen Systems jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen, so haben die Complexe dieselbe Singularitätenfläche.

Herr Klein theilt mir den folgenden einfachen Beweis dieses Satzes mit: Nach Voraussetzung müssen auch zwei consecutive Complexe des Systems ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben. Die beiden Schaaren von Haupttangenten einer solchen Fläche können, wie die Complexe, nur unendlich wenig verschieden sein, d. h. die Fläche ist eine Developpable. Nun besitzt aber ein Complex unter seinen Integralflächen keine anderen Developpablen, als die einfach unendlich vielen seiner singulären Linien. Der consecutive Complex hat also mit dem gegebenen dessen singuläre Linie gemein, und das ist für die Complexe mit gemeinsamer Singularitätenfläche charakteristisch.

Benutzt man den von Klein, Göttinger Nachr. 1871, No. 4 eingeführten Begriff der involutorischen Lage zweier Linien-Complexe, so gilt der folgende Satz:

Besitzen die zweien Linien-Complexen zugehörigen D_{11} einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen, so liegen die Complexe in Involution.

Mein anfänglich gegebener Satz folgt als Corollar aus diesem in Verbindung mit einem Theorem, welches mir Herr Klein mitgetheilt hat:

Liegen die Complexe eines irreductiblen Systems paarweise in Involution, so besitzen dieselben eine gemeinsame Singularitätenfläche.

§ 25.

Zusammenhang zwischen der Theorie zweier Flächen vierter Ordnung.

81. Unter den Flächen vierter Ordnung, giebt es zwei, zuerst von Herrn Kummer untersuchte, welche ich hier betrachten will: die mit 16 Knotenpunkten, f_1, und die mit einem Doppelkegelschnitt, F_4. Beide Flächen geben Anlass zu einer Gleichung sechszehnten Grades; die eine durch ihre Knotenpunkte, die andere durch die auf ihr gelegenen geraden Linien. Die letztere führte Herr Clebsch auf eine

schon von Herrn Kummer aufgestellte Gleichung fünften Grades zurück. (Borchardt's Journal Bd. 67.) Andererseits fand Herr Jordan, dass die erstere Gleichung auf eine solche vom sechsten Grade zurückkommt (Borchardt's Journal Bd. 70.). Es fand dies seine geometrische Begründung in den auf diese Fläche bezüglichen Untersuchungen des Herrn Klein (Matth. Ann. Bd. 2.). Derselbe fand ferner, als er sich im Herbste 1869 mit der eben von Herrn Nöther gegebenen Abbildung des linearen Complexes beschäftigte, dass jene Abbildung einen allgemeinen und einfachen Zusammenhang zwischen beiden Flächen darlegt, insbesondere die beiden Gleichungen sechszehnten Grades in Verbindung setzt (vergl. eine Note diese Ann. Bd. IV., p. 357.) Einige Monate später fand ich durch meine Imaginär-Theorie, unabhängig von den genannten Herren, dieselbe Abbildung wie auch den betreffenden Zusammenhang, worüber ich indess damals nichts veröffentlichte.

Nachdem ich im Sommer 1870 gefunden hatte, dass die Nöther'sche Abbildung sich als Grundlage einer weitergehenden Theorie betrachten liess, war es natürlich, dass ich zuerst meine Theorien auf die beiden genannten Flächen anwandte. In dieser Weise fand ich sogleich, dass die Darboux-Moutard'sche Bestimmung der Krümmungslinien auf derjenigen F_4, die den imaginären Kugel-Kreis enthält, die Haupttangenten-Curven auf der Kummer'schen Fläche f_4 ergiebt. Ich werde im Folgenden zeigen, wie sich mehrere andere, im Allgemeinen bekannte Theorien dieser Flächen durch die Nöther'sche Abbildung und meine darauf begründete Kugel-Abbildung in einander überführen lassen.

Eine jede auf F_4 gelegene Curve n^{ter} Ordnung schneidet den imaginären Kreis in n Punkten, und bildet sich also (§ 8., 26.) in r als eine Linienfläche n^{ter} Ordnung, die f_4 nach einer Curve $2n^{ter}$ Ordnung berührt, ab. Beispielsweise geben die 16 Geraden von F_4, von denen jede fünf der übrigen schneidet, 16 ebene Strahl-Büschel, die f_4 nach Kegelschnitten berühren, und hierbei hat jeder Büschel eine Gerade mit fünf anderen gemein (§ 7., 21.). Ferner gehen die auf F_4 gelegenen zehn Kreisschaaren über in zehn Hyperboloid-Schaaren, die f_4 nach Curven vierter Ordnung berühren u. s. w.*).

---

*) Die hier angedeutete Methode zur Discussion der Kummer'schen Fläche und einer zugehörigen Congruenz zweiter Ordnung und Classe gründet sich auf die Abbildung des linearen Complexes in einem Punktraume. Einfacher ist es, den Ausgangspunkt in der Abbildung desjenigen Complexes, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, zu nehmen. (Lie, Repr. der Imag., Akademie zu Christiania 1869, pg. 107, 122—130.)

Die allgemeinen Entwickelungen in N. 25. zeigen, dass die auf F_4 gelegenen Curven C, deren Länge gleich Null ist, sich als Curven c auf f_4 abbilden, deren Tangenten diese Fläche zweifach berühren. Nun hat einerseits Herr Darboux (nach einer mündlichen Mittheilung) gefunden, dass die Auffindung der Curven C sich auf Quadratur zurückführen lässt, andererseits hat Herr Klein dieselbe Bemerkung hinsichtlich derjenigen auf f_4 gelegenen Curven gemacht, deren Tangenten singuläre Linien eines zugehörigen Complexes zweiten Grades sind (vgl. Gött. Nachr. 1871, Nr. 1.). Setzt er insbesondere voraus, dass der Complex ein linearer ist, so findet er die Curven c, und offenbar ist diese letzte Bestimmung durch meine Abbildung mit derjenigen des Herrn Darboux äquivalent.

82. Die Herren Darboux und Moutard haben bekanntlich gefunden, dass eine F_4 auf fünf Weisen als vollständige Enveloppe von zweifach unendlich vielen Kugeln, die jedesmal eine Kugel S orthogonal schneiden, aufgefasst werden kann. Diese fünf Kugeln S schneiden einander paarweise orthogonal; ferner führt eine Transformation durch reciproke Radien hinsichtlich einer Kugel S jedesmal die F_4 in sich selbst über.

Andererseits hat Herr Kummer gezeigt, dass die Doppeltangenten einer f_4 sechs Congruenzen zweiter Ordnung und Classe bilden, und hierbei liegen die sechs entsprechenden linearen Complexe C nach Herrn Klein paarweise in Involution. Die Fläche transformirt sich in sich selbst einerseits durch eine jede reciproke Umformung hinsichtlich eines linearen Complexes C, andererseits durch die 15 reciproken Punkt-Transformationen, zu denen die eben besprochenen Transformationen sich paarweise zusammensetzen lassen. vgl. S. 37

Diese letzte Theorie geht, wenn $H = 0$ als ein Complex C gewählt wird, durch meine Kugel-Abbildung unmittelbar in die erste über.

83. Herrn Klein's Darstellung eines Systems confocaler Linien-Complexe mittelst seiner 6 Fundamental-Complexe: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_6 = 0$:

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{k_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 + \lambda} + \cdots \frac{x_6^2}{k_6 + \lambda} = 0,$$

wobei die Linien-Coordinaten einer Bedingungs-Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2 = 0$$

genügen, giebt eine elegante Form*) für die allgemeine Gleichung

*) Es ist mir nicht bekannt, dass diese Form veröffentlicht worden ist. Nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Darboux findet sich indessen dieselbe bereits in einem ungedruckten Memoire, welches er 1868 der Pariser Akademie eingereicht hat.

eines Darboux-Moutard'schen Orthogonal-Systems, die folgende nämlich:

$$(2) \qquad \frac{s_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{s_2^2}{k_2+\lambda}+\cdots\frac{s_5^2}{k_5+\lambda}=0.$$

Die fünf *Punkt-Coordinaten* $s_1, s_2 \ldots s_5$, zwischen denen eine Bedingungs-Gleichung:

$$s_1^2+s_2^2+\cdots s_5^2=0$$

stattfindet, bezeichnen die mit gewissen Coefficienten multiplicirten Potenzen eines Punktes hinsichtlich der fünf paarweise orthogonalen Kugeln S.

Herr Klein hat aus der Gleichung (1) geschlossen, dass die Geraden eines Complexes zweiten Grades sich in Gruppen zu 32 zusammenfassen lassen, und zwar in solcher Weise, dass eine jede unter den früher besprochenen Transformationen eine beliebige Gruppe in sich selbst überführt. Ebenso zeigt (2), dass die Punkte einer F_4 sich zu 16 zusammenordnen, dergestalt, dass eine jede Transformation durch reciproke Radien hinsichtlich einer Kugel S die Gruppe ungeändert lässt. Auf die Existenz dieser Punkt-Gruppen hat mich Herr Darboux aufmerksam gemacht*)

Man betrachte einen Linien-Complex, dessen Gleichung nur die Quadrate der Klein'schen Coordinaten $x_1 \ldots x_6$ enthält. Der Complex, wie auch die Singularitätenfläche, sind ihre eigenen reciproken Polaren hinsichtlich eines jeden der sechs Fundamental-Complexe. In Folge dessen ordnen die Doppeltangenten jener Fläche sich im Allgemeinen in sieben Congruenzen, unter denen sechs je einem Fundamental-Complexe gehören. Nach einem Satze von mir (§ 12.) findet man sechs algebraische Haupttangenten-Curven, die nach Herrn Klein zugleich Curven vierpunktiger Berührung sind. Diese Sätze übertragen sich sämmtlich auf Kugel-Geometrie**).

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, dass Herrn Moutard's Untersuchungen über Flächen, die von zweifach unendlich vielen Orthogonal-Kugeln einer Kugel umhüllt werden, durch meine Abbildung einem Studium von Linien-Congruenzen, die einem linearen Complexe angehören, entsprechen.

---

*) Bemerkenswerth ist auch, dass die Aufgaben: alle Special-Formen der Flächen F_4 und f_4 anzugeben, äquivalente Probleme sind. Die Untersuchungen des Herrn Korndörfer (Math. Ann. I. pg. 592, II. pg. 41) lassen sich also für die Theorie der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten verwerthen.

**) Sind F_1, F_2, F_3 rationale Functionen von x_1^2, x_2, x_3, x_4, x_5 und x_6, so definiren die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ eine Linienfläche, die ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich $x_1=0$ ist. In Folge dessen findet man (§ 12.) eine algebraische Haupttangenten-Curve auf derselben und darnach die übrigen durch Quadratur. Geht auch x_2 nur mit seinem Quadrate in den Gleichungen ein,

§ 26.

Zur Theorie des linearen Complexes. Ueber Herrn Klein's metrische Linien-Geometrie.

84. Im Raume r treten bei unserer Kugel-Abbildung ein linearer Complex $H = 0$, und eine Gerade desselben Const. $= 0$, als ausgezeichnetes Gebilde auf; andererseits ist der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis ein Fundamental-Gebilde in R, und zwar das einzige. Es folgt hieraus, dass die gewöhnliche metrische Geometrie, die sich ja überhaupt mit auf den genannten Kreis bezüglichen projectivischen Beziehungen beschäftigt, in eine Geometrie*) übergeht, dessen Gegenstand covariante Beziehungen hinsichtlich eines linearen Complexes und einer Geraden desselben sind. Entsprechende Bemerkungen können hinsichtlich einer jeden Abbildung gemacht werden, bei welcher Fundamental-Gebilde in zwei Räumen auftreten. Ohne auf das hiermit angedeutete geometrische Princip näher einzugehen, werde ich das Obengesagte durch einige Beispiele, unter denen insbesondere das letzte wichtig ist, erklären.

a. Es lässt sich die Aufgabe stellen, alle Gruppen linearer Transformationen anzugeben. Ich sage dabei, dass eine continuirliche oder discontinuirliche Schaar Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Combination einiger dieser Transformationen jedesmal mit einer Transformation der gegebenen Schaar äquivalent ist. Herr Jordan hat insbesondere alle Gruppen von *Bewegungen* bestimmt (Annali, ser. II. t. II.).

Erinnert man sich nun (§ 13., 36.), dass den Bewegungen des Raumes R, lineare Transformationen des anderen Raumes entsprechen und zwar solche, *bei denen einfach unendlich viele lineare Complexe, die sich nach einer gemeinsamen Geraden berühren, in sich übergeführt werden*, so sieht man, dass unsere Abbildung, auf die Jordan'sche Theorie angewandt, alle Gruppen unter den eben besprochenen linearen Transformationen ergiebt.

b. Die Flächen eines irreductiblen Orthogonal-Systems in R sind bekanntlich in eine imaginäre Developpable eingeschrieben; demzufolge

---

so ist die Linienfläche ihre eigene Polare, sowohl hinsichtlich $x_2 = 0$ wie hinsichtlich $x_1 = 0$. Alsdann findet man zuerst zwei algebraische Haupttangenten-Curven und darnach die übrigen durch *algebraische Operationen.*

*) *Bemerkenswerth ist, dass dem Winkel-Begriffe des Raumes R im anderen Raume ein Begriff entspricht, der sich nur auf den linearen Complex* ($H = 0$), *dagegen nicht auf die Gerade* (*Const.* $= 0$) *bezieht.* Der Beweis liegt darin, dass einer jeden Transformation des Raumes r, die den Complex $H = 0$ in sich überführt, eine Umformung von R entspricht, bei welcher alle Winkel ungeändert bleiben (§ 13., 36.).

bilden sie sich in r als Congruenzen C ab, deren Brennflächen*) einander nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve berühren. Der bekannte Satz, dass die Flächen eines Orthogonal-Systems einander nach Krümmungslinien schneiden, zeigt mit Berücksichtigung des Theorems in (§ 12., 33.), dass die gemeinsamen Geraden zweier Congruenzen C eine Linienfläche bilden, welche die beiden zugehörigen Brennflächen nach Haupttangenten-Curven berührt. Nun giebt es bekanntlich unbegrenzt viele Orthogonal-Systeme, und *also kann ein linearer Complex auf unbegrenzt vielen Weisen getheilt werden in Congruenzen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die zweien Congruenzen gemeinsame Linienfläche jedesmal die zugehörigen Brennflächen nach Haupttangenten-Curven berührt***).

85. Schon in der Einleitung habe ich hervorgehoben, dass ich, während ich mich mit den Ideen dieser Abhandlung beschäftigte, im lebhaften Verkehr mit Herrn Klein gewesen bin. Derselbe theilte meine Ueberzeugung, dass der von mir gefundene Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie, wie auch zwischen Haupttangenten-Curven und Krümmungslinien ein wesentlicher Gedanke sei. In Folge dessen entwickelte er denselben selbständig, und insbesondere beschäftigte er sich zu derselben Zeit wie ich mit solchen Linien-Systemen des linearen Complexes, die den Orthogonal-Systemen des gewöhnlichen Punkt-Raumes entsprechen. Er wurde hierdurch auf diejenigen Ideen geführt, die er in den Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 4. dargestellt hat, und welche er ausführlicher und in umgestalteter Form in der folgenden Abhandlung auseinandersetzen wird.

Der im Schlusse der vorangehenden Nummer aufgestellte Satz kann die Frage veranlassen, ob die besprochene Eigenschaft für den linearen Complex charakteristisch ist, oder ob dieselbe einem jeden Complexe zukommt.

Andererseits führt die von Herrn Klein gegebene Gleichungsform confocaler Complexe zweiten Grades in Verbindung mit den Theorien des Paragraphen 24. natürlich darauf, diese Complex-Schaar

---

*) Wenn das gegebene Orthogonal-System das Darboux-Moutard'sche ist, so sind die Brennflächen (§ 24., 79.) eine Schaar Kummer'scher Flächen vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten, die einander nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve achter Ordnung und Classe berühren, und sonst keinen Schnittpunkt haben. Es ist bemerkenswerth, dass wenn man unter diesen Flächen eine beliebige nimmt und alle zugehörigen confocalen Complexe zweiten Grades betrachtet, die im Texte besprochene Congruenz-Schaar sich immer als Durchschnitt dieser Complexe mit einem doppeltzählenden linearen Complex desselben Systems auffassen lässt.

**) In dieser Weise findet man beliebig viele algebraische Flächen mit algebraischen Haupttangenten-Curven.

als ein Analogon im Linien-Raume von den Orthogonal-Systemen des gewöhnlichen Punkt-Raumes aufzufassen. Es liegt hier zugleich nahe, eine Erweiterung des Dupin'schen Theorems und zwar in der folgenden Form zu vermuthen: die Linienfläche, welche dreien der Complexe gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der zweien dieser drei Complexe gemeinsamen Congruenz nach einer Haupttangenten-Curve. Ist dieser Satz bewiesen, so fragt es sich, ob noch mehrere Systeme von Linien-Complexen in dieser Beziehung stehen. Herr Klein hat nun gefunden*), dass diesen unbestimmten Speculationen, die sich auch mir dargeboten hatten, eine Realität entspricht. Beim Beweise benutzt er in seiner ersten Mittheilung zur Bestimmung der geraden Linie vier Coordinaten, welche mit den von mir in dieser Abhandlung und auch in früheren Arbeiten als Linien- oder Kugel-Coordinaten**) benutzten vier Grössen X, Y, Z, H identisch sind. Er knüpft daran die weitere Bemerkung, dass unter der Zugrundelegung dieser Coordinaten die Linien-Geometrie mit der metrischen Geometrie zwischen vier Variabeln identisch wird, insofern nämlich bei ihrer Zugrundelegung das Moment zweier Geraden sich darstellt wie die Entfernung zweier Punkte im Raume von vier Dimensionen und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Complexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen in diesem Raume.

Es ist dieses offenbar etwas Anderes als der schon früher von mir hervorgehobene Zusammenhang zwischen gewissen Theorien der Plücker'schen Linien-Geometrie und einigen Problemen der gewöhnlichen metrischen Geometrie.

Christiania, 15. Novbr. 1871.

Nachschrift. Nachträglich erfahre ich neue und wichtige Beziehungen zwischen meinen und Herrn Darboux's Arbeiten. Derselbe theilt mir nämlich mit, dass er alle Berührungs-Transformationen eines Raumes von n Dimensionen bestimmt habe, und dass er sich ferner mit der einem Curven-Complexe [und zugleich auch mit der einem Flächen-Complexe] zugehörigen partiellen Gleichung erster Ordnung beschäftigt habe, ohne indessen bis jetzt etwas darüber zu veröffentlichen. Es stehen diese Arbeiten des Herrn Darboux in Verbindung mit seinen fundamentalen Untersuchungen über die partiellen Differential-Gleichungen.

März 1872.

---

*) Göttinger Nachrichten, März 1871.

**) Ich muss hinzufügen, dass die Coordinaten X, Y, Z, H als ein Degenerationsfall der von Herrn Klein 1868 eingeführten 6 *homogenen* Linien-Coordinaten, zwischen denen eine Bedingungs-Gleichung von der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2 = 0$$

stattfindet, aufzufassen sind (§ 10., 30.).

Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.

Von Felix Klein in Göttingen.

In der vorstehenden Abhandlung hat Herr Lie unter Anderem eine fundamentale Analogie entwickelt, welche zwischen der Geometrie des linearen Complexes und der gewöhnlichen metrischen Geometrie besteht. Diese Analogie kommt darauf zurück, dass man den linearen Complex eindeutig auf den Punktraum abbilden kann*), wobei im linearen Complexe eine einzelne Linie, im Punktraume ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde auftritt. Denn die metrische Geometrie ist ja nichts anderes, als die Untersuchung der projectivischen Eigenschaften der räumlichen Gebilde unter Zugrundelegung eines ein für allemal gegebenen Kegelschnittes, des unendlich fernen imaginären Kreises. Die Geometrie des linearen Complexes ist durch die fragliche Abbildung also mit der metrischen Geometrie in Verbindung gesetzt, jedoch so, dass im linearen Complexe noch eine Linie willkürlich ausgezeichnet ist. — Der hierdurch aufgedeckte Zusammenhang zwischen zwei auf den ersten Blick sehr heterogenen Gebieten der Geometrie muss nach beiden Seiten hin von grosser Fruchtbarkeit sein. Es mag hier genügen, in diesem Betracht auf den reichen Inhalt der vorstehenden Abhandlung zu verweisen, insbesondere auf die dort gegebene Beziehung zwischen dem Probleme der Haupttangenten-Curven und der Krümmungs-Curven.

Anknüpfend an diese Untersuchungen von Herrn Lie, über die ich durch wiederholte ausführliche Mittheilungen desselben unterrichtet war, fand ich, dass in ganz gleicher Weise, wie die Geometrie des linearen Complexes mit der metrischen Geometrie des gewöhnlichen Raumes zusammenhängt, *ein Zusammenhang besteht zwischen dem Gesammtinhalte der Linien-Geometrie und der metrischen Geometrie des Raumes von vier Dimensionen.***) In diesem Betracht stellte ich ins-

*) Auf diese Abbildung ist zuerst durch Herrn Nöther aufmerksam gemacht worden: Zur Theorie algebraischer Functionen, Gött. Nachrichten. 1869.

**) Unter der metrischen Geometrie eines solchen Raumes ist wiederum die Untersuchung der projectivischen Eigenschaften seiner Gebilde unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Gebildes zu verstehen, welches dem Kegelschnitte der gewöhnlichen Geometrie entspricht. Bestimmt man, wie gewöhnlich bei metrischen Untersuchungen, das Raumelement (den Punkt) durch rechtwinklige Coordinaten, hier also durch vier Coordinaten x, y, z, t, so besteht das fragliche Gebilde aus denjenigen unendlich fernen Elementen, für die $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$.

besondere ein liniengeometrisches Theorem auf*), welches dem Dupin'schen Theorem der gewöhnlichen metrischen Geometrie nachgebildet war. Hieran habe ich weitere Ueberlegungen geknüpft, die darauf abzielen: einmal den gesammten Inhalt der metrischen Geometrie auf Liniengeometrie zu übertragen; andererseits die algebraischen Methoden, deren man sich in der Liniengeometrie mit Erfolg bedient, zur Behandlung metrischer Probleme zu verwerthen. Diese Betrachtungen — die übrigens mit den von Herrn Lie vorgetragenen in engster Beziehung stehen und aus ihnen erwachsen sind — sollen im Folgenden, wenn auch nur in allgemeinen Zügen, dargelegt werden. Hoffentlich genügt die hier gegebene Auseinandersetzung, um deutlich zu zeigen: dass auf dem hier eingeschlagenen Wege eine Weiterentwickelung der beiden in Betracht kommenden Disciplinen: der *Liniengeometrie* und der *metrischen Geometrie* gegeben ist.

In der Liniengeometrie pflegt man, wie bekannt, die Gerade durch 6 homogene Coordinaten p_{ik} zu definiren, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P \equiv p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0$$

geknüpft sind. Betrachtet man einen Augenblick die p_{ik} als unabhängige Veränderliche, so constituiren sie eine Mannigfaltigkeit, oder, wie man häufig sagt, einen Raum von 5 Dimensionen. Derselbe soll mit R_5 bezeichnet werden (überhaupt ein Raum von n Dimensionen mit R_n). Aus diesem Raume wird die von den Geraden gebildete Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch die vorstehende quadratische Gleichung ausgeschieden, in ähnlicher Weise, wie aus der Gesammtheit der Punkte des gewöhnlichen Raumes (R_3) durch eine quadratische Gleichung eine Fläche zweiten Grades ausgeschieden wird. Man wird so dazu geführt, *die Liniengeometrie in ähnlicher Weise analytisch zu behandeln, wie die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades.* Die hiermit angedeutete Auffassung soll in § 1. noch näher erörtert und begründet werden; sie liegt übrigens meinen sämmtlichen bisherigen Arbeiten über Liniengeometrie zu Grunde.

Es mag hier gleich eine Bezeichnung eingeführt werden, die im Folgenden nöthig wird. Den Raum von n Dimensionen bezeichneten wir bereits als R_n. Ein Gebilde nun, welches aus ihm durch μ Gleichungen ausgeschieden wird, welches also noch immer eine Mannigfaltigkeit von $n - \mu$ Dimensionen vorstellt, soll als $M_{n-\mu}$ bezeichnet sein. Dabei mögen rechts oben zugesetzte Indices den Grad der μ Gleichungen angeben, durch welche die $M_{n-\mu}$ bestimmt wird. — Die Gesammtheit der geraden Linien bildet bei dieser Bezeichnung eine $M_4^{(2)}$, die im Raume R_5 gelegen ist. In ähnlicher Weise bilden die

*) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 3.

Linien eines linearen Complexes eine $M_3^{(2)}$ des R_4, die Linien einer linearen Congruenz eine $M_2^{(2)}$ des R_3, endlich die Linien einer Regelschaar eine $M_1^{(2)}$ des R_2. Diese Bezeichnungsweise ist etwas abstract; sie ist aber im Folgenden nicht gut zu umgehen.

Der Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und metrischer Geometrie bei 4 Variabeln kommt nun auf eine eindeutige Abbildung der in R_5 gelegenen $M_4^{(2)}$ auf den R_4 hinaus. — Es ist bekannt, wie man eine im R_3 gelegene $M_2^{(2)}$, also etwa eine im gewöhnlichen Raume gelegene Fläche zweiten Grades, eindeutig auf den R_2, etwa die Ebene, abbilden kann. Dies geschieht, geometrisch ausgedrückt, durch das Verfahren der stereographischen Projection. Dabei treten in der Ebene zwei Fundamentalpunkte auf, die Bilder der durch den Projectionspunkt gehenden beiden Erzeugenden. Auf der Fläche zweiten Grades findet sich ein Fundamentalpunkt, der Projectionspunkt. Nun benutzt aber die metrische Geometrie in der Ebene als Fundamentalgebilde ein Punktepaar, die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Man wird desshalb sagen können: die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades und die metrische Geometrie in der Ebene entsprechen einander, sowie man auf der Fläche einen (willkürlichen) Punkt auszeichnet. — Bei der in Rede stehenden Abbildung einer $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n auf den R_{n-1} findet nun etwas ganz Aehnliches statt. Ein Element der $M_{n-1}^{(2)}$ (welches dem Projectionspunkte entspricht) wird ausgezeichnet. Dafür tritt im R_{n-1} ein Fundamentalgebilde auf, wie es auch die metrische Geometrie des R_{n-1} benutzt, nämlich eine $M_{n-3}^{(1,2)}$. Allgemein kann man also sagen:

*Die metrische Geometrie des R_{n-1} kann als stereographische Projection der Geometrie auf einer im R_n gelegenen $M_{n-1}^{(2)}$ aufgefasst werden.**)

Mit diesem Satze, der in § 2. vollständig begründet werden soll, ist der Zusammenhang der Liniengeometrie mit der metrischen Geometrie des R_4 vollständig gegeben. Ebenso natürlich der Zusammenhang zwischen der Geometrie des linearen Complexes und der metrischen Geometrie des R_3. Man könnte endlich in dem nämlichen Sinne die

*) Die metrische Geometrie der Ebene als stereographische Projection der Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades (insbesondere einer Kugel) anzusehen, ist ein Mittel, welches namentlich von Chasles gebraucht worden ist. Die im Texte angedeutete allgemeine Auffassung wird gelegentlich von Herrn Darboux in der Theorie der Orthogonalflächensysteme benutzt (Comptes Rendus t. LXIX. 1869, 2. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Wie mir Herr Darboux auf eine Anfrage meinerseits mittheilte, ist sie ein allgemeines Princip gewesen, welches ihn bei der Aufstellung seiner Theoreme über metrische Geometrie geleitet hat.

Geometrie der linearen Congruenz mit der metrischen Geometrie des R_2, die Geometrie der Regelschaar mit der metrischen Geometrie des R_1 in Verbindung setzen. Andererseits begründet der Satz diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1}, welche vorher bereits angedeutet wurde. Dieselbe soll ebenfalls in § 2. etwas weiter ausgeführt werden. Man wird bei ihr in erster Linie dazu geführt, zwischen solchen metrischen Eigenschaften des R_{n-1} zu unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n übertragen, eine besondere Beziehung zu dem bei der Abbildung benutzten Projectionspunkte impliciren, welche nicht. Letztere ergeben, wenn $n = 5$, allgemeine liniengeometrische Sätze; erstere solche, bei denen eine willkürliche Gerade fundamental auftritt.

Um wenigstens an einem Beispiele die Fruchtbarkeit dieser Uebertragungen zu zeigen, suche ich in § 3. das liniengeometrische Analogon der *Orthogonalsysteme* der metrischen Geometrie. Es sind dies Systeme von Linien-Complexen, welche ich als *Involutionssysteme* bezeichne. Ein Involutionssystem ist ein einfach unendliches System von Complexen, welche von einem Parameter im vierten Grade abhängen, so dass durch jede Gerade des Raumes vier Complexe des Systems hindurchgehen. Diese vier Complexe — und das constituirt eben den Charakter der in Rede stehenden Systeme — liegen paarweise mit Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution.*) Die involutorische Lage zweier Complexe entspricht dabei auf Seiten der Liniengeometrie der Orthogonalität zweier Flächen in der metrischen Geometrie. — Für Involutionssysteme von Complexen gilt dann ein Theorem, welches dem Dupin'schen Theoreme der gewöhnlichen metrischen Geometrie analog ist. Dasselbe ist, wie ich in § 4. des Weiteren auseinandersetze, insofern höchst fruchtbar, als es, sowie ein Involutionssystem gegeben ist, auf einer grossen Zahl von Flächen die Haupttangenten-Curven kennen lehrt. Insbesondere ist hier eingeschlossen die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten, wie sie sich aus den Untersuchungen von Herrn Lie und mir ergeben hat.**)

*) Als *involutorische Lage* zweier Complexe mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade bezeichne ich die folgende Beziehung. In jeder durch die Gerade hindurchgelegten Ebene befindet sich, jedem Complexe entsprechend, eine Complex-Curve, welche die gegebene Gerade berührt. Die beiden Berührungspunkte mögen als einander zugeordnet angesehen werden. Dreht sich nun die Ebene, so beschreiben die beiden Punkte collineare Punktreihen. Die Complexe heissen nun involutorisch gelegen, wenn die Beziehung der beiden Punktreihen die involutorische ist.

**) Vergl. eine gemeinsame Mittheilung in den Monatsberichten der Berliner Akademie. December 1870, sowie die in der vorstehenden Abhandlung enthaltenen bez. Auseinandersetzungen.

Ich will noch ausdrücklich auf einen Unterschied aufmerksam machen, der zwischen den hier vorgetragenen Dingen und einigen Capiteln der voraufgehenden Lie'schen Arbeit besteht und dabei zugleich auseinandersetzen, wie, anknüpfend an diesen Unterschied, Herr Lie eine neue in der metrischen Geometrie anzuwendende Transformation entwickelt hat.*) Vermöge der erwähnten Abbildung des linearen Complexes in den gewöhnlichen Punktraum setzt Herr Lie die Liniengeometrie in Verbindung mit der Geometrie, deren Element die *Kugel* des *gewöhnlichen* Raumes ist. Hier dagegen wird die Liniengeometrie auf die *Punkt*geometrie des Raumes *von vier Dimensionen* bezogen. Während die letztere Beziehung eindeutig ist, ist es die erstere nicht, jeder Linie entspricht allerdings nur eine Kugel, dagegen jeder Kugel ein Linienpaar. Da beide Abbildungen der Liniengeometrie metrisch interessante Dinge ergeben, so wird man, zur Behandlung metrischer Probleme, indem man die Betrachtung der Liniengeometrie als unwesentlich bei Seite lässt, die folgende Methode aufstellen können: Man beziehe den Punkt des Raumes von n Dimensionen auf die Kugel des Raumes von $n-1$ Dimensionen, in der Art, das jedem Punkte eine Kugel, jeder Kugel dagegen ein Punktepaar entspricht. Dies geschieht einfach, indem man die n Coordinaten des Punktes im R_n bez. die $n-1$ Mittelpunktscoordinaten und den Radius einer Kugel im R_{n-1} bedeuten lässt. Dies ist die von Lie aufgestellte Methode, welche die metrische Geometrie des R_n und des R_{n-1} in Verbindung setzt. Nicht zu verwechseln mit ihr ist ein von Herrn Darboux aufgestellter Process**), der ebenfalls die metrische Geometrie des R_n mit der des R_{n-1} verknüpft. Derselbe kommt im Wesentlichen darauf zurück: die metrische Geometrie des R_n durch sphärische Abbildung auf eine Kugel des R_n und dann von dieser durch stereographische Projection auf den R_{n-1} zu übertragen.

§ 1.

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5.

Diese Aussage findet in dem folgenden Verhalten der Linien-Coordinaten p_{ik} ihre eigentliche Begründung. Für die Coordinaten p_{ik} hat man:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Damit sich nun zwei Gerade, p und p', schneiden, muss sein:

*) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7.

**) Vergl. die bereits citirte Note: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. Comptes Rendus. LXIX. 1869.

$$\Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \cdot p'_{ik} = 0 .$$

In Folge dessen kann man den folgenden Satz aufstellen, den ich bereits gelegentlich mittheilte*):

Setzt man statt der Linien-Coordinaten p_{ik} beliebige lineare Functionen derselben, die nur der einen Bedingung genügen sollen, die Mannigfaltigkeit $M_4^{(2)}$:

$$P = 0$$

in sich überzuführen, so hat man eine collineare oder eine dualistische (reciproke) Umformung des Linienraumes. Andererseits erhält man auf diesem Wege alle solchen collinearen und reciproken Umformungen.

Was den ersten Theil dieses Satzes betrifft, so werden offenbar durch die in Rede stehenden Transformationen alle Geraden wieder in Gerade, sich schneidende Gerade in sich schneidende Geraden übergeführt. Der Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt gehen (sich also schneiden), entsprechen wiederum zweifach unendlich viele Gerade, die sich schneiden. Dabei bleibt die doppelte Möglichkeit: dass dieselben entweder wieder durch einen Punkt gehen oder dass sie die Gesammtheit der in einer Ebene verlaufenden Geraden vorstellen.**) Im ersten Falle hat man eine räumliche Transformation vor sich, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in einen Punkt überführt, und das ist ersichtlich eine collineare Umformung. Im zweiten Falle dagegen hat man eine räumliche Transformation, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in eine Ebene überführt. Es ist also eine dualistische Umformung.

Aber auch umgekehrt wird jede collineare und jede dualistische Umformung sich in Linien-Coordinaten in der vorgenannten Weise darstellen. Denn bei einer solchen Umformung werden die Punkt-Coordinaten durch lineare Functionen der neuen Punkt- oder Ebenen-Coordinaten ersetzt. In Folge dessen treten an Stelle der früheren Linien-Coordinaten p_{ik}, die gleichmässig als zweigliedrige Determinanten aus Punkt-Coordinaten oder aus Ebenen-Coordinaten dargestellt werden können, lineare Functionen derselben. Diese linearen Functionen haben auch die Eigenschaft, die $M_4^{(2)}$

$$P = 0$$

in sich selbst überzuführen, da ja bei ihnen gerade Linien gerade

*) Diese Annalen t. IV, 2. (Geometrisches über Resolventen.)

**) In ähnlicher Weise spalten sich überhaupt die linearen Transformationen, welche eine $M_{n-1}^{(2)}$ im R_n in sich überführen, falls n eine ungerade Zahl ist, in zwei Gruppen. Vergl. die Arbeit: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", § 16. (Diese Annalen t. IV, 4.)

Linien bleiben und sich also der durch die vorstehende Gleichung dargestellte Linienraum nicht ändert.

Hiermit ist der vorstehende Satz vollständig bewiesen. Dieser Satz giebt nun zu der folgenden Behandlung liniengeometrischer Probleme Veranlassung. Die neuere Geometrie untersucht alle räumlichen Gebilde, insonderheit also die Liniengebilde, nur insofern sie durch collineare oder dualistische Transformationen ungeändert bleiben, oder, wenn man will, sie führt alle anderen Eigenschaften auf Eigenschaften dieser Art zurück. Ganz denselben Umfang von Transformationen ziehen wir aber in Betracht, wenn wir den Linienraum als eine $M_4^{(2)}$ im R_5 betrachten und die projectivischen Eigenschaften des R_5 untersuchen, welche sich auf die $M_4^{(2)}$ beziehen. Die gesammte Liniengeometrie wird dadurch auf folgendes Problem zurückgeführt:

Man untersuche im projectivischen Sinne die im R_5 gelegene $M_4^{(2)}$. Sodann übertrage man die Resultate in die Sprache der Liniengeometrie.

Wie sich dies bei näherer Ausführung stellt, habe ich in aller Kürze in dem Aufsatze: „Die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinaten“ (diese Annalen t. II. 2.) auseinandergesetzt. Eine lineare Gleichung (oder sagen wir: die Ebene des R_5) stellt einen linearen Complex dar, der ein specieller wird, wenn die Ebene die $M_4^{(2)}$ berührt. Sind zwei Ebenen in Bezug auf die $M_4^{(2)}$ conjugirt, so heissen die Complexe in Involution. Berührt der Durchschnitt der beiden Ebenen die $M_4^{(2)}$, so berühren sich die beiden Complexe (die ihnen gemeinsame Congruenz hat dann zwei zusammenfallende Directricen).

Es soll hier nicht weiter in diese Dinge eingegangen werden; doch mag noch folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Liniengeometrie ist schliesslich nichts, als überhaupt projectivische Raumgeometrie. Der vorstehende Satz begründet also eine eigenthümliche Behandlung der Geometrie des R_3, bei der die linearen und dualistischen Transformationen des R_3 durch die linearen Transformationen eines höheren Raumes ersetzt werden, welche ein in diesem Raume gelegenes Gebilde ungeändert lassen. Man kann die Frage aufstellen, ob eine analoge Behandlung bei anderen Räumen, als dem R_3, möglich ist. Dies ist allerdings, aber nur bei besonderen Räumen, der Fall. So kann man den R_1 behandeln als Kegelschnitt im R_2 oder als Raumcurve dritter Ordnung im R_3 etc. Denn die gerade Linie R_1 lässt sich derart auf einen Kegelschnitt, bez. eine Raumcurve dritter Ordnung beziehen, dass ihren dreifach unendlich vielen linearen Transformationen die gleich zahlreichen linearen Transformationen entsprechen, welche einen Kegelschnitt in der Ebene, eine Raumcurve

der dritten Ordnung im Raume in sich überführen. Hierauf beruht das von Hesse vorgeschlagene Uebertragungsprincip (Borchardt's Journal t. 66. 1866). Hesse bespricht insbesondere die Beziehung zwischen der geraden Linie und dem Kegelschnitte der Ebene und zeigt, wie bei der Uebertragung die projectivische Geometrie der Ebene eine Geometrie der Punktepaare auf der Geraden ergiebt.*)

§ 2.

Zusammenhang der metrischen Geometrie bei $(n-1)$ Variabeln und der Geometrie auf einer $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n.

Sei eine $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n gegeben. Durch passende Wahl der homogenen Veränderlichen $x_1 \ldots\ldots x_{n+1}$ wird man deren Gleichung im Allgemeinen auf die Form bringen können:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$p = x_n + i x_{n+1}$$
$$q = x_n - i x_{n+1},$$

so kommt:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots x_{n-1}^2 + pq.$$

Von dieser Gleichungsform ausgehend, kann man die $M_{n-1}^{(2)}$ ohne Weiteres auf den R_{n-1} abbilden. Zu diesem Behufe hat man nur zu setzen, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 y_n \\ \varrho x_2 &= y_2 y_n \\ &\vdots \\ \varrho x_{n-1} &= y_{n-1} y_n \\ \varrho p &= y_n y_n \\ \varrho q &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots y_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Für $n=3$ sind dies die bekannten Formeln, welche die stereographische Projection einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene vorstellen.

Als Fundamentalgebilde treten bei dieser Abbildung auf:

1) Im R_{n-1} die $M_{n-3}^{(1,2)}$, welche durch die beiden Gleichungen vorgestellt wird:

---

*) Hiermit wieder kann man in Zusammenhang bringen, wenn man, wie die Herren Clebsch und Gordan, behufs der typischen Darstellung gerader binärer Formen gethan haben, die Punkte der Geraden durch drei homogene Coordinaten bestimmt, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades Statt hat; vergl. Clebsch: Theorie der binären Formen (Leipzig 1871). Neunter Abschnitt.

$$0 = y_n,$$
$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots y_{n-1}^2.$$

Jedem Elemente derselben entspricht nicht ein Element der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$, sondern eine einfach unendliche Zahl.

2) Auf der $M_{n-1}^{(2)}$ ein einzelnes Element (der Projectionspunkt):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots\ldots \quad x_{n-1} = 0, \quad p = 0.$$

Ihm entspricht die lineare Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen:

$$y_n = 0.$$

Nun wurde bereits bemerkt, dass die metrische Geometrie des R_{n-1} eben eine $M_{n-3}^{(1,2)}$ als fundamentales Gebilde benutzt. Durch unsere Abbildung wird also, wie behauptet wurde, die metrische Geometrie des R_{n-1} mit der Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n, unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Elementes, in Beziehung gesetzt.

Die Art dieser Beziehung wird durch den folgenden Satz dargelegt, der die Beziehung als eine wesentliche kennzeichnet:

Den linearen Transformationen des R_{n-1}, welche dessen fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ungeändert lassen, entsprechen diejenigen linearen Transformationen des R_n, welche die gegebene M_{n-1} und den auf ihr befindlichen (willkürlich gewählten) Projectionspunkt nicht ändern.

In der That, setzen wir statt $y_1 \ldots y_n$ lineare Functionen derselben, welche die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$:

$$0 = y_n$$
$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_{n-1}^2$$

nicht ändern, so ergeben die Formeln ohne Weiteres die Richtigkeit des Satzes.

Die ersteren Transformationen sind aber diejenigen, welche man in der metrischen Geometrie des R_{n-1} betrachtet; d. h. es sind diejenigen Umformungen, welche metrische Eigenschaften des R_{n-1} nicht ändern. Beispielsweise, ist $n = 4$, so ist der R_{n-1} der gewöhnliche Punktraum. Die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ist der unendlich ferne imaginäre Kreis. Die linearen Transformationen des Punktraumes, welche letzteren nicht ändern, sind diejenigen, die man als Bewegungen, als Aehnlichkeitstransformationen und als Transformationen durch Spiegelung bezeichnet. Bei diesen Transformationen bleiben aber alle metrischen Beziehungen räumlicher Figuren ungeändert. — Andererseits würde man den entsprechenden Cyclus linearer Transformationen der x in Betracht zu ziehen haben, wenn man nach denjenigen Eigenschaften von Gebilden des R_n fragt, welche sich auf die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ und den auf ihr befindlichen Projectionspunkt beziehen.

Man wird jetzt die Frage aufstellen können: Welche Transformationen des R_{n-1} entsprechen denn denjenigen linearen Transformationen des R_n, welche nur die gegebene $M^{(2)}_{n-1}$, nicht aber auch den Projectionspunkt selbst ungeändert lassen? Ehe wir diese Frage beantworten, wollen wir die benutzten Abbildungsformeln so umändern, dass auch formell der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Darstellung der metrischen Geometrie des R_n (wobei rechtwinklige Coordinaten gebraucht werden) hervortritt. Es genügt, zu diesem Zwecke $y_n = 1$ zu setzen und die dann absolut bestimmten $y_1 \ldots . y_{n-1}$ als rechtwinklige Coordinaten des R_{n-1} aufzufassen. $y_n = 0$ ist dann der Ort der unendlich fernen Elemente des R_{n-1} (die unendlich ferne Ebene). In $y_n = 0$ befindet sich die fundamentale $M^{(1,2)}_{n-3}$, die aus ihm durch die Gleichung:

$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots y_{n-1}^2$$

ausgeschieden wird. — Es sei nun gestattet, die $M^{(2)}_{n-2}$, welche durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$(y_1 - \alpha_1)^2 + (y_2 - \alpha_2)^2 + \cdots\cdots (y_{n-1} - \alpha_{n-1})^2 = r^2$$

nach Analogie mit der gewöhnlichen Raumgeometrie als eine *Kugel* des R_{n-1} zu bezeichnen. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ sind die Coordinaten ihres Mittelpunktes, r ist der Radius. Eine derartige Kugel ist das Bild eines ebenen Schnittes der im R_n gegebenen und auf den R_{n-1} projicirten $M^{(2)}_{n-1}$. Denn die Gleichung der Kugel ist die allgemeine lineare Gleichung zwischen den die gegebene $M^{(2)}_{n-1}$ darstellenden Abbildungsfunctionen. Unter den Kugeln finden sich insbesondere solche mit unendlich grossem Radius, d. h. Ebenen; sie sind das Bild solcher ebenen Schnitte der gegebenen $M^{(2)}_{n-1}$, welche durch den Projectionspunkt hindurchgehen.*)

Betrachten wir jetzt, wie sich die Abbildung der gegebenen $M^{(2)}_{n-1}$ ändert, wenn wir die $M^{(2)}_{n-1}$ durch lineare Transformationen des R_n in sich selbst überführen. Wir untersuchten bereits diejenigen unter diesen Transformationen, welche den Projectionspunkt nicht ändern. Ihnen entsprechen die Bewegungen und die Aehnlichkeitstransformationen des R_{n-1}. Alle anderen Transformationen setzen sich aber augenscheinlich aus Transformationen dieser besonderen Art und solchen Transformationen zusammen, welche einer Verlegung des Projectionspunktes auf der gegebenen $M^{(2)}_{n-1}$ entsprechen. Vertauschen wir aber den bisher benutzten Projectionspunkt:

*) Man versinnliche sich dies an der gewöhnlichen stereographischen Projection einer F_2. Jeder ebene Schnitt bildet sich als Kreis ab; insbesondere als Gerade, wenn er den Projectionspunkt enthält.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots . \; x_{n-1} = 0, \quad p = 0$$

mit einem anderen, für den wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Punkt:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots .. \; x_{n-1} = 0, \quad q = 0$$

nehmen wollen, so kommt dies darauf hinaus, im R_{n-1} die Grössen

$$y_1, \quad y_2, \ldots \ldots . \; y_{n-1}$$

mit den folgenden

$$\frac{y_1}{\varrho^2}, \quad \frac{y_2}{\varrho^2}, \ldots \ldots . \; \frac{y_{n-1}}{\varrho^2}$$

zu vertauschen, wo ϱ^2 den Ausdruck bezeichnet:

$$\varrho^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots \cdot y_{n-1}^2.$$

Eine derartige Transformation soll, nach Analogie mit der entsprechenden Transformation bei zwei und drei Variabeln, eine Transformation *durch reciproke Radii vectores* heissen. Wir können jetzt den Satz aussprechen:

Der Gesammtheit der linearen Transformationen des R_n, welche die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ in sich überführen, entspricht im R_{n-1} ein Transformationscyclus, der sich aus dessen Bewegungen, den Aehnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzt.

Hier nun knüpft diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1} an, von der in der Einleitung die Rede war. Zunächst wird man den Gesammtinhalt der metrischen Geometrie in zwei Theile sondern. Man wird solche Beziehungen unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ übertragen, den gewählten Projectionspunkt impliciren, und solche, bei denen dieses nicht der Fall ist. Die letzteren sind, wie man jetzt sieht, alle diejenigen, welche bei Umformung durch reciproke Radien ungeändert bleiben. Zu ihrer Behandlung muss es vortheilhaft sein, den R_{n-1} auch algebraisch als eine $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n zu behandeln. Das heisst: man wird bei ihrer Behandlung das Element des R_{n-1} nicht durch $n-1$ absolute, sondern durch $n+1$ homogene Coordinaten bestimmen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades besteht. (Da dieselben, gleich Null gesetzt, ebene Schnitte der $M_{n-1}^{(2)}$ vorstellen, so repräsentiren sie im R_{n-1} Kugeln.)

Man bestimme also z. B. den Punkt des gewöhnlichen Raumes nicht durch drei absolute Coordinaten, sondern durch fünf homogene:

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad s_5,$$

die, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen. Geometrisch kommt dies darauf hinaus, den Punkt durch die relativen Werthe der mit gewissen Constanten multiplicirten Potenzen desselben in Bezug auf fünf ge-

gebene Kugeln festzulegen. Zwischen den fünf s besteht eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$\Omega = 0.$$

In der Discussion dieser Gleichung ist in demselben Sinne der gesammte Theil der metrischen Raumgeometrie vorhanden, der durch reciproke Radien ungeändert bleibt, wie sich die gesammte Liniengeometrie an die Discussion der entsprechenden Gleichung $P = 0$ anknüpft. Dass diese Behandlung metrischer Probleme von grossem Vortheile sein kann, mag hier nur an einem Beispiele erörtert werden. Auf dieses Beispiel ist Herr Lie bei dem Studium seiner Abbildung des linearen Complexes geführt worden, indem er liniengeometrische Betrachtungen, die ich in einer früheren Abhandlung*) gegeben hatte, auf die entsprechenden metrischen Dinge übertrug. Andererseits ist dieses Beispiel eben für mich Veranlassung gewesen, die allgemeineren hier vorgetragenen Ueberlegungen anzustellen. Man bestimme nämlich den Punkt des Raumes durch fünf Coordinaten $s_1 \ldots . s_5$, welche, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen, die sich orthogonal schneiden. Dann hat Ω die Gestalt:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 = 0.$$

Schreibt man nun die Gleichung:

$$\frac{s_1^2}{k_1 + \lambda} + \frac{s_2^2}{k_2 + \lambda} + \cdots \cdot \frac{s_5^2}{k_5 + \lambda} = 0,$$

wo λ ein Parameter, so hat man ohne Weiteres das Orthogonalflächensystem vor sich, welches von den Herren Darboux und Moutard gefunden wurde, und das aus Flächen vierter Ordnung gebildet ist, die den imaginären Kreis doppelt enthalten.**) — Diese Form entspricht, bis auf die Zahl der Variabeln, genau der Gestalt, die ich l. c. der Gleichung der Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche gegeben habe; es findet also auch dieselbe Art der Discussion auf sie Anwendung, wie dies Herr Lie in der vorstehenden Abhandlung ausführt.

Aber auch für die Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n ist die Verbindung, in welche sie hier mit der metrischen Geometrie gebracht wird, nicht ohne Wichtigkeit. Ich will hier unter vielen ähnlichen Betrachtungen nur eine hervorheben, die im Folgenden für Liniengeometrie

*) Math. Annalen t. 2. Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades.

**) cf. Lie. Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7., oder die vorstehende Abhandlung. — Auf dieselbe Gleichungsform war Herr Darboux bereits früher geführt worden. Er hat dieselbe in einer Abhandlung entwickelt, welche er 1868 der Akademie zu Paris eingereicht hat, die aber noch nicht veröffentlicht ist. Vergl. eine neuere Note in den Comptes Rendus. Sept. 1871., wo Herr Darboux einige in seiner gen. Abhandlung enthaltene Resultate anführt.

verwandt werden soll. Die ∞^{n-2} verschiedenen Fortschreitungsrichtungen, welche von einem Elemente des metrischen Raumes R_{n-1} zu benachbarten Elementen führen, bilden mit einander *Winkel*, z. B. können zwei solche Fortschreitungsrichtungen auf einander senkrecht stehen. Diese Winkel bleiben, wie bekannt, bei Umformungen durch reciproke Radien ungeändert. Man wird daher, wenn im R_n eine $M_{n-1}^{(2)}$ gegeben ist, auch von Winkeln reden können, welche die Fortschreitungsrichtungen von einem Elemente der $M_{n-1}^{(2)}$ zu benachbarten Elementen der $M_{n-1}^{(2)}$ bilden. Bei der Bestimmung dieser Winkel kommen nur die projectivischen Eigenschaften der $M_{n-1}^{(2)}$ selbst, nicht etwa ausserhalb im R_n gelegene fundamentale Gebilde in Betracht. Man übersieht dies deutlich, wenn man $n = 3$ nimmt, die $M_{n-1}^{(2)}$ also eine Fläche zweiten Grades bedeuten lässt. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Erzeugende hindurch; auf sie beziehen sich, als fundamentales Geradenpaar*), die zwischen den Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Punkten bestehenden Winkel. Insbesondere wird man zwei Fortschreitungsrichtungen zu einander senkrecht nennen, wenn sie harmonisch zu den beiden Erzeugenden liegen. Der analytische Ausdruck hierfür ist offenbar dieser. Sei $\Omega = 0$ die Fläche zweiten Grades. So bilden wir den Ausdruck:

$$2\,\Omega_{xy} = \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\cdot y_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\cdot y_2 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\cdot y_3 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_4}\cdot y_4\,.$$

Setzen wir in ihn für x_1, x_2, x_3, x_4 bez. dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, für y_1, y_2, y_3, y_4 bez. $d'x_1, d'x_2, d'x_3, d'x_4$, so bedeutet das Verschwinden des Ausdrucks, dass die beiden Fortschreitungsrichtungen in dem genannten Sinne auf einander senkrecht stehen.**) Die entsprechende Formel wird auch bei n Dimensionen gültig bleiben und soll im folgenden Paragraphen für Liniengeometrie verwandt werden.

---

*) Vergl. „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie". Diese Annalen. t. IV, 4. § 2. 3.

**) Allgemein wird der fragliche Winkel durch den folgenden Ausdruck gegeben sein. Sei Ω_{xy} der im Texte aufgestellte Ausdruck; Ω_{xx} und Ω_{yy} bedeute die Gleichung Ω bez. mit den x oder den y geschrieben. So ist der gesuchte Winkel

$$= \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{yy}}}\,,$$

wo statt x und y bez. dx und $d'x$ einzutragen ist.

Hier ist ersichtlich, wie diese Winkelbestimmung mit der allgemeinen von Cayley aufgestellten projectivischen Massbestimmung zusammenhängt, die eine F_2 als fundamentales Gebilde benutzt. (Phil. Transactions. t. 149. A sixth Memoir upon Quantics. Vergl. auch des Verf.: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" l. c.) Indess soll dieser Zusammenhang, der auch bei beliebig vielen Dimensionen gilt, hier nicht weiter verfolgt werden.

§ 3.

Uebertragung der Lehre von den Krümmungs-Curven und den Orthogonalsystemen auf Liniengeometrie.

Die Lehre von den Krümmungs-Curven und den Orthogonalsystemen constituirt einen Theil der metrischen Geometrie, welcher durch reciproke Radien ungeändert bleibt. Es soll jetzt — als ein Beispiel für solche Uebertragungen — das Entsprechende bei der Liniengeometrie aufgesucht werden. Zu diesem Zwecke mag die gewöhnliche Theorie zunächst so formulirt werden, dass ihre Unabhängigkeit von der Transformation durch reciproke Radien in Evidenz tritt.

Sei im gewöhnlichen Raume R_3 eine Fläche gegeben. Dieselbe wird in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt. Unter denselben giebt es nun jedesmal zwei ausgezeichnete, die auch noch in einem benachbarten Punkte berühren, die sogenannten *Hauptkugeln.* An ihre Existenz knüpft sich unmittelbar die Definition der Krümmungs-Curven. Man erhält eine Krümmungs-Curve, wenn man vom gewählten Punkte zu dem benachbarten Punkte fortschreitet, in welchem eine der beiden Hauptkugeln berührt. Krümmungs-Curven sind also solche auf einer Fläche verlaufende Curven, in deren consecutiven Punkten die Fläche von derselben Kugel berührt wird.*) Durch jeden Punkt gehen zwei Krümmungs-Curven; dieselben stehen auf einander senkrecht.

Gehen wir nun zum metrischen Raume von vier oder gleich von $(n - 1)$ Dimensionen. Eine Fläche desselben, d. h. eine Mannigfaltigkeit, die durch eine Gleichung aus ihm ausgeschieden wird, wird wieder in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt (unter einer Kugel, wie oben, eine besondere $M_{n-2}^{(2)}$ verstanden). Unter denselben finden sich $(n - 2)$ stationär berührende, d. h. solche, die noch in einem benachbarten Elemente berühren. Man wird jetzt von dem beliebig gewählten Punkte zu einem der benachbarten Berührungspunkte fortschreiten können und so weiter fort. Man erhält dann, einer Krümmungs-Curve im R_3 entsprechend, eine einfach unendliche auf der Fläche gelegene Mannigfaltigkeit, welche die Eigenschaft hat, *dass die gegebene Fläche in je zwei consecutiven Punkten derselben von der*

*) Die gewöhnliche Definition der Krümmungs-Curven, dass sich die Flächen-Normalen in consecutiven Punkten einer Krümmungs-Curve schneiden, ist eine Folge der hier vorgetragenen. Sie geht durch Anwendung reciproker Radien in eine allgemeinere über, in welcher das (zufällig gewählte) Inversionscentrum mit auftritt; desshalb ziehen wir die Definition, wie sie im Texte gegeben ist, vor.

nämlichen Kugel berührt wird. Solcher Mannigfaltigkeiten*) gehen durch jeden Punkt der Fläche $n-2$; ihre Fortschreitungsrichtungen stehen auf einander senkrecht.

Gehen wir jetzt zur Liniengeometrie über. Wir haben dann n gleich 5 zu setzen. An Stelle der Fläche des R_4 tritt hier der Linien-Complex. Statt von Punkten der Fläche sprechen wir von Linien des Complexes; statt von Kugeln des R_4 von linearen Complexen (den ebenen Schnitten der in R_5 gelegenen $M_4^{(2)}$, die den Linienraum vorstellt). So erhalten wir das Folgende.

Sei ein Linien-Complex gegeben. Derselbe wird in einer (beliebig gewählten) seiner Geraden von einfach unendlich vielen linearen Complexen berührt, den von Plücker sogenannten linearen Tangential-Complexen. Unter ihnen giebt es drei ausgezeichnete, welche auch noch in einer benachbarten Geraden berühren. Schreitet man von der angenommenen Geraden zu einer dieser benachbarten und von da weiter in gleichem Sinne fort, so beschreibt man eine dem Complexe angehörige Linienfläche — sie soll im Folgenden *eine Hauptfläche des Complexes* heissen — welche die Eigenschaft hat, dass der Complex in je zwei consecutiven Erzeugenden derselben von dem nämlichen linearen Complexe berührt wird. Durch jede Gerade des Complexes gehen drei Hauptflächen hindurch; ihre Fortschreitungsrichtungen sind, in übertragenem Sinne, zu einander senkrecht.

Wir haben jetzt noch zu erörtern, welchen metrischen Sinn dieses Senkrecht-Stehen besitzt. Da unter Zugrundelegung gewöhnlicher Linien-Coordinaten die für sie geltende Bedingungsgleichung die Form hat:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

so werden nach § 2. zwei Fortschreitungsrichtungen dp und $d'p$ zu einander senkrecht genannt werden müssen, wenn:

$$\begin{aligned} 0 = dp_{12}\,d'p_{34} + dp_{13}\,d'p_{42} + dp_{14}\,d'p_{23} \\ + d'p_{12}\,dp_{34} + d'p_{13}\,dp_{42} + d'p_{14}\,dp_{23}. \end{aligned}$$

Dann aber besteht zwischen der gegebenen Geraden p und ihren beiden benachbarten, $p + dp$ und $p + d'p$, eine Beziehung, die ich als *involutorische Lage der beiden benachbarten Geraden* bezeichne**), und die folgenden geometrischen Inhalt hat.

*) Man kann sie wieder dadurch definiren, dass sich die in ihren consecutiven Punkten errichteten Flächennormalen schneiden. — Die Krümmungstheorie eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen ist in neuerer Zeit Gegenstand wiederholter Darstellungen gewesen. Man geht dabei meist von der letztgenannten Definition aus.

**) Als *Winkel* zweier benachbarter Geraden würde man bezeichnen können

$$\text{arc}\cdot\cos\cdot\frac{dp_{12}\,d'p_{34} + d'p_{12}\,dp_{34} + \cdots\cdots}{2\sqrt{dp_{12}\,dp_{34} + \cdots\cdot}\cdot\sqrt{d'p_{12}\,d'p_{34} + \cdots\cdot}}.$$

Eine benachbarte Gerade $p + dp$ ordnet jedesmal die Ebenen, welche durch p gehen, den auf p befindlichen Punkten projectivisch zu. Jede durch p gehende Ebene schneidet nämlich $p + dp$ in einem Punkte, der beim Gränzübergange auf p selbst rückt. Man übersieht dies deutlich, wenn man p und $p + dp$ als consecutive Erzeugende einer Linienfläche betrachtet. Jeder durch p hindurchgehenden Ebene entspricht dann ein auf p gelegener und durch $p + dp$ bestimmter Punkt: der Berührungspunkt mit der Fläche.

Sind nun zwei benachbarte Gerade $p + dp$, $p + d'p$ gegeben, so betrachte man jedesmal diejenigen beiden Punkte als entsprechend, die einer durch p gelegten Ebene bezüglich durch die beiden benachbarten Geraden zugeordnet werden. So erhält man auf p zwei collinear auf einander bezogene Punktreihen.

Die beiden benachbarten Geraden heissen nun involutorisch gelegen, wenn die beiden Punktreihen eine Involution bilden. [Vergl. die ganz analoge Definition von der involutorischen Lage zweier Complexe in der Einleitung.*)]

Gehen wir jetzt noch einmal zu dem metrischen Raume R_3 zurück und betrachten in demselben Orthogonalsysteme. Dies sind einfach unendlich viele Flächen, von denen durch jeden Punkt des Raumes drei hindurchgehen. Dieselben schneiden einander senkrecht. Für solche Orthogonalflächensysteme gilt der Dupin'sche Satz: *Je zwei Flächen des Systems schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungs-Curve.*

Aehnliche Flächensysteme kann man im R_{n-1} betrachten; für sie gilt ein Satz, der dem Dupin'schen entspricht. Diese Flächensysteme sind wieder einfach unendlich, durch jeden Punkt des R_{n-1} gehen $n - 1$ Flächen. Dieselben schneiden sich gegenseitig senkrecht. Für diese Systeme gilt dann der Satz: *Je $n - 2$ Flächen schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungs-Curve*, unter Krümmungs-Curven die eben betrachteten einfach unendlichen Mannigfaltigkeiten verstanden.

Im Linienraume werden wir uns den Begriff der *Involutionssysteme von Complexen* zu bilden haben. Dies sind einfach unendliche Complexsysteme. Jede Gerade des Raumes gehört vieren der Complexe

---

*) Man sieht ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: Diejenigen Geraden, welche einem Linien-Complexe in der Nähe einer seiner Geraden p angehören, liegen zu einer bestimmten p benachbarten Linie, die im Allgemeinen nicht selbst dem Complexe angehört, in Involution. Und umgekehrt gehören alle solche benachbarten Geraden dem Complexe an. — Zwei Complexe heissen nun in Bezug auf eine gemeinsame Gerade p in Involution, wenn die benachbarten Geraden $p + dp$, $p + d'p$ involutorisch liegen, die sie bez. in dem hier auseinandergesetzten Sinne der Geraden p zuordnen.

an, und zwar liegen die vier Complexe, denen eine Gerade angehört, jedesmal paarweise mit Bezug auf diese Gerade in Involution.

Für diese Complexinvolutionssysteme gilt dann wieder ein Satz, der dem Dupin'schen entspricht: *Je drei Complexe schneiden sich nach einer gemeinschaftlichen Hauptfläche.*

Es ist bekannt, wie für irreductibele Orthogonalsysteme noch andere allgemeine Sätze aufgestellt werden können. So zeigte Herr Kummer, dass die Curven eines irreductibelen Orthogonal-Curvensystems nothwendig confocal sind; Herr Darboux*) dehnte diesen Satz auf Orthogonalflächensysteme im R_3 aus und fügte weitere, erst im R_3 auftretende, Eigenschaften hinzu. Es ist ersichtiich, dass analoge Eigenschaften für die irreductibeln Orthogonalsysteme in beliebigen Räumen, wie auch im Linienraume für irreductibele Involutionssysteme existiren. Ich gehe hier auf dieselben nicht ein; ich bemerke nur, dass dem Satze von der Confocalität der orthogonalen Flächen der liniengeometrische Satz entspricht: *Complexe eines irreductibeln Involutionssystems haben eine gemeinsame Singularitätenfläche.***)

Das einfachste Beispiel eines irreductibelen Involutionssystems geben denn auch die einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche. Man kann für dieselben, wie ich in der schon genannten Arbeit: „Zur Theorie etc.“ (diese Annalen II. 2.) gezeigt habe, die folgende algebraische Darstellung anwenden. Seien $x_1 \ldots x_6$ homogene Functionen der p_{ik}, für die

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2 = 0.$$

So sind die Complexe dargestellt durch:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \cdots \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0,$$

wo λ einen Parameter bezeichnet. In der That kommt der Parameter λ vermöge der Relation $\Sigma x^2 = 0$ im vierten Grade vor. Jede Gerade des Raumes gehört also vier Complexen des Systems an. Je zwei Complexe $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ liegen aber auch in Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution. Die Bedingung dafür, dass zwei Complexe

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade in Involution sind, ist nämlich bei der gewählten Coordinatenbestimmung:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = 0 \left\{\text{vermöge } \varphi = 0,\ \psi = 0\right\}.$$

*) Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. t. II. 1861.

**) Bei Plücker ist die Singularitätenfläche nur erst für Complexe zweiten Grades definirt. Diese Lücke ist durch Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift: „Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden“, Giessen 1870, ausgefüllt worden.

Dieser Ausdruck verschwindet aber immer, wenn φ, ψ zwei Complexe des hier betrachteten Systems sind. Denn derselbe wird gleich

$$4\left(\frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}+\frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}+\cdots\cdots\frac{x_6^2}{(k_6-\lambda_1)(k_6-\lambda_2)}\right)$$

und das ist durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\varphi-\psi),$$

verschwindet also mit φ und ψ.

Je drei Complexe des Systems haben als Complexe des zweiten Grades Linienflächen des sechszehnten Grades gemein; *die Hauptflächen der Complexe zweiten Grades sind also vom sechszehnten Grade.* Ich gehe nicht näher auf die Discussion dieser Flächen ein, die, wenn man die Complexe specialisirt, eine grosse Zahl besonderer Flächen unter sich begreifen.

§ 4.

Weitere Betrachtungen über die Hauptflächen der Complexe.

In diesem letzten Paragraphen mögen wir noch weitere Eigenschaften der Hauptflächen von Complexen, der Involutionssysteme u. s. w. entwickeln, und zwar an der Hand rein liniengeometrischer Betrachtungen. Dieselben übertragen sich natürlich wieder auf die metrische Geometrie des R_4, was aber nicht weiter verfolgt werden soll.

Herr Lie hat den merkwürdigen Satz gefunden (der bei ihm in anderweitigem Zusammenhange steht), *dass man auf jeder Linienfläche, die einem linearen Complexe angehört, eine Haupttangenten-Curve kennt.* Es giebt nämlich auf jeder Erzeugenden der Linienfläche zwei Punkte, deren Tangentialebene gleichzeitig die ihnen im linearen Complexe entsprechende Ebene ist. Die Gesammtheit dieser Punkte bilden die in Rede stehende Haupttangenten-Curve.

Den Beweis kann man einfach so stellen. Alle Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören dem Complexe an. Die Punkte bilden daher eine Curve, deren Tangenten dem Complexe angehören, eine Complex-Curve. Eine Complex-Curve hat aber die Eigenschaft, in jedem ihrer Punkte die im Complexe entsprechende Ebene zur Osculationsebene zu besitzen. Andererseits ist diese Ebene jedesmal nach Voraussetzung Tangentialebene der Fläche. Die Curve ist also eine Haupttangenten-Curve.

Wenn nun eine Linienfläche als irgend einem Complexe angehörig gegeben ist, so kann man auf ihr immer in ähnlicher Weise eine Curve bestimmen; nur ist sie dann im Allgemeinen keine Haupttangenten-Curve. Man suche nämlich auf jeder Erzeugenden diejenigen beiden Punkte, in denen die Fläche vom Complexkegel berührt wird. Die Reihenfolge dieser Punktepaare constituirt die fragliche Curve.

Ist nun aber die Linienfläche insbesondere eine Hauptfläche des gegebenen Complexes, *so ist die so construirte Curve eine Haupttangenten-Curve derselben.**)

Der Beweis ergiebt sich vermöge des Lie'schen Satzes unmittelbar aus der Definition der Hauptfläche. Der gegebene Complex wird in je zwei consecutiven Erzeugenden von dem nämlichen linearen Complexe berührt. Der betreffende lineare Complex enthält also drei consecutive Erzeugende der Linienfläche und bestimmt auf den beiden ersten derselben die nämlichen beiden Punktepaare, wie der gegebene Complex selbst.

Nun kann man den Lie'schen Satz auch so formuliren. Enthält ein linearer Complex drei consecutive Erzeugende einer Linienfläche, so bestimmt er auf den beiden ersten Punktepaare, die derselben Haupttangenten-Curve angehören. Hiermit ist der Beweis unseres Satzes gegeben.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung eines Involutionssystems. Eine einzelne Gerade p gehört vieren der Complexe an, die mit a, b, c, d bezeichnet sein mögen. Dieselben liegen paarweise mit einander in Involution. In Folge dessen hat man zunächst die folgenden Sätze, wegen deren Beweis ich auf die Arbeit: „Zur Theorie etc.“ (diese Annalen II, 2.) verweise.**)

1) Die Linienfläche, welche dreien der Complexe, etwa a, b, c, angehört, wird in allen Punkten von p von dem betreffenden Complexkegel d berührt.

2) Die Linie p berührt die Brennfläche der Congruenz zweier Complexe a, b in den nämlichen beiden Punkten, in denen sie die Brennfläche der Congruenz der beiden anderen Complexe c, d berührt.

3) Die drei in dieser Weise auf der Geraden entstehenden Punktepaare (ab, cd), (ac, bd), (ad, bc) sind zu einander harmonisch.***)

Betrachten wir jetzt eine Hauptfläche, die dreien der Complexe, etwa a, b, c, gemeinsam ist. Auf ihr kennt man, jedem der drei Complexe entsprechend, eine Haupttangenten-Curve, welche jede Erzeugende zweimal schneidet. Nun gilt aber für Haupttangenten-Curven der Linienflächen der von Herrn Paul Serret angegebene Satz: dass die Erzeugenden der Linienfläche von den Haupttangenten-Curven

*) Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

**) Dieselben sind dort nur für lineare Complexe bewiesen. Sie gelten also auch für die linearen Tangential-Complexe der hier gegebenen Complexe und hiermit für die letzteren selbst.

***) Hieran knüpft sich der weitere Satz: Legt man durch p eine Ebene, so enthält dieselbe, a, b, c, d entsprechend, je eine Complex-Curve. Die vier Berührungspunkte der vier Curven mit p bilden eine viergliedrige Punktgruppe, deren Covariante sechsten Grades durch die drei Punktepaare des Textes dargestellt wird.

projectivisch getheilt werden. Hieraus wird man einmal schliessen, dass die sechs Punkte, in denen jede Erzeugende von den drei Haupttangenten-Curven a, b, c geschnitten wird, sechs festen Elementen projectivisch sind. Dies ist, wie vorstehend [Satz 3)] angegeben, in der That der Fall. Andererseits wird man folgern, *dass man auf der fraglichen Hauptfläche alle Haupttangenten-Curven durch rein algebraische Processe bestimmen kann.* Denn man erhält alle Haupttangenten-Curven, wenn man sich einen Punkt auf der Fläche so bewegen lässt, dass er jedesmal auf allen Erzeugenden mit dreien der sechs Punkte a, b, c (und also mit allen) ein festes Doppelverhältniss bildet, und hierzu sind nur algebraische Operationen nothwendig.

Die beiden Punkte, in denen die Haupttangenten-Curve a eine Erzeugende, etwa p, trifft, sind, behaupte ich jetzt, die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche der b und c gemeinsamen Congruenz. Denn in diesen Punkten berührt der Complexkegel a die Fläche, also auch, nach Satz 1), den Complexkegel d. Desshalb sind diese Punkte die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche ad und also auch, nach Satz 2), mit der Brennfläche bc, was zu beweisen war. Man hat also den Satz:

Die Hauptfläche abc berührt die Brennfläche bc nach der Haupttangenten-Curve a, die Brennfläche ca nach der Curve b, die Brennfläche ab nach der Curve c.

Hieraus wird man weiter schliessen:

Dass man auch auf den Brennflächen der Congruenzen je zweier Complexe die Haupttangenten-Curven kennt.

Es sind dies dieselben Curven, die Haupttangenten-Curven der Hauptflächen waren. In der That erhält man in der Gesammtheit der Berührungs-Curven der Brennfläche mit den Hauptflächen auch die Gesammtheit der Haupttangenten-Curven der Brennfläche. Denn die in einem Punkte der Brennfläche ab berührende Gerade, welche a und b angehört, gehört gleichzeitig zwei weiteren Complexen c und d an. Man erhält also in den Berührungs-Curven der Brennfläche mit den Hauptflächen abc, abd die *beiden* durch den gewählten Punkt hindurchgehenden Haupttangenten-Curven.*)

*) Die verschiedenen hier aufgestellten Sätze hatte ich, mitsammt dem Satze des § 3.: „dass sich je drei Complexe eines Involutionssystems nach einer gemeinsamen Hauptfläche schneiden", in der bereits citirten Note in den Gött. Nachrichten Nr. 3. (1871) in dem Satze zusammengefasst: *dass die Linienfläche, welche drei Complexen eines Involutionssystems gemeinsam ist, die Brennfläche je zweier derselben nach einer Haupttangenten-Curve berührt*, und in dieser Fassung analytisch erwiesen. Die heterogenen Bestandtheile, welche dieser Satz enthielt, erscheinen im Texte gesondert. Ich bin Herrn Lie dafür verpflichtet, dass er mich auf die Möglichkeit der Sonderung aufmerksam gemacht hat.

Für das Involutionssystem der Complexe zweiten Grades findet man insbesondere: die Haupttangenten-Curven auf den Hauptflächen, nach denen diese die Brennflächen berühren, sind von der 32ten Ordnung und Classe. Die Brennflächen selbst sind gleich den Hauptflächen von der 16ten Ordnung und Classe.

Durch passende Particularisationen erhält man aus der Betrachtung dieser Brennflächen und Hauptflächen die Bestimmung der Haupttangenten-Curven auf einer grossen Zahl besonderer Flächen. Hier sei nur eine solche Particularisation erwähnt. Die beiden Complexe des Systems, die mit einander die Congruenz und durch diese die Brennfläche bestimmen, mögen zusammenfallen. Dann wird die Congruenz die Congruenz der singulären Linien des betreffenden Complexes. Ihre Brennfläche zerfällt in die allen Complexen gemeinsame Singularitätenfläche, die von der vierten Ordnung und Classe ist und eine weitere Fläche von der zwölften Ordnung und Classe. Auf beiden erhält man die Haupttangenten-Curven, die jetzt bezüglich von der sechszehnten Ordnung werden. Nun ist für die allgemeinen Complexe zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Kummer'sche Fläche vierten Grades mit sechszehn Knotenpunkten. Man erhält also eine Bestimmung der Haupttangenten-Curven dieser Fläche, die dahin geht: dass sie die Berührungs-Curven der Fläche mit denjenigen Linienflächen sind, welche einem beliebigen (aber fest gewählten) zugehörigen Complexe als singuläre Linien und ausserdem noch bez. einem zweiten (veränderlichen) der zugehörigen Complexe angehören. Hiermit in Uebereinstimmung findet sich eine Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche, wie sie in einer gemeinsamen Arbeit in den Monatsberichten der Berliner Akademie, December 1870, von Lie und mir gegeben worden ist. Der Inhalt dieser Note kann als eine nähere Ausführung einiger der hier vorgetragenen Betrachtungen angesehen werden.

Göttingen im October 1871.

Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.

Von Felix Klein in Göttingen.

Bei liniengeometrischen Untersuchungen wird man zu gewissen Differentialgleichungen geführt, die im Folgenden formulirt und in noch näher anzugebenden Fällen integrirt werden sollen. Dieselben entsprechen im Wesentlichen den folgenden drei Aufgaben:

1) Man soll diejenigen Linien-Complexe finden, deren Geraden die Tangenten einer Fläche sind.

2) Man soll diejenigen einem gegebenen Linien-Complexe angehörigen Congruenzen bestimmen, deren Geraden Haupttangenten ihrer Brennflächen sind.

3) Man soll die Umhüllungs-Curven der Linien einer Congruenz angeben.

Bei der im Folgenden eingeschlagenen Darstellung, bei welcher durchgängig von Linien-Coordinaten Gebrauch gemacht werden wird*), erkennt man, wie diese drei Probleme zusammen eine naturgemässe Gruppe bilden.

Das Problem 1) ist eines der ersten, welche bei der Untersuchung der Linien-Complexe auftreten. Es ist denn auch bereits von Cayley in seiner ersten bez. Mittheilung**), wenn auch nur beiläufig, beantwortet worden. Cayley untersucht dort diejenigen Bedingungen, denen ein Linien-Complex genügen muss, damit seine Geraden eine feste Curve schneiden. Er findet nur eine erste Bedingung, die aber noch nicht hinreichend ist, vielmehr auch dann erfüllt ist, wenn die Linien des Complexes eine Fläche umhüllen. Diese nämliche Bedingung wird im Folgenden auf einem ganz anderen Wege abgeleitet werden, und es wird gezeigt werden, dass sie in der That den Complex als Gesammtheit der Tangenten einer Fläche charakterisirt.

---

*) Das Nachstehende mag zugleich dazu dienen, zu illustriren, wie man mit Linien-Coordinaten operiren kann, ohne auf den Zusammenhang derselben mit Punkt- und Ebenen-Coordinaten zurück zu gehen.

**) Quarterly Journal. t. III. p. 227.

Für Complexe zweiten Grades, insbesondere für diejenigen, die eine Fläche umhüllen, findet sich das Entsprechende bei Plücker (Neue Geometrie n. 341) angegeben.

Das Problem 2) ist von Lie, zunächst unter einer anderen Form, aufgestellt worden.*) Er verlangt nämlich, solche Flächen zu finden, die in jedem ihrer Punkte von dem Complexkegel eines gegebenen Complexes berührt werden. Sodann zeigt er, dass die Kante, nach welcher der Complexkegel die gesuchte Fläche berührt, eine Haupttangente der Fläche ist, und dass diese Eigenschaft die fraglichen Flächen charakterisirt. Das Problem kommt also darauf hinaus: Flächen zu finden, bei welchen ein System Haupttangenten dem gegebenen Complexe angehört. In dieser Form ist es offenbar mit dem Probleme 2) identisch; die Gestalt, die ihm vorstehend ertheilt wurde, schliesst sich nur besser an die gleich vorzutragende Behandlung an.

Das Problem 3) endlich entsteht, sowie man von Linien-Congruenzen handelt. Die Linien einer Congruenz lassen sich nach der allgemeinen Theorie**) auf zwei Weisen in eine Reihe Developpablen zusammenfassen; das Problem ist: wenn die Congruenz gegeben ist, diese Developpablen zu bestimmen.

Das Problem 2) soll im Folgenden insbesondere für den allgemeinen Linien-Complex zweiten Grades gelöst werden. Eine solche Lösung hat auf anderem, mehr geometrischem Wege Lie in der vorstehenden Abhandlung gegeben. Die Resultate kommen natürlich überein; es wird daher interessant, zu verfolgen, wie seine geometrischen Betrachtungen den hier angewandten analytischen entsprechen. In der analytischen Schlussformel, die aufgestellt werden wird, erscheinen seine Resultate in übersichtlichster Weise zusammengefasst.

Gleichzeitig erledigt sich bei der eingeschlagenen Methode das Problem 3) für diejenigen Linien-Congruenzen vierter Ordnung und Classe, welche zwei Linien-Complexen zweiten Grades gemeinsam sind, die zu der nämlichen Singularitätenfläche gehören. Unter dieselben fallen als besondere Art, wie hier gleich hervorgehoben sein soll, die allgemeinen Congruenzen zweiter Ordnung und Classe, welche einem Complexe zweiten und einem Complexe ersten Grades angehören.***)

---

*) Vergl. die vorstehende Abhandlung von Lie und dessen bezügliche Mittheilungen an die Akademie zu Christiania (Berichte 1870, 71). Es ist dort die das Problem darstellende Differential-Gleichung kurz als „die Differentialgleichung des gegebenen Linien-Complexes" bezeichnet. — Auch Herr Darboux hatte sich mit diesem Gegenstande beschäftigt; vergl. eine bez. Bemerkung von Lie in dem vorst. Aufsatze.

**) Vergl. Kummer in Borchardt's Journal. t. 57.

***) Vergl. n. XXXVI. der allgemeinen Aufzählung der Strahlensysteme zweiter Ordnung von Kummer. (Abhandlungen der Berl. Akad. 1866.)

Nach der vorhergehenden Abhandlung von Lie wird man erkennen, wie diese liniengeometrischen Probleme identisch sind mit Problemen, die sich auf *Kugelgeometrie* beziehen. Problem 1) entspricht dann der Forderung: diejenigen Gleichungen zwischen den vier Coordinaten einer Kugel (ihren Mittelpunkts-Coordinaten und ihrem Radius) anzugeben, welche dreifach unendliche Kugelsysteme (Kugel-Complexe) darstellen, deren sämmtliche Kugeln eine feste Fläche berühren. Dem Problem 2) entspricht die Aufgabe: Wenn ein Kugel-Complex gegeben ist, diejenigen Flächen zu finden, deren ein System Hauptkugeln dem Complexe angehört.*) Endlich dem Probleme 3) die Aufgabe: Wenn eine Kugel-Congruenz, d. h. zweifach unendlich viele Kugeln, gegeben ist, solche einfach unendliche Kugelreihen aus ihr auszuscheiden, in denen sich je zwei consecutive Kugeln berühren.

Andererseits wird man, von dem Zusammenhange ausgehend, der zwischen Liniengeometrie und der metrischen Punktgeometrie des Raumes von vier Dimensionen besteht**), äquivalente Probleme für diese metrische Geometrie aufstellen können. Die entsprechenden Probleme der metrischen Geometrie des Raumes von drei Dimensionen mögen hier ausgesprochen sein; ihre Zahl hat sich, wie die Zahl der Variabeln, um 1 vermindert. Es sind die folgenden beiden:

a) diejenigen developpablen Flächen anzugeben, welche den unendlich fernen imaginären Kreis enthalten;

b) auf einer gegebenen Fläche diejenigen Curven zu bestimmen, deren Tangenten den unendlich fernen Kreis fortwährend treffen (die sogenannten Curven ohne Länge).

Mit den letzteren Curven haben sich besonders die neueren französischen Geometer beschäftigt. Auf die Aufsuchung dieser Curven kommt, wie beiläufig bemerkt sei, das Problem der conformen Abbildung zweier Flächen auf einander hinaus. Man hat nämlich nur die beiden Flächen so auf einander zu beziehen, dass den fraglichen Curven der einen Fläche die der anderen entsprechen. — Die Developpablen a) sind hinsichtlich ihrer ausgezeichneten metrischen Eigenschaften zuerst von Herrn Darboux untersucht worden.***) Herr

*) Mit diesem Probleme, das, zusammen mit Problem 2), von Lie in der vorst. Abhandlung behandelt ist, hatte sich, wie er uns mittheilte, auch Herr Darboux in der neuesten Zeit beschäftigt. Er hatte dasselbe gerade in dem Umfange gelöst, wie eine solche Lösung bei Lie angegeben ist, und wie sie durch Anwendung der Lie'schen Transformation von Liniengeometrie in Kugelgeometrie aus der im Texte gegebenen Lösung des liniengeometrischen Problems hervorgeht. Die Methode, die Herr Darboux dabei benutzte, war, soweit ich übersehen kann, mit der, die hier angewandt werden soll, durchaus identisch.

**) Vergl. den vorstehenden Aufsatz: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.

***) Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. t. II. 1864.

Darboux hat auch, wie er mir mittheilte, das Problem b) für die Flächen vierten Grades gelöst, die den imaginären Kreis doppelt enthalten. Dies entspricht vermöge der Lie'schen Abbildung (wie auch Lie bemerkt) der von mir im Folgenden gegebenen und schon früher gelegentlich mitgetheilten (Gött. Nachrichten. 1871. Nr. 1.) Integration der Umhüllungs-Curven einer Linien-Congruenz zweiter Ordnung und Classe. Es mag genügen, hiermit auf die entsprechenden metrischen Probleme hingewiesen zu haben, die sich natürlich nicht nur auf den metrischen Raum von drei und vier, sondern von beliebig vielen Dimensionen beziehen.*) Ich wende mich jetzt zu den liniengeometrischen Aufgaben zurück, die den eigentlichen Inhalt dieser Mittheilung bilden sollen, und beginne damit, Einiges, was später benutzt werden soll, über den linearen Complex vorauszuschicken.

§ 1.

Einiges über den linearen Complex.

In dem vorhergehenden Aufsatze: „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie" habe ich in § 1. entwickelt, wie die Liniengeometrie aufgefasst werden kann, als die Geometrie auf einer im Raume von fünf Dimensionen gelegenen Fläche zweiten Grades.**) Dieselbe sei, unter $x_1, x_2, \ldots x_6$ die homogenen Coordinaten des Raumes von fünf Dimensionen verstanden, durch

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots x_6) = 0$$

dargestellt. Ein linearer Complex:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots u_6 x_6 = 0$$

ist bei dieser Auffassung wie die Ebene des betreffenden Raumes. Hieraus schliesst man, *dass ein linearer Complex eine Invariante hat*, nämlich denjenigen Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, aussagt, dass die Ebene $u_x = 0$ die Fläche $\Omega = 0$ berührt. Dieser Ausdruck entsteht aus der Determinante von Ω durch Ränderung mit den Coefficienten u. Hat Ω insbesondere***), wie im Folgenden der Einfachheit wegen angenommen werden wird, die Form

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2,$$

so erhält die Invariante die Gestalt:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_6^2.$$

*) Nach den Auseinandersetzungen des § 2. des vorhergehenden Aufsatzes ist ersichtlich, wie sich diese metrischen Probleme genau mit denselben Formeln behandeln lassen, wie die hier ausgeführten liniengeometrischen.

**) Dieser Ausdruck sei hier gestattet, da er wohl nicht missverstanden werden kann.

***) Vergl. „Zur Theorie der Complexe etc.", diese Annalen t. II.

Verschwindet die Invariante, so ist der lineare Complex ein sogenannter *specieller*, d. h. er besteht aus der Gesammtheit der Geraden, die eine feste Gerade schneiden.

Seien jetzt zwei lineare Complexe gegeben:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Dieselben haben eine lineare Congruenz gemein, die gleichzeitig allen Complexen

$$\lambda u + \mu v = 0$$

angehört. Unter denselben finden sich zwei specielle, die sogenannten beiden Directricen. Man bestimmt dieselben, indem man die Invariante von $\lambda u + \mu v$ bildet. Sei A_{uu} die Invariante von u, A_{vv} diejenige von v, endlich $A_{uv} = A_{vu}$ derjenige Ausdruck, der entsteht, wenn man die Determinante von Ω auf der einen Seite mit den Coefficienten von u, auf der anderen mit denen von v rändert. Diesen Ausdruck A_{uv} habe ich gelegentlich die *simultane Invariante* der beiden Complexe genannt. (Ihr Verschwinden ist die Bedingung für die involutorische Lage zweier Complexe.) Bei dieser Bezeichnung wird die Invariante von $\lambda u + \mu v$:

$$\lambda^2 A_{uu} + 2\lambda\mu A_{uv} + \mu^2 A_{vv}.$$

Dieselbe, gleich Null gesetzt, ergiebt eine quadratische Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$, und diese ist es, welche die beiden Directricen bestimmt. Die hiermit aufgestellte quadratische Gleichung hat, als quadratische binäre Form der Variabeln λ, μ betrachtet, eine Invariante:

$$A_{uu} A_{vv} - A_{uv}^2.$$

Dieselbe ändert sich (bis auf einen Factor) nicht, wenn man statt u, v irgend zwei andere Complexe der Gruppe $\lambda u + \mu v$ setzt. Sie ist also eine *Combinante* der beiden Complexe u, v, und desswegen eine *Invariante der durch dieselben bestimmten Congruenz.*

Das Verschwinden dieser Invariante sagt aus, dass die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Directricen der Congruenz zwei gleiche Wurzeln hat, dass also die Directricen der Congruenz zusammenfallen (vergl. Plücker's Neue Geometrie n. 68.). Die Congruenz soll dann eine *specielle* lineare Congruenz heissen.

Eine weitere Particularisation tritt ein, wenn nicht nur $A_{uu} A_{vv} - A_{uv}^2 = 0$, sondern A_{uu}, A_{vv}, A_{uv} einzeln verschwinden. Dann sind u und v beides specielle Complexe (gerade Linien), die sich schneiden. Die Congruenz zerfällt in zwei: in die Congruenz erster Ordnung und nullter Classe derjenigen Geraden, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt gehen, und die Congruenz erster Classe und nullter Ordnung der in der gemeinsamen Ebene verlaufenden Geraden. Eine solche lineare Congruenz wird im Folgenden als eine *zerfallende*

bezeichnet werden. Eine zerfallende Congruenz hat unendlich viele Directricen, die Geraden des Büschels, dem u und v angehören und die durch

$$\lambda u + \mu v = 0$$

dargestellt sind.

Betrachten wir jetzt drei lineare Complexe:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Dieselben haben eine Regelschaar, d. h. die eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades (eines einschaligen Hyperboloids) gemein. Die anderen Erzeugenden des Hyperboloids sind die Directricen der Congruenz je zweier Complexe der Gruppe:

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0.$$

Man erhält alle zweiten Erzeugenden, wenn man alle Werthe von λ, μ, ν wählt, für welche die Invariante von $\lambda u + \mu v + \nu w$ verschwindet, für welche also:

$$0 = \lambda^2 A_{uu} + 2\lambda\mu A_{uv} + \mu^2 A_{vv} + 2\lambda\nu A_{uw} + 2\mu\nu A_{vw} + \nu^2 A_{ww}.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir λ, μ, ν als Coordinaten in der Ebene interpretiren, einen Kegelschnitt dar. Derselbe hat, hinsichtlich linearer Transformationen, denen man λ, μ, ν aussetzen kann, eine Invariante, nämlich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} \end{vmatrix}.$$

Wir werden dieselbe als die *Invariante* der den drei Complexen gemeinsamen Regelschaar zu bezeichnen haben.

Das Verschwinden der Invariante sagt aus: zunächst, dass der Kegelschnitt, der durch die Gleichung zwischen λ, μ, ν dargestellt wird, zerfällt. Es zerfällt also auch das zweite Erzeugenden-System. Das bez. Hyperboloid artet in diesem Falle in zwei Ebenen und zwei auf deren Durchschnitt gelegene Punkte aus (vergl. Plücker's Neue Geometrie n. 144.).*) Die eine Erzeugung desselben besteht aus den Geraden, welche durch den ersten Punkt in der ersten Ebene, oder durch den zweiten Punkt in der zweiten Ebene hindurchgehen; die andere Erzeugung aus den Geraden, die durch den ersten Punkt

*) Während also eine F_2 als Punktgebilde betrachtet den Kegel, als Ebenengebilde betrachtet den Kegelschnitt als erste Particularisation ergiebt, tritt hier ein mit einem Punktepaare vereinigt gelegenes Ebenenpaar als solche auf. Es ist interessant, dass man bei den allgemeinen auf Systeme von Flächen zweiten Grades bezüglichen Abzählungen gleichmässig auf alle drei Particularisationen Rücksicht nehmen muss. Vergl. die Arbeit von Herrn Schubert: Zur Theorie der Charakteristiken (Borchardt's Journal t. 71.). Die hier in Rede stehende Particularisation der F_2 ist dort als „begrenzter Ebenenschnitt" bezeichnet.

in der zweiten Ebene, oder den zweiten Punkt in der ersten Ebene hindurchgehen. Die drei Complexe haben also zwei vereinigt gelegene Strahlbüschel gemein. Wir werden eine solcher Art zerfallene Regelschaar in Analogie mit dem Vorstehenden als *specielle* Regelschaar zu bezeichnen haben.

Eine weitere Particularisation ist, dass nicht nur die Invariante der Regelschaar, sondern sämmtliche Unterdeterminanten derselben verschwinden. Dann ist die Regelschaar in zwei sich deckende Strahlbüschel ausgeartet (Plücker's Neue Geometrie n. 146.). Die Congruenzen je zweier Complexe der Schaar $\lambda u + \mu v + \nu w$ sind alsdann specielle, da sich ihre Invarianten linear aus den verschwindenden Unterdeterminanten zusammensetzen.

Es wäre der letzte Fall noch denkbar, dass auch die zweiten Unterdeterminanten, d. h. A_{uu}, A_{uv} etc. selbst sämmtlich verschwinden. Dann sind u, v, w drei specielle Complexe, die sich gegenseitig schneiden, also entweder einen Punkt gemein haben oder in einer Ebene verlaufen. Es genügen dann den drei Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ zweifach unendlich viele Linien, nämlich diejenigen, die durch den gemeinsamen Punkt gehen, resp. in der gemeinsamen Ebene liegen. Denn die Bedingungsgleichung $\Omega = 0$ ist dann vermöge $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ identisch erfüllt; die dritte Gleichung, etwa $w = 0$, dient nur dazu, um aus der zerfallenden Congruenz: $u = 0$, $v = 0$, $\Omega = 0$ den einen Theil auszusondern. Es ist dies also ein von den vorhergehenden wesentlich verschiedener Fall, der im Folgenden nicht in Betracht kommen wird.

Es mögen endlich vier Complexe:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad t = 0$$

in Betracht gezogen werden. Dieselben haben zwei Geraden gemein, und für dieses Geradenpaar erhält man die Invariante:

$$\begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} & A_{ut} \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} & A_{vt} \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} & A_{wt} \\ A_{tu} & A_{tv} & A_{tw} & A_{tt} \end{vmatrix}.$$

Verschwindet dieselbe, so fallen die beiden Geraden zusammen.*)

*) Lässt man $t = 0$ einen speciellen Complex bedeuten, wodurch A_{tt} verschwindet, so sagt das Verschwinden der Invariante des Textes aus, dass die Gerade t das Hyperboloid der drei Complexe $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ berührt. Aber A_{tu}, A_{tv}, A_{tw} sind offenbar nichts anderes, als die Gleichungen der Complexe u, v, w, in die nur die Coordinaten der Geraden t eingetragen sind. Ersetzt man daher A_{tu}, A_{tv}, A_{tw} kurz durch u, v, w, so stellt die resultirende Gleichung:

Verschwinden die ersten Unterdeterminanten, so schneiden sich die beiden zusammenfallenden Geraden. Was das Verschwinden der zweiten und dritten Unterdeterminanten bedeutet, mag hier unerörtert bleiben.

§ 2.

Aufstellung der Differentialgleichungen.

Sei jetzt ein beliebiger Complex

$$\varphi = 0$$

gegeben. Betrachten wir eine seiner Geraden (x). In der Nähe dieser Geraden kann der Complex als ein linearer angesehen werden, d. h. die benachbarten Geraden sind, bis auf Grössen höherer Ordnung, durch einen tangirenden linearen Complex bestimmt (vergl. Plücker's Neue Geometrie n. 297 ff.). Derselbe ist:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) y_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) y_2 + \cdots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_6}\right) y_6 = 0,$$

wo die eingeklammerten Differentialquotienten sich auf den constanten Werth x beziehen. Dieser lineare Tangential-Complex ist indess nicht einzig bestimmt, sondern es giebt einfach unendlich viele gleichberechtigte. Da nämlich der gegebene Complex

$$\varphi = 0$$

nicht geändert wird, wenn man zu seiner Gleichung Ω mit einem beliebigen Factor hinzufügt:

$$\lambda \varphi + \mu \Omega = 0,$$

so ist jeder lineare Complex, der in der Gleichung enthalten ist:

$$\Sigma \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha}\right) \cdot y_\alpha = 0$$

ein linearer Tangential-Complex.*) Dabei ist:

$$0 = \begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} & u \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} & v \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

die *Complexgleichung der Hyperboloids* u, v, w dar, wie ich diese Annalen t. II. ohne Beweis angab. — Auf ähnliche Weise findet man das Produkt der Gleichungen der beiden Directricen der Congruenz u, v:

$$0 = \begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & u \\ A_{vu} & A_{vv} & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}.$$

*) Unter den linearen Tangential-Complexen giebt es drei ausgezeichnete, die stationär berühren. Vergl. den vorhergehenden Aufsatz.

$$\Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0$$

die Gleichung des speciellen Complexes, dessen sämmtliche Gerade die Gerade x schneiden.

Die einfach unendlich vielen linearen Tangential-Complexe haben eine *specielle* lineare Congruenz gemein. In der That, nehmen wir für Ω, wie fortan immer geschehen soll, die vereinfachte Form:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2,$$

so wird die Schaar der linearen Tangential-Complexe:

$$\Sigma \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \mu x_\alpha \right) y_\alpha = 0.$$

Die Invariante der einzelnen Complexe ist also gleich:

$$\lambda^2 \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right)^2,$$

da sowohl Σx_α^2 vermöge $\Omega = 0$, als $\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot x_\alpha$ vermöge $\varphi = 0$ verschwindet, und ergiebt, gleich Null gesetzt, die Doppelwurzel $\lambda = 0$. Die beiden Directricen der Congruenz fallen also zusammen, und zwar in die gegebene Gerade (x).

Es wird nun insbesondere unter den Linien eines Complexes solche geben, für welche die den tangirenden linearen Complexen gemeinsame specielle Congruenz zerfällt. Die Bedingung hierzu ist nach dem Vorstehenden

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right)^2 = 0.$$

Dann sind alle einfach unendlich vielen Tangential-Complexe speciell, d. h. gerade Linien, und diese Geraden bilden ein Büschel. Durch dies Büschel werden der gegebenen Geraden ein auf ihr gelegener Punkt und eine durch sie hindurchgehende Ebene zugeordnet. Alle Geraden des Complexes, welche der gegebenen (x) unendlich nahe sind und sie schneiden, müssen entweder sie in dem zugeordneten Punkte treffen oder in der zugeordneten Ebene verlaufen. Der zugeordnete Punkt ist desshalb gemeinsamer Berührungspunkt für die Gerade (x) und die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen enthaltenen Complexcurven; ebenso wird die zugeordnete Ebene von allen Kegeln, die von Punkten der Geraden (x) ausgehen, nach der Geraden (x) berührt.

Derartige Complexlinien (x) heissen bei Plücker *singuläre Linien des Complexes* (n. 305., 306. der neuen Geometrie). Der zugeordnete Punkt heisst der zugeordnete *singuläre Punkt*, die zugeordnete Ebene die zugeordnete *singuläre Ebene*.

Hat Ω, wie oben angenommen, die vereinfachte Gestalt $\Sigma x_\alpha^2 = 0$, so werden die singulären Linien des Complexes

$$\varphi = 0$$

aus demselben ausgeschieden durch die Gleichung:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0.$$

Ist φ vom Grade m, so ist diese Gleichung vom Grade $2(m-1)$; *die singulären Linien bilden also eine Congruenz der Ordnung und Classe* $2m(m-1)$.

Ich will hieran beiläufig die Definition einer für die Theorie der Complexe sehr wichtigen Fläche knüpfen. Jeder der zweifach unendlich vielen Linien ist ein singulärer Punkt und eine singuläre Ebene zugeordnet. Es giebt hiernach eine Fläche der singulären Punkte und eine Fläche der singulären Ebenen. *Diese beiden Flächen sind nun identisch und bilden einen Theil der von der Congruenz der singulären Linien umhüllten Brennfläche.**) Im Folgenden werde ich diese Fläche, wie ich bereits früher gelegentlich gethan, als die *Singularitätenfläche* des Complexes bezeichnen.

Es wird nun Complexe besonderer Art geben können — sie sollen im Folgenden *specielle* Complexe heissen —, für die

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0$$

vermöge $\Sigma x^2 = 0$, $\varphi = 0$ identisch verschwindet, deren sämmtliche Linien also singuläre Linien sind. Ich behaupte, dass diese Complexe es sind, deren Linien eine Fläche umhüllen, *dass also die Complexe, die aus der Gesammtheit der Tangenten einer Fläche bestehen, durch die Differentialgleichung*

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0$$

charakterisirt sind.

Zunächst ist ersichtlich, dass für alle Complexe, deren Linien eine Fläche umhüllen, diese Bedingung erfüllt ist. Denn jede Linie eines solchen Complexes hat den Charakter einer singulären. Die Complex-Curven z. B., die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen (die Durchschnittscurven dieser Ebenen mit der umhüllten Fläche), berühren die Gerade in einem festen Punkte u. s. w.

Um auch die Umkehrung des Satzes einzusehen, benutzen wir einen Hülfssatz. Sei nämlich (x) eine Linie des Complexes. So wird wegen

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0$$

auch $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ eine gerade Linie sein. Dieselbe wird überdies, wegen

*) Es ist dieser Satz von Herrn **Pasch** in seiner Habilitationsschrift gegeben worden (Zur Theorie der Complexe etc. Giessen 1870). Bei **Plücker** findet sich das Entsprechende für Complexe zweiten Grades auf einem Umwege bewiesen (n. 318—320).

$$\varphi = 0 \quad \text{und also} \quad \Sigma x_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0$$

die Gerade (x) schneiden. $\left(x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ ist desshalb ein Büschel gerader Linien, das schon oben betrachtete Büschel der zu der singulären Linie (x) gehörigen speciellen linearen Tangential-Complexe. *Im vorliegenden Falle gehört nun dieses ganze Büschel von Geraden dem Complexe $\varphi = 0$ an.*

Der Beweis, den ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zu geben hoffe, lässt sich so führen. Ist, wie vorausgesetzt:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

vermöge $\varphi = 0$, $\Sigma x_\alpha^2 = 0$, so kann man, wie sich zeigen lässt, setzen:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = M\varphi + N\Sigma x_\alpha^2.$$

Man bilde jetzt

$$\varphi\left(x_\alpha + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$= \varphi(x_\alpha) + \lambda \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} + \cdots\cdots$$

Das Glied mit λ^0 und mit λ^1 verschwindet ohne Weiteres mit $\varphi = 0$, $\Sigma x_\alpha^2 = 0$. Für die anderen Glieder kann man es dann durch ein recurrentes Verfahren nachweisen, indem man von der dem Ausdrucke $\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2$ gegebenen Darstellung Gebrauch macht.

Die Linien des Complexes fassen sich also in zweifach unendlich viele Büschel

$$x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

zusammen. Der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden des Büschels ist für alle der zugeordnete singuläre Punkt, die Ebene des Büschels für alle die zugeordnete singuläre Ebene. Den dreifach unendlich vielen Geraden des Complexes entsprechen also nur zweifach unendlich viele singuläre Punkte und zweifach unendlich viele singuläre Ebenen. Es giebt also (wie beim allgemeinen Complexe) eine Fläche der singulären Punkte und eine Fläche der singulären Ebenen. Nun ist es leicht, zu sehen, dass (wie beim allgemeinen Complexe) diese beiden Flächen identisch sind und dass die Linien des Complexes die Tangenten dieser Fläche sind. Jede Complexlinie muss nämlich jetzt die Complex-Curve in einer beliebigen durch sie hindurchgelegten Ebene, als singuläre Linie, im zugehörigen singulären Punkte berühren. Die in einer Ebene enthaltene Complex-Curve ist also die Durchschnitts-Curve der Ebene mit der Fläche der singulären Punkte. Die Fläche der singulären Punkte wird mithin von den Linien des Complexes

umhüllt. Die Linien des Complexes umhüllen also in der That eine Fläche, die Fläche der singulären Punkte. Dasselbe beweist man von der Fläche der singulären Ebenen. Die Fläche der singulären Punkte und die Fläche der singulären Ebenen sind also identisch.*)

Betrachten wir jetzt die Congruenz, welche zwei Complexen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

gemeinsam ist. Eine Linie derselben habe die Coordinaten x. In der Nähe derselben kann man die beiden Complexe durch einen ihrer linearen Tangential-Complexe ersetzen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \lambda x_\alpha\right) y_\alpha = 0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} + \mu x_\alpha\right) y_\alpha = 0.$$

Die gegebene Congruenz kann man in der Nähe von (x) durch die lineare Congruenz ersetzen, welche irgend zwei dieser Complexe gemeinsam ist. *Es giebt also zweifach unendlich viele lineare Congruenzen, welche eine gegebene Congruenz in einer ihrer Geraden (x) berühren.*

Diese linearen Congruenzen haben alle eine Regelschaar gemein:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0, \quad \Sigma x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Aber dieselbe zerfällt in zwei Büschel, da ihre Invariante

$$\begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \varphi \\ \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \psi \\ \varphi & \varphi & \Sigma x_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\Sigma x_\alpha^2 = 0$ verschwindet. Die Directricen der zweifach unendlich vielen tangirenden Congruenzen bestehen also aus zwei Büscheln, welche die gegebene Gerade (x) gemein haben. Irgend zwei Gerade, entnommen den beiden Büscheln, sind Directricen einer tangirenden Congruenz. Man erkennt in diesen beiden Büscheln die Tangentenbüschel**) der Brennfläche der Congruenz in deren Berührungspunkten mit der Geraden (x).

*) Man kann, wie hier beiläufig angegeben sein mag, die Singularitätenfläche eines Complexes als denjenigen speciellen Complex definiren, der dem Complexe umschrieben ist; die Brennfläche einer Congruenz als denjenigen speciellen Complex, dem die Congruenz angehört.

**) Bei der gewöhnlichen Darstellung zeichnet man die gegen (x) rechtwinkligen Linien der beiden Büschel aus und bezeichnet sie als die *Brennlinien* des in der Nähe von (x) verlaufenden unendlich dünnen Strahlenbündels. Jedes andere den beiden Büscheln entnommene Linienpaar ist im projectivischen Sinne gleich berechtigt.

Unter den Linien einer Congruenz wird es nun insbesondere solche geben, für welche die beiden Büschel, d. h. also die beiden Berührungspunkte mit der Brennfläche zusammenfallen. Dann wird die Congruenzgerade, die vorher Doppeltangente der Brennfläche war, im Allgemeinen eine vierpunktig berührende Tangente. Diese Congruenzgeraden sind durch die Bedingung dargestellt, dass für sie die Unterdeterminanten der vorstehenden Invariante verschwinden, was sich, vermöge der vereinfachten Form der letzteren, auf die eine Bedingung reducirt:

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \cdot \Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung, zusammen mit

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Sigma x_\alpha^2 = 0$$

stellt eine Linienfläche der Congruenz dar, welche die Brennfläche vierpunktig berührt. Ist φ vom Grade m, ψ vom Grade n, so wird diese Fläche vom Grade $4mn(m+n-2)$.

Diejenigen Linien einer Congruenz $[m, n]$, *welche die Brennfläche vierpunktig berühren, bilden im Allgemeinen eine Linienfläche vom Grade*

$$4mn(m+n-2)\,.$$

Es wird nun besondere Congruenzen geben — sie sollen *specielle* Congruenzen heissen — für welche die vorstehende Gleichung:

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \cdot \Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

vermöge

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Sigma x_\alpha^2 = 0$$

identisch erfüllt ist. Diese haben die Eigenthümlichkeit, dass alle ihre Linien die Brennfläche in zusammenfallenden Punkten berühren. Es sind dies diejenigen Congruenzen, deren Linien Haupttangenten der Brennfläche sind*): im Gegensatze zu den allgemeinen Congruenzen, deren Linien Doppeltangenten der Brennfläche sind.

Hiermit ist denn auch das Problem (2) *formulirt***). Ist ein Linien-

---

*) Cf. Kummer. Allgemeine Theorie der Strahlensysteme §. 8. (Borchardt's Journal Bd. 57).

**) Lie ertheilte diesem Problem bereits früher eine ähnliche Form. Er fand nämlich, dass die betr. Differentialgleichung durch eine Transformation, die darauf hinauskommt, die Geraden des Complexes als Raumelement einzuführen, in eine Gleichung zweiten Grades übergeht. Insbesondere giebt er die Gleichung:

$$p\cdot\frac{\partial H}{\partial x} + q\,\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z} = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2-1}$$

(Bericht der Akademie zu Christiania. 1870. October.) Wollte man statt Linien-

Complex $\varphi = 0$ gegeben, so suche man solche Congruenzen desselben: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, dass für die Congruenzlinien

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 \cdot \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_a}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_a}\right)^2 = 0.$$

Ist insbesondere $\varphi = 0$ ein specieller Complex, d. h. eine Fläche, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_a} = 0.$$

Es mögen endlich drei Complexe

$$\varphi = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad \chi = 0$$

gegeben sein. Dieselben haben eine Linienfläche gemein. Sei (x) eine Gerade derselben. Dieselbe hat in φ, ψ, χ bez. die folgenden Tangential-Complexe

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a} + \lambda x_a\right) y_a = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a} + \mu x_a\right) y_a = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a} + \nu x_a\right) y_a = 0.$$

Je drei Complexe aus diesen drei Schaaren haben ein Hyperboloid gemeinsam, welches die den 3 gegebenen Complexen gemeinsame geradlinige Fläche in (x) berührt. *Es giebt dreifach unendlich viele solcher berührenden Hyperboloide.* Alle haben zwei zusammenfallende Gerade gemein, nämlich (x) und die benachbarte Erzeugende: die gemeinschaftlichen Geraden der 4 Complexe:

Coordinaten Punkt-Coordinaten anwenden, so würde man zu einer auf den ersten Blick sehr verschiedenen partiellen Differentialgleichung geführt werden. Sei unter Anwendung der Coordinaten p_{ik} die Gleichung des Complexes

$$\varphi(p_{ik}) = 0,$$

so stellt die Gleichung

$$\varphi(x_i y_k - y_i x_k) = 0,$$

wenn man den x feste Werthe ertheilt, den vom Punkte (x) ausgehenden Complexkegel dar. Das Problem (2) besteht nun darin, solche Flächen $\psi(x) = 0$ zu finden, die in jedem ihrer Punkte von dem betreffenden Complexkegel berührt werden. Man drücke also die Bedingung aus, dass die Ebene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot y_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot y_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \cdot y_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \cdot y_4 = 0$$

den Kegel

$$\varphi(x_i y_k - y_i x_k) = 0$$

berühre, so hat man die Differentialgleichung des Problems. Ist φ vom Grade m, so werden die Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ im Allgemeinen bis zum Grade $m(m-1)$ vorkommen.

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0 \quad , \quad \Sigma x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Denn die Invariante des diesen Complexen gemeinsamen Geradenpaares:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} & \varphi \\ \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} & \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} & \psi \\ \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} & \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \Sigma\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \chi \\ \varphi & \psi & \chi & \Sigma x_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Für besondere Geraden der Linienfläche werden auch sämmtliche Unterdeterminanten dieser Invariante verschwinden. Es sind dies die sogenannten *singulären* Erzeugenden der Linienfläche, die ihre consecutive schneiden. Zu ihrer Bestimmung erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \\ \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} & \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \\ \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} & \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \Sigma\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung ist, wenn φ, ψ, χ bez. vom Grade m, n, p sind, vom Grade $2(m+n+p-3)$. Man erhält also den Satz: *die Linienfläche, welche drei Complexen bez. vom Grade m, n, p gemeinsam ist, hat im Allgemeinen*

$$4mnp\,(m+n+p-3)$$

*singuläre Erzeugende**).

Es giebt nun *specielle* Linienflächen, deren sämmtliche Linien singuläre Erzeugende sind, d. h. ihre consecutiven schneiden. Dies sind die *Developpablen.* Sie sind dadurch charakterisirt, dass für sie, vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ die vorstehende Gleichung identisch erfüllt ist. Sind also φ und ψ gegeben und betrachtet man χ als unbekannt, *so stellt diese Gleichung die Differentialgleichung für die Developpablen der Congruenz $\varphi = 0$, $\psi = 0$ dar,* was das Problem (3) ist. Dieselbe wird insbesondere linear, wenn $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine specielle Congruenz ist.

Die Umhüllungs-Curven der Congruenz zweier zu derselben Singularitätenfläche gehöriger Complexe zweiten Grades werden wir in etwas

---

*) Dieselbe Zahl hat auf etwas anderem Wege Herr Lüroth abgeleitet: zur Theorie der windschiefen Flächen (Borchardt's Journal Bd. 67).

anderer Weise bestimmen, indem wir nämlich die Congruenzgeraden durch zwei Parameter ausdrücken und dann die Bedingung aufstellen, dass sich zwei benachbarte Congruenzgeraden schneiden. Zu diesem Zwecke mag hier die Bedingung gegeben werden, unter der sich überhaupt zwei benachbarte Gerade (x) und $(x + dx)$ schneiden. Damit sich zwei Gerade (x) und (y) schneiden, muss sein

$$\Sigma x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Ist aber $y_\alpha = x_\alpha + dx_\alpha$, so ist diese Gleichung identisch befriedigt, weil die y_α, als Linien-Coordinaten, an die Gleichung $\Sigma y_\alpha^2 = 0$ geknüpft sind, was, wegen $\Sigma x_\alpha^2 = 0$, auf $\Sigma x_\alpha\, dx_\alpha = 0$ führt. Setzen wir jetzt $y_\alpha = x_\alpha + dx_\alpha + d^2 x_\alpha$, so haben wir einmal, wegen $\Sigma y_\alpha^2 = 0$:

$$\Sigma x_\alpha\, dx_\alpha = 0, \qquad \Sigma(2 x_\alpha\, d^2 x_\alpha + dx_\alpha^2) = 0.$$

Andererseits wird die Bedingung des Schneidens

$$\Sigma x_\alpha\, d^2 x_\alpha = 0$$

und diese reducirt sich vermöge der letzten Gleichung auf

$$\Sigma dx_\alpha^2 = 0.$$

Dies ist die Bedingung für das Schneiden zweier consecutiven Geraden, welche im Folgenden angewandt werden wird).*

§ 3.

Elliptische Coordinaten zur Bestimmung der geraden Linie**). Bestimmung verschiedener Umhüllungscurven.

Ich werde jetzt statt der bisher gebrauchten homogenen Linien-Coordinaten $x_1 \ldots x_6$, welche an die Bedingungsgleichung

$$\Sigma x_\alpha^2 = 0$$

gebunden waren, vier von einander unabhängige, nicht homogene Coordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ einführen. Dieselben werden in der folgenden Weise definirt.

In einer früheren Arbeit (diese Ann. t. II) habe ich gezeigt, dass die Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche in der folgenden Weise durch einen Parameter λ dargestellt werden können:

$$0 = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \cdots \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda},$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_6$ Coordinaten der eben betrachteten Art sind. Die gemeinsame Singularitätenfläche ist in dem allgemeinen Falle, auf

*) Lie benutzt als Bedingung für das Schneiden zweier consecutiven Geraden (oder die Berührung zweier consecutiver Kugeln) die folgende:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (i\,dH)^2 = 0.$$

**) Vergl. eine Note in den Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 1.

welchen diese kanonische Form passt, eine Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.

Nun kann man die vorstehende Gleichung, wenn man für die x die Coordinaten einer geraden Linie setzt, als eine Gleichung für λ betrachten. Dieselbe ist vom vierten Grade, da die beim Heraufmultipliciren auftretende Potenz λ^5 den verschwindenden Factor Σx^2 hat. Die vier Wurzeln der Gleichung sollen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 heissen; sie sind es, die fortan als Coordinaten der Geraden benutzt werden. *Diese vier Coordinaten geben also den Werth des Parameters λ derjenigen vier Complexe des Systems an, denen die fragliche Gerade angehört.*

Wie man sieht, ist diese Coordinatenbestimmung der allgemeinen Jacobi'schen Methode der elliptischen Coordinaten analog. Bei der Jacobi'schen Methode hat man nur eine Gleichung, und zwar eine nicht homogene, von der Form*):

$$\Sigma_1^n \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha - \lambda} = 1,$$

während hier zwei homogene Gleichungen gegeben sind:

$$\Sigma_1^{n+1} \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha - \lambda} = 0, \qquad \Sigma_1^{n+1} x_\alpha^2 = 0.$$

Diese allgemeinere**) Art elliptischer Coordinaten findet sich zuerst bei Herrn Darboux erwähnt***) und werden von ihm in einem neueren Aufsatze entwickelt†). Er bezeichnet dieselben als die erste Derivation der gewöhnlichen elliptischen Coordinaten, insofern er auf sie durch einmalige Anwendung eines Processes geführt wird, durch den er aus jedem Orthogonalsysteme ein neues Orthogonalsystem herleitet. Auf das System der confocalen Flächen zweiten Grades angewandt, ergiebt der Process das Darboux-Moutard'sche Orthogonalsystem der Flächen vierten Grades, die den imaginären Kreis doppelt enthalten, und auf dieses System beziehen sich die neuen Coordinaten. (Vergl. hierzu auch den vorstehenden Aufsatz. § 2.)

---

*) Bei Jacobi ist dem Parameter λ ein anderes Vorzeichen gegeben, was aber nicht vortheilhaft scheint.

**) Als *allgemeiner* kann man diese Coordinaten bezeichnen, da sich aus ihnen die gewöhnlichen elliptischen Coordinaten ergeben, wenn zwei der x_α zusammenfallen. Es würde dies einer Ausartung der Kummer'schen Fläche in eine Fläche mit Doppellinie, d. h. in eine Plücker'sche Complexfläche, entsprechen.

***) Comptes rendus. LXIX. 1869, 2. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques.

†) Comptes rendus. LXXIII. 1871, 2. Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface.

Wir werden zunächst die früheren Coordinaten x_α durch die neuen λ_α ausdrücken. Zu diesem Zwecke mag $f(\lambda)$ den Ausdruck bezeichnen:

$$f(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) \ldots\ldots (k_6 - \lambda).$$

So hat man bekanntlich die Relationen:

$$\Sigma \frac{1}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \Sigma \frac{k_\alpha}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \Sigma \frac{k_\alpha^2}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \Sigma \frac{k_\alpha^3}{f'(k_\alpha)} = 0,$$

$$\Sigma \frac{k_\alpha^4}{f'(k_\alpha)} = 0.$$

In Folge dessen sind die x_α durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}.$$

In der That überzeugt man sich in Folge der zwischen den $f'(k)$ existirenden Gleichungen ohne Weiteres, dass diese Werthe von x_α^2 sowohl der Gleichung $\Sigma x^2 = 0$ als den vier Complexgleichungen genügen, welche den Werthen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von λ entsprechen.

Wir mögen beiläufig erörtern, wie durch die Parameter λ die hauptsächlichen Elemente des gegebenen Complexsystems und der mit ihm verknüpften Kummer'schen Fläche dargestellt werden*).

Setzt man zwei Parameter λ, etwa λ_3 und λ_4, einander gleich, so hat man eine Tangente der Kummer'schen Fläche. Betrachtet man λ_1 und λ_2 als constant, während $\lambda_3 = \lambda_4$ alle Werthe durchläuft, so erhält man das Büschel aller solcher Tangenten, welche die Fläche in einem Punkte berühren. λ_1 und λ_2 charakterisiren also den Berührungspunkt; man kann sie als Coordinaten des Punktes auf der Fläche auffassen**). Die von den Tangenten in zwei Punkten (λ_1, λ_2) und (λ'_1, λ'_2) gebildeten zwei Büschel sind dabei, gleichen Werthen von $\lambda_3 = \lambda_4$ entsprechend, eindeutig und also projectivisch auf einander bezogen.

Setzt man drei Parameter einander gleich, so erhält man die Haupttangenten der Fläche.

Nimmt man die vier Parameter paarweise gleich, so hat man die Linien, welche die 16 Doppelebenen der Fläche ausfüllen und diejenigen, die durch die 16 Doppelpunkte hindurchgehen.

Endlich die Annahme, dass alle Parameter einander gleich sind, ergiebt die Tangenten der in den 16 Doppelebenen gelegenen Berührungskegelschnitte, sowie die Erzeugenden der in den 16 Knotenpunkten berührenden Kegel.

---

*) Wegen der Beweise siehe den Aufsatz: Zur Theorie der Complexe etc. diese Ann. Bd. II.

**) Die Curven $\lambda_1 = \varrho$, $\lambda_2 = \sigma$ sind, wie noch gezeigt werden soll, die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche.

Die einem bestimmten Complexe des Systems angehörigen Geraden erhält man, wenn man einen der Parameter, etwa λ_4, dem betreffenden λ gleichsetzt. Nimmt man zwei Parameter constant, etwa λ_3 und λ_4, so hat man die Linien der Congruenz, die den beiden Complexen $\lambda = \lambda_3$ und $\lambda = \lambda_4$ gemeinsam ist. Ist dabei gleichzeitig $\lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die *singulären Linien* des Complexes $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$. Durch den Werth von $\lambda_3 = \lambda_4$ wird also in jedem Tangentenbüschel der Kummer'schen Fläche diejenige Tangente bestimmt, die dem Complexe $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$ als singuläre Linie zugehört. Ist $\lambda_3 = \lambda_4 = k_\alpha$, so sind die singulären Linien *Doppeltangenten* der Kummer'schen Fläche, nämlich diejenigen, welche dem unter den Complexen des Systems befindlichen linearen (Fundamental-) Complexe $x_\alpha = 0$ angehören. — Sind drei Parameter constant, etwa λ_2, λ_3, λ_4, so erhält man die Erzeugenden der den drei Complexen $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, $\lambda = \lambda_4$ gemeinsamen Linienfläche. Ist dabei $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die singulären Linien des Complexes $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, welche die Kummer'sche Fläche osculiren. Wenn der gemeinsame Werth von $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ gleich k_α ist, so sind dies vierpunktig berührende Linien. Und zwar erhält man, wenn man α die Werthe 1 . . . 6 ertheilt, alle vierpunktig berührenden Linien der Kummer'schen Fläche, ausser denen, die die Berührungskegelschnitte in den 16 Doppelebenen tangiren*). — Endlich die Annahme, dass alle Parameter constant sind, ergiebt die den Complexen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, $\lambda = \lambda_4$ gemeinsamen 32 geraden Linien. Ist dabei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die 32 ausgezeichneten singulären Linien des Complexes $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, welche Tangenten der Berührungskegelschnitte in den Doppelebenen, bez. Erzeugende der Berührungskegel in den Doppelpunkten sind.

Die neuen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 wollen wir jetzt in die Gleichung

$$\Sigma d x_\alpha^2 = 0$$

einsetzen, welche ausdrückt, dass sich zwei consecutive Linien schneiden. Man findet:

$$\begin{aligned} 0 = d\lambda_1^2 \cdot & \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{f(\lambda_1)} \\ + d\lambda_2^2 \cdot & \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)}{f(\lambda_2)} \\ + d\lambda_3^2 \cdot & \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{f(\lambda_3)} \\ + d\lambda_4^2 \cdot & \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}{f(\lambda_4)} \,. \end{aligned}$$

*) Vergl. die Arbeit von Lie und mir: Ueber die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche. Monatsberichte der Berl. Akademie. 1870. December.

Diese Differentialgleichung wird nun in einigen Fällen ohne Weiteres quadrirbar.

Es tritt dies insbesondere ein für die Congruenzen je zweier Complexe des gegebenen Systems. Setzt man nämlich λ_3 und λ_4 constant, also $d\lambda_3$, $d\lambda_4$ gleich Null, so hebt sich der Factor $(\lambda_1 - \lambda_2)$ fort *und man erhält die Differentialgleichung der Umhüllungs-Curven der Congruenz in der Form:*

$$d\lambda_1 \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{f(\lambda_1)}} = d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{f(\lambda_2)}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\lambda_3 = \lambda_4$, so hat man *die Umhüllungs-Curven der singulären Linien des Complexes $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$.*

Ist insbesondere $\lambda_3 = \lambda_4 = k_\alpha$, so hat man *die Umhüllungs-Curven derjenigen Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche, die dem Complexe $x_\alpha = 0$ angehören.* Diese Doppeltangenten bilden bekanntlich eine allgemeine Congruenz zweiter Ordnung und zweiter Classe; für diese Congruenzen ist also das Problem 3) gelöst.

Setzt man in die vorstehende Differentialgleichung $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, so wird sie identisch befriedigt. Die Congruenz $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ ist also eine solche, in der jede Gerade alle ihre benachbarten schneidet. In der That stellen die Gleichungen $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, wie schon bemerkt, diejenigen Geraden dar, welche entweder in einer Doppelebene der Kummer'schen Fläche liegen oder durch einen Doppelpunkt hindurchgehen. Ihre Gesammtheit bildet eine Congruenz 16ter Ordnung und Classe, welche allerdings die geforderte Eigenschaft hat.

Endlich sei $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$. So wird die vorstehende Differentialgleichung:

$$d\lambda_1 = 0, \text{ also } \lambda_1 = \text{Const.}$$

Dies sind die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche. In Worten: Die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche werden jedesmal von solchen Punkten der Fläche gebildet, in welchen die zweite Haupttangente einem bestimmten Complexe des Systems als singuläre Linie angehört. Es sind dies dieselben Curven 16ter Ordnung, welche ich in dem früheren Aufsatze: Zur Theorie etc. (diese Annalen t. II.) in Nr. 18 betrachtet hatte. Dass die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche algebraische Curven der 16ten Ordnung sind, hat zuerst Lie gefunden, indem er seine Abbildung studirte, die Liniengeometrie in Kugelgeometrie, Haupttangenten-Curven in Krümmungs-Curven überführt. Sodann bemerkte ich die Identität der fraglichen Haupttangenten-Curven mit dem früher von mir untersuchten Curvensysteme, und bestimmte im Anschluss hieran die Singularitäten derselben. Diese Resultate haben Lie und ich in einer ge-

meinsamen Arbeit dargestellt*). Hierauf fand ich den hier vorgetragenen analytischen Beweis**) und erkannte endlich***), dass sich die ganze Bestimmungsweise der Haupttangenten-Curven durch die zugehörigen Complexe unter ein allgemeineres liniengeometrisches Theorem subsumirt, das dem Dupin'schen Theoreme der metrischen Geometrie entspricht. Dieses letztere ist in dem vorhergehenden Aufsatze ausführlicher dargelegt, und dort auch gezeigt worden, wie dasselbe die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche umfasst. — Es sei noch bemerkt, dass die 6 Haupttangenten-Curven $\lambda_1 = k_\alpha$ die Curven der vierpunktigen Berührung auf der Kummer'schen Fläche sind.

§ 4.

Bestimmung der Integralflächen der allgemeinen Complexe zweiten Grades.

Die Einführung der neuen Veränderlichen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 in die Differentialgleichung

$$\Sigma d x_\alpha^2 = 0$$

ergab:

$$0 = d\lambda_1^2{}_4 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{f(\lambda_1)} + \cdots\cdots$$

Die partielle Differentialgleichung, welche die speciellen Complexe charakterisirte:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

wird also nach bekannten Methoden übergehen in:

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}\right)^2 \cdot \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \cdots$$

Nun ist aber bekannt†), dass eine Differentialgleichung, wie die vorstehende, ohne Weiteres eine vollständige Lösung (mit drei willkürlichen Constanten) ergiebt, nämlich:

$$\varphi = \int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a)(\lambda_3 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_3)}}$$
$$+ \int d\lambda_4 \frac{\sqrt{(\lambda_4 - a)(\lambda_4 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_4)}} + C.$$

Lassen wir a, b, C der Reihe nach alle möglichen Werthe annehmen, so stellt auch die Gleichung

$$\varphi = 0$$

*) Monatsberichte der Berl. Akad. 1870. December.

**) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 1.

***) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 3.

†) Vergl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik.

dreifach unendlich viele specielle Complexe, dreifach unendlich viele Flächen dar. Jeder in der allgemeinen Lösung enthaltene Complex, d. h. jeder Complex, dessen Linien eine Fläche umhüllen, wird als Umhüllungsgebilde von zweifach unendlich vielen dieser Flächen erhalten.

Nun behaupte ich, *dass die Fläche* $\varphi = 0$ *mit den Constanten* a, b, C *gemeinsames Integral der beiden Complexe* $\lambda = a$ *und* $\lambda = b$ *ist**), d. h. dass das eine System Haupttangenten der Fläche dem Complexe $\lambda = a$, das andere dem Complexe $\lambda = b$ angehört, oder, was dasselbe ist, dass die Fläche mit dem Complexe $\lambda = a$, sowie mit dem Complexe $\lambda = b$ eine specielle Congruenz gemein hat.

Um dies zu beweisen, ist nur zu zeigen, dass der Differentialgleichung der speciellen Congruenzen:

$$\left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \cdot \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

Genüge geschieht, wenn man statt φ eine der hier gefundenen Flächen und statt ψ etwa $(\lambda_1 - a)$ oder $(\lambda_1 - b)$ nimmt. $\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2$ verschwindet aber, da φ ein specieller Complex. Es bleibt also nur noch:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = 0$$

oder, unter Anwendung der Coordinaten λ:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \cdots\cdots$$

Aber $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_3}$ verschwinden, da $\psi = \lambda_1 - a$, oder $\psi = \lambda_1 - b$ nur von λ_1 abhängt. Andererseits ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_4} = \frac{\sqrt{(\lambda_4 - a)(\lambda_4 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_4)}}$ und verschwindet, wenn $\lambda_1 = a$ oder $= b$ gesetzt wird. Der Differentialgleichung der speciellen Congruenzen wird also allerdings Genüge geleistet.

Der Werth der Constante C in der Gleichung von φ kommt dabei gar nicht in Betracht. Wir haben also den Satz: *Je zwei Complexe* $\lambda = a$, $\lambda = b$ *der zu der* Kummer'*schen Fläche gehörigen Schaar haben einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen.*

Lässt man ausser C auch noch b sich ändern, so erhält man zweifach unendlich viele Integralflächen des Complexes $\lambda = a$, also eine vollständige Lösung der mit dem Complexe verknüpften partiellen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung umfasst alle Flächen, die das Umhüllungsgebilde von einfach unendlich vielen Flächen aus

*) Dass zwei Complexe des Systems einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen haben, bildet den Ausgangspunkt der bez. Ueberlegungen von Lie.

der so bestimmten zweifach unendlichen Schaar sind. — *Hiernach ist das Problem* 2) *für allgemeine Complexe zweiten Grades erledigt.*

Die gefundenen Integralflächen, welche den Complexen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ gemeinsam sind, stehen zu den Umhüllungsgeraden der Congruenz $\lambda = a$, $\lambda = b$, welche im vorigen Paragraphen bestimmt wurden, in einer bemerkenswerthen Beziehung. Wir gelangen zu derselben durch folgende Ueberlegung.

In jedem Punkte einer solchen Integralfläche giebt es zwei Haupttangenten, von denen die eine $\lambda = a$, die andere $\lambda = b$ angehört. Die Fläche wird nach der einen Geraden von dem einen Complexkegel, nach der anderen von dem anderen Complexkegel berührt. Fallen die beiden Haupttangenten zusammen, so müssen sich die beiden Kegel gegenseitig berühren. Das heisst, anders ausgesprochen: Die parabolischen Punkte der Integralfläche liegen auf der Brennfläche der Congruenz $\lambda_3 = a$, $\lambda_4 = b$. Setzen wir aber in der Gleichung der Integralfläche, um das Gesetz der parabolischen Tangenten zu finden, $\lambda_3 = a$ und $\lambda_4 = b$, so kommt:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + C = 0.$$

Das aber ist, nach dem vorigen Paragraphen, eine der Umhüllungs-Curven der Congruenz der Complexe λ_3 und λ_4. Nach dieser Umhüllungs-Curve wird die Brennfläche von der Integralfläche geschnitten, ihre Tangenten sind gleichzeitig die parabolischen Tangenten der letzteren. Die parabolischen Tangenten einer Fläche können aber, wie man zeigen kann, nicht anders eine Curve umhüllen (dieselbe müsste denn eben sein, was hier auszuschliessen ist), als wenn die Curve eine Rückkehrcurve ist. So haben wir denn den Satz:

Die parabolische Curve der Integralfläche ist eine Rückkehrcurve derselben. Sie liegt auf der Brennfläche der Congruenz $\lambda_3 = a$, $\lambda_4 = b$ *und ist eine der Umhüllungs-Curven der Congruenz.*

Aus der Bedeutung der Singularitätenfläche folgt ferner, dass die Integralfläche überall dort, wo sie die Singularitätenfläche trifft, sie berühren muss. Denn der Complexkegel a oder b, der von einem Punkte der Singularitätenfläche ausgeht, hat sich in ein Ebenenpaar aufgelöst, dessen Durchschnitt, die zugeordnete singuläre Linie, die Singularitätenfläche berührt. Die Integralfläche kann den ausgearteten Kegel nicht anders berühren, als indem sie die singuläre Linie berührt. Die Integralfläche berührt also in jedem Punkte, in welchem sie die Singularitätenfläche trifft, die beiden zugehörigen singulären Linien der Complexe a und b, d. h. sie berührt die Singularitätenfläche selbst.

Wir erhalten die singulären Linien des Complexes a, die zu den

Punkten der Berührungscurve gehören, wenn wir in der Gleichung der Integralfläche $\lambda_3 = \lambda_4 = a$ setzen. So bleibt:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + C = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt mit $\lambda_3 = \lambda_4 = a$ zusammen die fraglichen singulären Linien. Andererseits können wir sie — da nach dem vorigen Paragraphen λ_1 und λ_2 als Coordinaten eines Punktes auf der Singularitätenfläche angesehen werden können — geradezu für die Gleichung der Berührungscurve halten. Wir haben so den Satz:

Die Integralfläche berührt die Singularitätenfläche nach Erstreckung einer Curve, deren Gleichung die vorstehende ist.

Die Singularitätenfläche entspricht also einer *singulären Lösung* der mit dem Complexe verknüpften Differentialgleichung in dem Sinne, als dieselbe von allen Integralflächen des Complexes nach einer Curve berührt wird.

Wir mögen endlich noch das Folgende bemerken. Setzen wir in der Gleichung einer Integralfläche des Complexes a, $\lambda_4 = a$, so kommt zur Darstellung der bezüglichen dem Complexe a angehörigen speciellen Congruenz:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a)(\lambda_3 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_3)}} + C = 0.$$

Nun sind die hier vorkommenden Integrale hyperelliptische, die $p = 3$ entsprechen. Es ist also durch die vorstehende Gleichung ein Umkehrproblem indicirt. Wir schreiben sie zu diesem Zwecke in der Form:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots\cdots = u$$

und verknüpfen sie mit zwei ähnlich gebauten Gleichungen, deren Integrale sich aus den vorstehenden durch Differentiation nach den Parametern a, b ergeben:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{\lambda_1 - b}}{\sqrt{\lambda_1 - a} \, . \sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots = v$$

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{\lambda_1 - a}}{\sqrt{\lambda_1 - b} \, . \sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots = w.$$

Diese Gleichungen dienen dazu, um die λ_1, λ_2, λ_3, und weiterhin die $x_1 \ldots . x_6$ der Complexlinie durch die u, v, w ausdrücken. Und da x_α mit den λ durch eine Gleichung von der symmetrischen Form:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - a)}{f(k_\alpha)}$$

zusammenhängt, drücken sich die x_α geradezu als hyperelliptische Functionen der u, v, w aus.

Die Coordinaten x_α der Linien eines Linien-Complexes zweiten Grades sind hiermit unter Zugrundelegung eines zweiten Complexes als

sechsfach periodische hyperelliptische Functionen dreier Parameter u, v, w dargestellt.

Es wurde bereits wiederholt hervorgehoben, wie das von Flächen vierter Ordnung mit imaginärem Doppelkreise gebildete Orthogonalsystem dem System der Linien-Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche entspricht. Man übersieht, wie man für diese Flächen ähnlich wie für diese Complexe einen Satz aufzustellen hat, der dahin geht: *dass sich die Coordinaten der Punkte einer Fläche des Orthogonalsystems als vierfach periodische hyperelliptische Functionen zweier Parameter darstellen lassen.* Diesen Satz hat Herr Darboux in den Comptes Rendus (LXIII, 1859, 1. Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces) ohne Beweis angegeben; er hebt besonders hervor, wie derselbe auf allgemeine Flächen dritten Grades Anwendung findet, da drei unter den Flächen des Orthogonalsystems allgemeine Flächen dritten Grades sind. Ein ähnlicher Satz gilt offenbar für die entsprechenden Gebilde bei beliebig viel Dimensionen.

Noch zu einem zweiten Umkehrprobleme wird man geführt, nämlich durch die Gleichung der Umhüllungscurven der singulären Linien:

$$\int \frac{d\lambda_1(\lambda_1 - a)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2(\lambda_2 - a)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + C = 0,$$

da auch für sie die Zahl der summirten Integrale mit dem p der auftretenden hyperelliptischen Functionen übereinstimmt. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$\int \frac{d\lambda_1(\lambda_1 - a)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2(\lambda_2 - a)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} = u,$$

und nehmen eine ähnliche Gleichung hinzu:

$$\int \frac{d\lambda_1(\lambda_1 - b)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2(\lambda_2 - b)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} = v,$$

Es sind dies zwei Schaaren auf der allen Complexen gemeinsamen Singularitätenfläche (der Kummer'schen Fläche) verlaufender Curven: die Umhüllungscurven der singulären Linien der Complexe $\lambda = a$ und $\lambda = b$. Indem wir statt u und v lineare Combinationen derselben setzen, können wir insbesondere a und b gleich zweien der 6 Grössen k_α nehmen. Dann stellen die vorstehenden Gleichungen zwei der Schaaren von Umhüllungscurven vor, welche die 6 Doppeltangentensysteme der Fläche besitzen. *Mit Bezug auf je zwei solche Curvensysteme sind dann die Coordinaten der Punkte der Kummer'schen Fläche als vierfach periodische hyperelliptische Functionen dargestellt.*

Für besondere Linien-Complexe zweiten Grades vereinfachen sich natürlich die in den hier genannten Umkehrproblemen auftretenden hyperelliptischen Functionen. Sind z. B. die k_α paarweise gleich, so werden sie Logarithmen. Der Complex ist dann in den bekannten Complex übergegangen, dessen Geraden ein festes Tetraeder nach con-

stantem Doppelverhältnisse schneiden. Die Singularitätenfläche ist in dies Tetraeder ausgeartet. In der That sind die gemeinsamen Integralflächen zweier zu dem nämlichen Tetraeder gehörigen Complexe durch eine Gleichung zwischen den Logarithmen der Coordinaten, nämlich durch eine lineare Gleichung zwischen denselben dargestellt. Es sind dies dieselben Flächen, die Lie und ich unter der Bezeichnung „Flächen W" untersucht*) und deren Analoga in der Ebene wir neuerdings in einem gemeinsamen Aufsatze in diesen Annalen**) betrachtet haben.

---

*) Comptes Rendus. 1870, 1. Sur une certaine classe de courbes et de surfaces. Die Auffassung der Flächen W als gemeinsamer Integralflächen zweier zu dem nämlichen Tetraeder gehöriger Complexe gehört Lie.

**) Ueber diejenigen ebenen Curven etc. Diese Annalen. Bd. IV, 1.

Göttingen, im November 1871.

Bemerkungen über die Enveloppe einer Fläche.

Von A. Enneper in Göttingen.

Sind x, y, z orthogonale Coordinaten, bezeichnet man durch t einen Parameter, setzt zur Abkürzung:

$$F(x, y, z, t) = f, \; \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

so heisst bekanntlich nach Monge die Curve, bestimmt durch die Gleichungen

$$f = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

eine Charakteristik der Enveloppe der Fläche $f = 0$. Für den Fall, dass in der Gleichung (1) t als Constante angesehen wird, sollen alle vorkommenden Differentialquotienten auf gewöhnliche Art bezeichnet werden; ist aber t in der Gleichung (1) eine Function von x, y, z, in Folge der Gleichung (2), so sollen die entsprechenden Differentialquotienten durch eckige Klammern hervorgehoben werden. Die Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) der eingehüllten Fläche mit den Coordinatenaxen bildet, seien a, b, c. Ist H durch die Gleichung bestimmt:

$$H^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2, \tag{3}$$

so hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = H \cos a, \; \frac{\partial f}{\partial y} = H \cos b, \; \frac{\partial f}{\partial z} = H \cos c. \tag{4}$$

Sieht man in (2) t als Function von x, y, z an, so folgt durch Differentiation in Beziehung auf diese Variabeln:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial z} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) geben die vorstehenden Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\dfrac{\partial t}{\partial x} = -H\dfrac{\partial \cos a}{\partial t} - \cos a\dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\dfrac{\partial t}{\partial y} = -H\dfrac{\partial \cos b}{\partial t} - \cos b\dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\dfrac{\partial t}{\partial z} = -H\dfrac{\partial \cos c}{\partial t} - \cos c\dfrac{\partial H}{\partial t}. \end{cases}$$

In dem gemeinschaftlichen Punkte (x, y, z) der eingehüllten und der einhüllenden Fläche seien für die erstere r' und r'', für die zweite r_1' und r_1'' die Hauptkrümmungshalbmesser. Man weiss, dass die Ausdrücke $r' + r''$ und $r'r''$ Functionen der Differentialquotienten von $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ nach x, y und z sind. Da nun in einem gemeinschaftlichen Punkte für die einhüllende Fläche $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ dieselben Werthe haben wie für die eingehüllte Fläche, so finden die Gleichungen statt:

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1''} = \left[\frac{\partial \cos a}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial \cos b}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1' r_1''} = {} & \left[\frac{\partial \cos a}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial \cos b}{\partial y}\right] - \left[\frac{\partial \cos a}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial \cos b}{\partial x}\right] \\ & + \left[\frac{\partial \cos a}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial \cos a}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial \cos c}{\partial x}\right] \\ & + \left[\frac{\partial \cos b}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial \cos b}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial \cos c}{\partial y}\right]. \end{aligned}$$

Sind die Differentialquotienten auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen nicht durch eckige Klammern hervorgehoben, so sind die linken Seiten gleich $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$ und $\frac{1}{r'r''}$. Man setze nun in den obigen Gleichungen

$$\left[\frac{\partial \cos a}{\partial x}\right] = \frac{\partial \cos a}{\partial x} + \frac{\partial \cos a}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}, \text{ etc.}$$

und bilde die Differenzen:

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1''} - \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right), \quad \frac{1}{r_1' r_1''} - \frac{1}{r'r''}.$$

Diese Differenzen sind lineare Ausdrücke von $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial z}$. Substituirt man für diese Differentialquotienten ihre Werthe aus (5), so findet man, dass in Folge der Gleichung $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, in beiden Fällen der Factor von $\frac{\partial H}{\partial t}$ verschwindet. Setzt man zur Vereinfachung:

$$(6)\qquad D^2 = \left(\frac{\partial \cos a}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos b}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos c}{\partial t}\right)^2,$$

so findet man die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_1''}-\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)\frac{1}{H}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=D^2, \tag{7}$$

$$\left(\frac{1}{r_1' r_1''}-\frac{1}{r' r''}\right)\frac{1}{H}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}= \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}+\frac{\partial\cos b}{\partial y}+\frac{\partial\cos c}{\partial z}\right)\left\{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2\right\}$$

$$-\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial\cos a}{\partial t}+\frac{\partial\cos b}{\partial x}\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\frac{\partial\cos c}{\partial x}\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)\frac{\partial\cos a}{\partial t}$$

$$-\left(\frac{\partial\cos a}{\partial y}\frac{\partial\cos a}{\partial t}+\frac{\partial\cos b}{\partial y}\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\frac{\partial\cos c}{\partial y}\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)\frac{\partial\cos b}{\partial t}$$

$$-\left(\frac{\partial\cos a}{\partial z}\frac{\partial\cos a}{\partial t}+\frac{\partial\cos b}{\partial z}\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\frac{\partial\cos c}{\partial z}\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)\frac{\partial\cos c}{\partial t}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente zur Charakteristik im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, so geben die Gleichungen (1) und (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\cos\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t}\cos\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t}\cos\gamma=0,$$

oder nach (4):

$$\cos\alpha\cos a+\cos\beta\cos b+\cos\gamma\cos c=0,$$

$$\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial t}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial t}=0. \tag{9}$$

Durch diese Gleichungen und die Gleichung:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{10}$$

sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bestimmt. Der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, welcher durch die Tangente zur Charakteristik im Punkte (x, y, z) geht, werde durch R bezeichnet. Es ist dann:

$$\frac{1}{R}=\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial x}\right)\cos\alpha$$

$$+\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial y}\right)\cos\beta$$

$$+\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial z}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial z}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial z}\right)\cos\gamma.$$

Der Term:

$$\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial x}\right)\cos\alpha$$

lässt sich in Folge der Gleichungen (9) und (10) als Produkt zweier Determinanten dritten Grades darstellen; führt man die Multiplication

aus, verfährt analog mit den beiden übrigen Termen von $\frac{1}{R}$, so erhält man für

$$\frac{D^2}{R}$$

einen Ausdruck, welcher genau gleich der rechten Seite der Gleichung (8) ist, wo wieder D durch die Gleichung (6) bestimmt ist. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{1}{r_1' r_1''} - \frac{1}{r' r''}\right) \frac{1}{H} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{D^2}{R}. \tag{11}$$

Die vorstehende Gleichung durch die Gleichung (7) dividirt giebt:

$$\frac{1}{r_1' r_1''} - \frac{1}{r' r''} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$$

oder auch:

$$\frac{r_1' + r_1'' - R}{r' + r'' - R} = \frac{r_1' r_1''}{r' r''}. \tag{12}$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Für die einhüllende und eingehüllte Fläche verhalten sich in einem gemeinschaftlichen Punkte die Summen der Hauptkrümmungshalbmesser, vermindert um den Krümmungshalbmesser des Normalschnitts durch die Tangente der Charakteristik, zu einander, wie die Produkte der Hauptkrümmungshalbmesser.

Es ist selbstverständlich, dass alle in den Gleichungen (7), (8) und (9) vorkommenden Differentialquotienten so gebildet sind, als ob in den Werthen von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ und in $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ die Quantitäten x, y, z und t von einander unabhängig wären; nach Ausführung der Differentiation kann man den erhaltenen Ausdruck mittelst der Gleichung $f = 0$ transformiren. Die Gleichungen (7) und (8), welche wegen ihrer Symmetrie der Beachtung nicht unwerth erscheinen, sind zur Aufstellung der Gleichung (12) nicht absolut nothwendig, wie durch folgende geometrische Betrachtung erhellt. Die Charakteristik möge im Punkte (x, y, z) der eingehüllten Fläche, mit dem Normalschnitt, dessen Krümmungshalbmesser r' ist, den Winkel φ bilden; ferner sei φ_1 der Winkel, welchen die Charakteristik auf der einhüllenden Fläche mit dem Normalschnitt bildet, dessen Krümmungshalbmesser r_1' ist. Da nun in einem gemeinschaftlichen Punkte für beide Flächen der Krümmungshalbmesser R des Normalschnitts durch die Tangente der Charakteristik denselben Werth hat, so ist nach einem bekannten Theorem Euler's:

$$\frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''} = \frac{1}{R}, \quad \frac{\cos^2\varphi_1}{r_1'} + \frac{\sin^2\varphi_1}{r_1''} = \frac{1}{R}. \tag{13}$$

Die Normalen zu einer Fläche längs einer Curve auf derselben bilden eine windschiefe Fläche, auf welcher die Folgereihe der Punkte, für

welche die successiven Normalen ihre kürzesten Distanzen von einander haben, eine Curve, die sogenannte Strictionslinie bilden. Bezeichnet man durch R_0 die Distanz des Punktes (x, y, z) einer Fläche von dem Punkte der Strictionslinie, welcher mit dem ersteren Punkte auf derselben Normalen liegt, so hat man für eine Curve,

$$\frac{\cos^2\varphi}{r'^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r''^2} = \frac{1}{RR_0}, \tag{14}$$

wo φ dieselbe Bedeutung wie vorhin hat. Da nun längs einer Charakteristik einhüllende und eingehüllte Fläche dieselben Normalen haben, so haben für beide Flächen R und R_0 dieselben Werthe. Analog der Gleichung (14) ist also auch:

$$\frac{\cos^2\varphi_1}{r_1'^2} + \frac{\sin^2\varphi_1}{r_1''^2} = \frac{1}{RR_0}.$$

Setzt man die beiden Werthe von RR_0 einander gleich, substituirt für φ und φ_1 ihre Werthe aus (13), so ergiebt sich wieder die Gleichung (12).

Der Ausdruck der geodätischen Krümmung der Charakteristik lässt sich auf eine bemerkenswerthe Form bringen. Sei ∂s das Bogenelement und ϱ der Krümmungshalbmesser der bemerkten Curve im Punkte (x, y, z), durch λ, μ, ν seien die Winkel bezeichnet, welche ϱ mit den Coordinatenaxen bildet. Für eine beliebige Function q von x, y, z ist dann:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial q}{\partial z}\cos\gamma, \tag{15}$$

wo wieder $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ durch die Gleichungen (9) und (10) bestimmt sind. Um nun ϱ zu finden, differentiire man die beiden Gleichungen (9) nach s, mit Rücksicht auf die Gleichung (15). Um das Resultat von vorne herein möglichst zu vereinfachen, multiplicire man die zweite Gleichung vor der Differentiation mit $\frac{1}{D}$. Man findet dann:

$$\begin{aligned}(16)\quad &(\cos a\cos\lambda + \cos b\cos\mu + \cos c\cos\nu)\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R} = 0,\\ &\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\cos\lambda + \frac{\partial\cos b}{\partial t}\cos\mu + \frac{\partial\cos c}{\partial t}\cos\nu\right)\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{T} = 0,\end{aligned}$$

wo R die frühere Bedeutung hat und T durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)\cos\gamma.$$

Auf diese Gleichung wende man die Formel (15) an, stelle mittelst der Gleichungen (9) und (10) das Produkt aus $\cos\alpha$ in:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)\cos\gamma$$

wieder als Product zweier Determinanten dritten Grades dar und führe die Multiplication aus. Man erhält dann:

$$(17)\quad \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos a}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos b}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos c}{\partial t}\right)$$
$$+ \frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos a}{\partial t}\left(\cos a\,\frac{\partial \cos a}{\partial x} + \cos b\,\frac{\partial \cos a}{\partial y} + \cos c\,\frac{\partial \cos a}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos b}{\partial t}\left(\cos a\,\frac{\partial \cos b}{\partial x} + \cos b\,\frac{\partial \cos b}{\partial y} + \cos c\,\frac{\partial \cos b}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos c}{\partial t}\left(\cos a\,\frac{\partial \cos c}{\partial x} + \cos b\,\frac{\partial \cos c}{\partial y} + \cos c\,\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right).$$

Im Factor von $\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos a}{\partial t}$ setze man

$$\cos a\,\frac{\partial \cos a}{\partial x} = -\cos b\,\frac{\partial \cos b}{\partial x} - \cos c\,\frac{\partial \cos c}{\partial x},$$

der bemerkte Factor wird dann:

$$\cos b\left(\frac{\partial \cos a}{\partial y} - \frac{\partial \cos b}{\partial x}\right) + \cos c\left(\frac{\partial \cos a}{\partial z} - \frac{\partial \cos c}{\partial x}\right).$$

Mittelst der Gleichungen (4) lässt sich dieser Ausdruck auf die Form bringen:

$$\frac{1}{H}\,\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\cos a}{H}\left(\cos a\,\frac{\partial H}{\partial x} + \cos b\,\frac{\partial H}{\partial y} + \cos c\,\frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Transformirt man analog die Factoren von $\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos b}{\partial t}$ und $\frac{1}{D}\,\frac{\partial \cos c}{\partial t}$ in der Gleichung (17), so lässt sich $\frac{H}{T}$ auf die folgende merkwürdige Form bringen:

$$(18)\quad \frac{H}{T} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{D}\,\frac{\partial \cos a}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H}{D}\,\frac{\partial \cos b}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H}{D}\,\frac{\partial \cos c}{\partial t}\right).$$

Die Gleichungen (16) in Verbindung mit

$$\cos\alpha\,\cos\lambda + \cos\beta\,\cos\mu + \cos\gamma\,\cos\nu = 0$$

führen auf:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}.$$

Hieraus folgt, dass T der Krümmungshalbmesser der planen Curve ist, in welche die Charakteristik übergeht, durch Abwicklung der developpablen Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen zur einhüllenden Fläche längs der Charakteristik. Ist diese Curve eine kürzeste Linie auf der einhüllenden Fläche, so muss die rechte Seite der Gleichung (18) verschwinden. Für die Gleichung (18) gilt dieselbe Bemerkung wie für die Gleichungen (7) und (8), $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ sind mittelst der Gleichungen (3) und (4) zu bilden, durch die blossen partiellen Differentialquotienten einer Function f; solange für die folgenden Rechnungen x, y, z, t als unabhängige Variable gelten, dürfen natürlich in den erhaltenen Ausdrücken keinerlei Reductionen mittelst der Gleichung $f = 0$ vorgenommen werden.

Ueber die Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen.

Von Julius König in Pest.

Die Verschiedenheit der speciellen Methoden, welche die Entwickelung gegebener Functionen in Reihen geben, die z. B. nach Potenzen, Kugelfunctionen, Bessel'schen u. a., fortschreiten, führt unmittelbar zu der Frage, ob nicht für diese Theorien eine umfassendere Behandlungsweise möglich wäre. In der That soll in dem Folgenden gezeigt werden, dass alle diese und ähnliche Entwicklungen specielle Fälle einer allgemeinen Darstellung sind, die nach zwei Arten von Entwickelungsfunctionen fortschreitet. Der vorliegende Abschnitt entwickelt die Grundzüge der allgemeinen Theorie für Functionen einer Variabeln; ich werde sodann im Anschluss die Verallgemeinerung der Theorie für Functionen mehrerer Variabeln betrachten und auf den vielfachen Zusammenhang eingehen, der zwischen den Entwickelungsfunctionen beider Art besteht, sowie Entwickelungen untersuchen, die eine auf einer Linie beliebig gegebene Function darstellen.

Erster Abschnitt.

Darstellung analytischer Functionen einer Variabeln in endlichen Bereichen.

§ 1.

Einführung der ursprünglichen Entwickelungsfunctionen.

Sei eine Reihe von Functionen

$$G_0(z),\quad G_1(z),\quad G_2(z),\ \ldots\ldots$$

gegeben, die sich nach einem bestimmten Gesetz ins Unendliche fortsetzt und denen wir vorläufig nur die eine Eigenschaft beilegen, dass sie sich in der Umgebung eines Punktes $z = c$ sämmtlich nach aufsteigenden Potenzen von $z - c$ entwickeln lassen. Ganz dasselbe in Bezug auf die Variable z_0 setzen wir für die Functionenreihe

$$F_0(z_0), \quad F_1(z_0), \quad F_2(z_0), \;\ldots.$$

fest. Dann soll die Reihe

$$(1) \qquad F_0(z_0)\,G_0(z) + F_1(z_0)\,G_1(z) + F_2(z_0)\,G_2(z) + \cdots\cdots$$

den Gegenstand der Untersuchung bilden. Dabei setzen wir im Augenblick noch voraus, dass diese Reihe für endliche Bereiche der Variabeln convergirt. Sie stellt dann in demselben eine endliche, eindeutige und stetige Function der Variabeln z und z_0 dar, die wir mit $\Phi(z, z_0)$ bezeichnen wollen.

Wann ist diese Function zweier Argumente z und z_0 in Wirklichkeit nur Function des einen Arguments $z + z_0$? D. h. wann besteht die Functionalgleichung

$$\Phi(z,\, z_0 + h) = \Phi(z + h\,,\, z_0).$$

Es stellt hierin h eine Grösse dar, die in den durch den Convergenzbereich gegebenen Grenzen beliebig variiren darf. Setzt man nämlich für Φ die dasselbe darstellende Reihe, so erhält man:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &F_0(z_0+h)\,G_0(z) + F_1(z_0+h)\,G_1(z) + F_2(z_0+h)\,G_2(z) + \cdots\cdots = \\ &= F_0(z_0)\,G_0(z+h) + F_1(z_0)\,G_1(z+h) + F_2(z_0)\,G_2(z+h) + \cdots\cdots \end{aligned}$$

und es müssen also auch die Argumente $z_0 + h$ und $z + h$ in den Convergenzbereichen liegen. — Für jedes z und z_0, das im Innern des angegebenen Bereiches liegt, werden die G- und F-Functionen auch nach Potenzen von h entwickelbar sein; wenn man nun diese Entwickelung für jeden Posten in (2) wirklich ausführt, wird die Gleichung, da sie für alle h in einem endlichen Bereiche stattfindet, nur so bestehen können, wenn die Coefficienten jeder einzelnen Potenz von h gleich werden. Die Vergleichung ergiebt folgende Reihe von Relationen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &F_0'(z_0)\;G_0(z) \;+ F_1'(z_0)\;G_1(z) \;+ F_2'(z_0)\;G_2(z) \;+ \cdots\cdots = \\ &= F_0(z_0)\;G_0'(z) \;+ F_1(z_0)\;G_1'(z) \;+ F_2(z_0)\;G_2'(z) \;+ \cdots\cdots \\ &F_0''(z_0)\;G_0(z) \;+ F_1''(z_0)\;G_1(z) \;+ F_2''(z_0)\;G_2(z) \;+ \cdots\cdots = \\ &= F_0(z_0)\;G_0''(z) \;+ F_1(z_0)\;G_1''(z) \;+ F_2(z_0)\;G_2''(z) \;+ \cdots\cdots \\ &F_0'''(z_0)\;G_0(z) \;+ F_1'''(z_0)\;G_1(z) \;+ F_2'''(z_0)\;G_2(z) \;+ \cdots\cdots = \\ &= F_0(z_0)\;G_0'''(z) \;+ F_1(z_0)\;G_1'''(z) \;+ F_2(z_0)\;G_2'''(z) \;+ \cdots\cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} F_\varrho^{(n)}(z_0)\,G_\varrho(z) = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} F_\varrho(z_0)\,G_\varrho^{(n)}(z)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Sind die Relationen (3) sämmtlich erfüllt, so wird dann:

$$(4) \quad \Phi(z + z_0) = F_0(z_0)\,G_0(z) + F_1(z_0)\,G_1(z) + F_2(z_0)\,G_2(z) + \cdots$$

Da die F von z unabhängig sind, wird man sie durch Einsetzen eines bestimmten Werthes von z erhalten können. In einem speciellen Falle, der als Grundlage der folgenden Entwickelungen dienen soll, bestimmen sich auf diese Weise die F durch recurrirende Formeln. Dazu soll die Entwickelung von $G_\varrho(z)$ in der Umgebung von $z = c$ mit der ϱ^{ten} Potenz von $z - c$ beginnen; oder *es möge mit anderen Worten* $G_\varrho(z)$ *für* $z = c$ *von der* ϱ^{ten} *Ordnung Null werden.*

Dann ist

$$G_\varrho^{(n)}(c) = 0,$$

sobald

$$\varrho > n.$$

Die Relationen (4) und (3) gehen unter dieser Voraussetzung für $z = c$ in folgende über:

$$(5)\quad \begin{aligned}
G_0(c)\,F_0(z_0) &= \Phi(z_0 + c)\\
G_0(c)\,F_0'(z_0) &= F_0(z_0)\,G_0'(c) + F_1(z_0)\,G_1'(c)\\
G_0(c)\,F_0''(z_0) &= F_0(z_0)\,G_0''(c) + F_1(z_0)\,G_1''(c) + F_2(z_0)\,G_2''(c)\\
G_0(c)\,F_0'''(z_0) &= F_0(z_0)\,G_0'''(c) + F_1(z_0)\,G_1'''(c) + F_2(z_0)\,G_2'''(c) + F_3(z_0)\,G_3'''(c).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ist man umgekehrt von bestimmten G-Functionen ausgegangen, welche die geforderten Eigenschaften besitzen, *und bestimmt für ein gegebenes* $\Phi(z + z_0)$ *die* F *aus* (5), *so stellt auch die Reihe*

$$F_0(z_0)\,G_0(z) + F_1(z_0)\,G_1(z) + F_2(z_0)\,G_2(z)$$

die Function $\Phi(z + z_0)$ *dar in der Umgebung von* $z = c$, *wenn sie daselbst überhaupt convergirt, und die Function* Φ *endlich eindeutig und stetig ist.*

Um dies zu beweisen, müssen wir nur bemerken, dass im Punkte $z = c$ sämmtliche Ableitungen der Function mit denen der Reihe übereinstimmen. Nach einem von H. Laurent*) bewiesenen Satze wird die Ableitung einer Reihe

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \cdots$$

dargestellt durch die Reihe der Ableitungen der einzelnen Glieder

$$\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \varphi_3'(x) + \cdots.$$

und zwar in dem ganzen Bereiche, in welchem die erste Reihe convergirt, wo dann natürlich die φ endlich, eindeutig und stetig verlaufen müssen. Da dies der Annahme nach oben der Fall ist, wird die n^{te} Ableitung der Reihe nach z im Punkte $z = 0$ sein:

$$F_0(z_0)\,G_0^{(n)}(c) + F_1(z_0)\,G_1^{(n)}(c) + \cdots + F_{n-1}(z_0)\,G_{n-1}^{(n)}(c) + F_n(z_0)\,G_n^{(n)}(c),$$

*) Thése, présentée à la faculté des sciences de Nancy, und auch in seiner Théorie des résidus p. 100.

da die ferneren Glieder für $z = c$ verschwinden. Das ist aber nach (5) nichts anderes, als:

$$G_0(c) \,.\, F_0^{(n)}(z_0)\,,$$

oder wie man aus der ersten Gleichung der (5) ersieht:

$$\left(\frac{d^n \Phi(z+z_0)}{dz^n}\right)_{z=c}.$$

Es folgt hieraus, dass, so lange die Reihe convergirt und $\Phi(z+z_0)$ endlich stetig und eindeutig verläuft, die Reihe die Function $\Phi(z+z_0)$ auch wirklich darstellt. Man sieht aber auch leicht, dass die Reihe

$$F_0(z_0)\,G_0(z) + F_1(z_0)\,G_1(z) + F_2(z_0)\,G_2(z) + \cdots\cdots$$

keinesfalls convergirt, sobald die Function $\Phi(z+z_0)$ eine Unstetigkeit darbietet. Es muss dann eine Ableitung von Φ, also auch die linke Seite einer Gleichung (5) unendlich werden. Ist dies mit der r^{ten} der Fall, so wird der r^{te} Coefficient der Reihe unendlich und die Reihe divergirt.

Dass die betrachtete Reihe für $z = c$ einen endlichen Werth besitzt, ist nach den angenommenen Eigenschaften der G evident. Wir wissen auch, dass dieselbe nicht bloss in dem einen Punkte, sondern in einem wenn auch noch so kleinen Bereiche um denselben, einen endlichen Werth besitzt*) und haben auf diese Weise den folgenden Satz erhalten:

Eine Function $\Phi(z+z_0)$ ist entwickelbar in eine Reihe, die nach den Functionen $G_0(z)$, $G_1(z)$, ... fortschreitet, wenn sie endlich, stetig und eindeutig ist in der Nähe des Punktes $c + z_0$.

Die von den Entwickelungsfunctionen vorausgesetzten Eigenschaften sind, dass sie sich um den Punkt c in Reihen entwickeln lassen, die nach Potenzen von $z - c$ fortschreiten und dass hierbei die Entwickelung von $G_\varrho(z)$ mit der ϱ^{ten} Potenz von $z - c$ beginne.

Zum Schlusse dieses Paragraphen noch die Bemerkung, dass die Taylor'sche Reihe selbst, wie diess für eine systematische Herleitung wünschenswerth scheint, sich nach denselben Principien entwickeln lässt. Man kann hierzu von der für die ganze Ebene gültigen Reihe für die Exponentialgrösse ausgehen, die mit elementaren Mitteln erhalten werden kann. Multiplicirt man ihre Glieder einzeln mit Functionen von z_0 und fragt, unter welchen Bedingungen diese Reihe eine Function von $z + z_0$ darstellt, so erhält man die Bestimmung der Coefficienten, sowie die Grenzen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe.

---

*) Weil sämmtliche Differentialquotienten endlich sind.

§ 2.

Reihen, die nach Potenzen einer gegebenen Function fortschreiten.

Bevor wir die Untersuchung der entwickelten allgemeinen Reihen wieder aufnehmen, wollen wir uns mit einem speciellen Falle derselben beschäftigen, welcher die Grundlage für jene abgeben wird. Die Reihen der angegebenen Form sind schon von Bürmann aufgestellt; eine genauere Untersuchung für den Fall, dass die zu Grunde gelegte Function rational sei, hat Puiseux*) gegeben. — Wir bemerken zuerst, dass die Relationen (5) des vorigen Paragraphen für die wirkliche Berechnung der Reihen sehr geeignete Formeln geben. Es ist jetzt:

(1) $$G_n(z) = [\psi(z)]^n,$$

wo $\psi(z)$ in der Umgebung von $z = c$ in eine nach Potenzen von $z - c$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, in welcher das constante Glied fehlt. Dann ist:

$$G_0(c) = 1$$
$$G_0'(c) = G_0''(c) = \cdots = 0,$$

also:

$$F_0(z_0) = \Phi(z_0 + c)$$
$$F_0'(z_0) = F_1(z_0)\, G_1'(c)$$
$$F_0''(z_0) = F_1(z_0)\, G_1''(c) + F_2(z_0)\, G_2''(c).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man erhält demnach die Entwickelung einer gegebenen Function in der Form:

(3) $$\Phi(z + z_0) = F_0 + F_1\psi(z) + F_2\psi(z)^2 + \cdots.$$

Es wird nun die Convergenz dieser Reihe zu untersuchen sein. Wir bemerken vor Allem, dass wir den *Convergenzbereich* einer Reihe von ihrem *Darstellungs*bereich zu unterscheiden haben. Man weiss wohl, dass in einem zusammenhängenden Bereich Reihen der betrachteten Art eine bestimmte Function darstellen. Unsere Reihen convergiren aber im Allgemeinen für verschiedene mit einander nicht weiter zusammenhängende Bereiche. Und es zeigt sich in der That, dass sie in verschiedenen Stücken auch verschiedene Functionen darstellen. — Zweitens werden wir von dem *endlichen Convergenzbereich* der Reihe die *singulären Punkte und Linien* zu trennen haben, in denen die Reihe einen endlichen Werth besitzen mag. Man weiss, dass das Cauchy'sche Kriterium sich nur auf jenen bezieht. Mit Hülfe desselben erhält man für diesen Bereich

*) Liouville XV. art. 18. Die erwähnten Entwickelungen beziehen sich jedoch nur auf $z_0 = 0$.

$$\text{mod}\ \psi(z) < \text{mod}\ .\ \lim \left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)_{n=\infty}$$

Soll überhaupt Convergenz stattfinden, so muss die Grenze des Quotienten rechts eine bestimmte Grösse sein, die nicht Null ist. Die Ungleichung

$$\text{mod}\ \psi(z) < \lambda$$

stellt dann Flächenstücke dar, die von den durch die Gleichung

$$\text{mod}\ \psi(z) = 0$$

gegebenen Punkten ausgehend, durch diese Punkte umschliessende, einfach geschlossene Curven begrenzt werden.*) Für grössere Werthe des λ beginnen die Curven und die bisher um jede Wurzel der Gleichung $\psi(z) = 0$ getrennt liegenden Flächenstücke sich zu vereinigen. Wir werden zeigen, dass λ in keinem Falle so gross werden kann.

Nach dem schon angeführten Laurent'schen Satz erhält man aus (3) durch Differentiation nach z:

$$(4)\quad \Phi'(z+z_0) = F_1\psi'(z) + 2F_2\psi(z)\psi'(z) + 3F_3\psi(z)^2\psi'(z) + \cdots\cdots$$

wo die so entstandene Reihe mit der früheren zugleich convergirt. Es ist also auch

$$\Phi'(z+z_0) = \psi'(z)\left\{F_1 + 2F_2\psi(z) + 3F_3\psi(z)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

oder:

$$(5)\qquad \frac{\Phi'(z+z_0)}{\psi'(z)} = f_0 + f_1\psi(z) + f_2\psi(z)^2 + \cdots\cdots$$

wo wieder (4) und (5) zugleich convergiren müssen. — Wir wissen aber von letzterer Entwickelung, dass sie nur bis zu einem solchen z convergent bleiben kann, für welches $\psi'(z) = 0$ ist, da die entwickelte Function in diesem Punkte unendlich wird. Dies ist der Fall, wenn nicht $\Phi'(z+z_0)$ für das betrachtete z so Null wird, dass

$$\frac{\Phi'(z+z_0)}{\psi'(z)}$$

endlich bleibt. — Diese Ausnahmen werden demnach von *einzelnen Werthen des* z_0 gebildet.

Die Entwickelung der Function $\Phi(z+z_0)$ kann also, mit Ausnahme einzelner Werthe des z_0, nur so lange convergiren, als nicht

$$\psi'(z) = 0$$

wird. Sei der dem Punkte $z = c$ nächste dieser Werthe $z = z'_c$, so hat man die Convergenzbedingung:

$$\text{mod}\ .\ \psi(z) < \text{mod}\ .\ \psi(z'_c)\ .$$

Da die Flächenstücke, in welchen Convergenz stattfindet, durch

*) s. Cauchy in den Comptes rendus IV. p. 777.

eine continuirliche Ausdehnung der Grenzcurven entstehen, so gelangt man endlich zu einem λ', für welches die Zweige der Curve

$$\text{mod}\,\psi(z) = \lambda',$$

welche die Punkte c und c' umschliessen, sich berühren werden. Bei weiter wachsendem λ würde man nun erst Convergenzbereiche erhalten, die zwei Wurzelpunkte umschliessen und der frühere Berührungspunkt wird nun dem Convergenzbereich angehören. Dieser ist aber ein Doppelpunkt der Curve

$$\text{mod}\,\psi(z) = \lambda'.$$

Setzt man nun

$$\psi(z) = u + iv,$$

also:

$$\text{mod}\,\psi(z) = \sqrt{u^2 + v^2},$$

so wird die Gleichung der Curve:

$$u^2 + v^2 - \lambda'^2 = 0.$$

Für den betreffenden Punkt als Doppelpunkt der Curve hat man nun:

$$(6)\qquad \begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Andererseits wird:

$$(7)\qquad \psi'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mit Berücksichtigung der bekannten Differentialgleichungen für u und v werden auch die Gleichungen (6):

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

und aus diesen:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0;$$

endlich, da der erste Factor nicht Null werden kann, wenn nicht auch der zweite Null ist:

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

d. h. in dem betrachteten Doppelpunkte der Curve wird $\psi'(z) = 0$, und derselbe wäre im Convergenzbereich enthalten, wenn dies mit zwei Wurzelpunkten der Fall ist. Man erhält also den Satz, *dass zwei Wurzelpunkte c und c' sich nicht in demselben zusammenhängenden Stücke des Convergenzbereichs finden können.* (Einzelne Werthe des z_0 machen abermals eine Ausnahme.)

Man hat also für die Convergenz der betrachteten Reihe die Bedingung:

$$\operatorname{mod} \psi(z) < \operatorname{mod} \psi(z'_c).$$

Sollten sich jedoch in dem so begrenzten Bereiche Punkte A, A', ... finden, in denen die zu entwickelnde Function unstetig wird, so muss man noch

$$\operatorname{mod} \psi(A), \quad \operatorname{mod} \psi(A'), \; .....$$

berechnen und wenn diese der Grösse nach geordnet sind, die Convergenz auf

$$\operatorname{mod} \psi(\lambda) < \operatorname{mod} \psi(A)$$

beschränken.

Für die angedeuteten Ausnahmswerthe des z_0 erstreckt sich die Convergenz in der Regel weiter, als sonst. Die Anzahl solcher z_0 Punkte kann unendlich gross werden, aber sie bilden immer eine Reihe von getrennten Punkten in der Ebene; denn man erhält sie als Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(z + z_0) = 0$$

in Bezug auf z_0, wenn z eine Wurzel der Gleichung

$$\psi'(z) = 0$$

ist. So wird z. B. in der Entwickelung von $e^{\psi(z+z_0)}$ ein solcher Ausnahmspunkt $z_0 = 0$ sein; in der That ist die Reihe

$$1 + \frac{\psi(z)}{1!} + \frac{\psi(z)^2}{2!} + \cdots\cdots$$

in der ganzen Ebene gültig, wenn $\psi(z)$ überall den Charakter einer ganzen Function besitzt.

§ 3.

Reihen, die nach G-Functionen fortschreiten.

Wir kehren jetzt zu den im Anfang betrachteten allgemeinen Reihen zurück; ihre Form war:

$$(1) \qquad F_0 G_0(z) + F_1 G_1(z) + F_2 G_2(z) + \cdots\cdot$$

Zur Beurtheilung ihrer Convergenz wird es nothwendig sein, den Quotienten zweier unendlich entfernter G-Functionen zu bilden. Sei dieser

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{G_{n+1}(z)}{G_n(z)}\right) = \varkappa(z)$$

eine bestimmte Function von z. Man bemerkt dann, dass die Reihe (1) mit

$$(2) \qquad F_0 + F_1 \varkappa(z) + F_2 \varkappa(z)^2 + \cdots\cdots$$

zu gleicher Zeit convergirt, so lange keine Unstetigkeitspunkte einzelner G-Functionen überschritten werden. Damit ist das Problem der Bestimmung der endlichen Flächenbereiche, in denen die Reihe (1) convergirt, auf das des vorigen Paragraphen zurückgeführt.

Die Function $\varkappa(z)$ enthält jedenfalls den Factor $z - c$, da ja c eine ϱ-fache Wurzel der Gleichung

$$G_\varrho(z) = 0$$

ist. Demnach giebt

$$\operatorname{mod} \varkappa(z) = \lambda$$

einen Flächenbereich, welcher den Punkt $z = c$ einschliesst. Derselbe ist zugleich der *Darstellungsbereich der Reihe für die Function, in Bezug auf welche sie entwickelt wurde.*

Dass die Reihe die Function in diesem Bereiche wirklich darstellt, ist aus den Entwickelungen des § 1. klar, da im Punkte $z = c$ alle Ableitungen der Reihe mit denen der Function übereinstimmen. Der durch

$$\operatorname{mod} \varkappa(z) = \lambda$$

gegebene Convergenzbereich besteht aber im Allgemeinen aus mehreren von einander getrennten Flächenstücken. Für diese stellt die Reihe nicht mehr dieselbe Function dar. Für jedes derselben existirt ein Punkt c', c'', ..., wo

$$\operatorname{mod} \varkappa(z) = 0$$

wird und es müssten, damit die Reihe auch in diesem Bereich dieselbe Function darstelle, sämmtliche Ableitungen der Function Φ für $z_0 + c$ und $z_0 + c'$ übereinstimmen.

Wenn — um einen speciellen Fall zu erwähnen — die Functionen G ihre charakteristische Eigenschaft in Bezug auf mehrere Punkte $z = c$, c', ... besitzen, so enthält $\varkappa(z)$ die Factoren $(z - c)$, $(z - c')$, $(z - c'')$, ... und man weiss, dass der Convergenzbereich aus getrennten Stücken um c, c', ... besteht. Die entwickelte Function wird nur in einem dieser Stücke dargestellt. Es existiren hingegen andere Entwickelungen, welche die Function in den Flächenstücken um c', c'', ... darstellen, da in der Bestimmung der Coefficienten der Annahme nach ebenso gut von diesen ausgegangen werden konnte, wie von c.

Eine gegebene Function lässt sich für die Umgebung des Punktes c nur in einer einzigen Weise nach G-Functionen entwickeln.

Hätte man zwei verschiedene, so erhielte man durch Subtraction:

$$0 = \alpha_0 G_0(z) + \alpha_1 G_1(z) + \alpha_2 G_2(z) + \cdots\cdots \tag{3}$$

und da die G in der Umgebung von c endlich eindeutig und stetig verlaufen, hieraus durch Differentiation:

$$0 = \alpha_0 G_0'(z) + \alpha_1 G_1'(z) + \alpha_2 G_2'(z) + \cdots\cdots \tag{4}$$

Setzt man aber $z = c$ in (3), so erhält man:

$$0 = \alpha_0 G_0(c)$$

und da den Voraussetzungen nach $G_0(c)$ endlich ist,

$$\alpha_0 = 0.$$

Dadurch geht (4) über in:

$$0 = \alpha_1 G_1'(z) + \alpha_2 G_2'(z) + \cdots\cdot$$

was abermals für $z = c$, da $G_1'(c)$ wieder endlich ist,

$$\alpha_1 = 0$$

giebt. Ebenso erhält man alle folgenden α Null. Die einzige Entwickelung der Null ist also:

$$0 = 0 \,.\, G_0(z) + 0 \,.\, G_1(z) + \cdots\cdot;$$

es giebt also auch für jede andere Function nur eine Reihenentwickelung.

Eine nach G-Functionen fortschreitende Reihe kann nicht für zwei Punkte in einem Flächenstück des Convergenzbereichs zu einer endlichen werden.

Sollte dies der Fall sein, so müsste dieselbe die Form besitzen:

$$\Phi(z + z_0) = R(z) + (z - l)(z - l')\, S(z),$$

wo dann $R(z)$ eine ganze Function von z, $S(z)$ eine unendliche Reihe wäre; hieraus ist aber

$$\frac{\Phi(z + z_0) - R(z)}{(z - l)(z - l')} = S(z)$$

eine Entwickelung, die nicht für l und l' gelten kann, wenn nicht (abermals Ausnahmswerthe des z_0) dieses so bestimmt werden kann, dass der Ausdruck links für

$$z = l \quad \text{oder} \quad z = l'$$

endlich bleibt. Mit Ausnahme solcher z_0 ist also $S(z)$ eine Reihe, die nicht für $z = l$ *und* $z = l'$ convergirt. Dann ist dasselbe aber auch mit

$$(z - l)(z - l')\, S(z)$$

der Fall. Es kann also

$$R(z) + (z - l)(z - l')\, S(z)$$

kein Flächenstück in seinem Convergenzgebiet enthalten, das l und l' zugleich umfasst. Man schliesst daraus, dass wenn die G-Functionen oder eine unendliche Anzahl derselben eine gemeinschaftliche Wurzel besässen, der entsprechende Punkt auch nicht mehr dem Convergenzbereich der G-Reihe angehören kann.

Aus dem Früheren folgt nun:

Soll jede Function um den Punkt $z = c$ durch eine nach G-Functionen fortschreitende Reihe dargestellt werden, soweit sie endlich, stetig und eindeutig ist, so dürfen diese, mit Ausnahme von $z = c$, nur einer endlichen Anzahl von G-Functionen gemeinsame Wurzeln besitzen und müssen in der ganzen Ebene endlich, stetig und eindeutig verlaufen.

Ein Beispiel dieser Art geben die Bessel'schen Functionen. —

Wir werden uns noch im nächsten §. mit der genaueren Umgrenzung der Convergenzbereiche beschäftigen.

Aus dem Umstande, dass die Reihen (1) und (2) zugleich convergiren, so lange die Convergenzcurve keinen Unstetigkeitspunkt einzelner G-Functionen überschreitet, lässt sich noch eine zweite Methode zur Bestimmung der Convergenzgrenzen ableiten. Wir betrachten abermals die zweite Reihe statt der ersten und schreiben diese

$$\Sigma n!\, F_n \frac{\varkappa(z)^n}{n!}.$$

In allen Fällen, wo nun $\varkappa(z)$ nur für unendliche z unendlich wird, convergirt die Reihe

$$e^{\varkappa(z)} = \Sigma \frac{\varkappa(z)^n}{n!}$$

in der ganzen Ebene. Benützt man den bekannten Satz, dass, wenn

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots$$

eine ins Unendliche fortlaufende Reihe von Grössen ist, die sämmtlich unter einer bestimmten endlichen Grösse bleiben, die Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdot$$

und

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots\cdot$$

zugleich convergiren, so erhält man unmittelbar Folgendes: Die Reihe

$$\Sigma\,.\,F_n\, G_n(z)$$

convergirt, wenn die Grössen $n!\,F_n$ sämmtlich endlich bleiben.

§ 4.

Reciproke Entwickelungsfunctionen.

Die nach dem Bisherigen ausgeführte Entwickelung einer Function, die ausser von der Variabeln ζ noch von einem Parameter z abhängt, besitzt die Form:

$$\Phi(\zeta, z) = R_0(z)\, G_0(\zeta) + R_1(z)\, G_1(\zeta) + R_2(z)\, G_2(\zeta) + \cdots\cdots$$

wo jedes Glied das Produkt einer Function von z und einer solchen von ζ darstellt. Das frühere z_0 (jetzt ζ_0) soll ein für allemal einen bestimmten constanten Werth erhalten haben und kommt demnach nicht weiter in Betracht. Man kann aber nun die Entwickelung als nach den R_0, R_1, ... fortschreitend betrachten. Wir wollen diese *als die auf* $\Phi(\zeta, z)$ *bezogenen reciproken Functionen der* G bezeichnen. In dieser Allgemeinheit führen wir jedoch die Untersuchung nicht weiter, sondern beschränken uns,

$$\Phi(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z}$$

zu setzen. Dann erhält man zur Bestimmung der R folgende Formeln:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{c-z} &= G_0(c)\,R_0(z)\,,\\
-\frac{1}{(c-z)^2} &= G_0'(c)\,R_0(z) + G_1'(c)\,R_1(z),\\
\frac{1.2}{(c-z)^3} &= G_0''(c)\,R_0(z) + G_1''(c)\,R_1(z) + G_2''(c)\,R_2(z),\\
-\frac{1.2.3}{(c-z)^4} &= G_0'''(c)\,R_0(z) + G_1'''(c)\,R_1(z) + G_2'''(c)\,R_2(z) + G_3'''(c)\,R_3(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Man ersieht hieraus unmittelbar, dass R_n eine mit dem Factor $(z-c)^{-n-1}$ multiplicirte ganze Function n^{ten} Grades von $(z-c)$ ist, in welcher das constante Glied nie fehlt, so dass $R_n(z)$ für $z=c$ von der $n+1^{\text{ten}}$ Ordnung ∞ wird. Den grössten überhaupt möglichen Convergenzbereich der G-Reihen, wie er sich nach Betrachtung der Null und Unendlichpunkte der G ergiebt, wollen wir mit A bezeichnen; da derselbe aus sich continuirlich erweiternden $\varkappa$-Curven besteht, wird er durch eine Curve

$$\text{mod}\ \varkappa(\zeta) = \text{mod}\ \varkappa(\zeta_c)$$

begrenzt. Der Convergenzbereich der Reihe

$$(1)\qquad \frac{1}{\zeta - z} = R_0(z)\,G_0(\zeta) + R_1(z)\,G_1(\zeta) + R_2(z)\,G_2(\zeta) + \cdots\cdots$$

kann sich demnach über die in A enthaltenen ζ nicht hinaus erstrecken. Um die hinreichenden Bedingungen der Convergenz der Reihe (1) zu erhalten, untersuchen wir den Quotienten zweier unendlich entfernter R-Functionen. Derselbe wird, weil es die R sind, eine eindeutige analytische Function von ζ sein. Sei nun z ein Punkt in der Umgebung von $\zeta = c$, und zwar diesem so nahe, dass der Convergenzbereich der Reihe (1) erst durch jene Curve begrenzt wird, welche den Unstetigkeitspunkt der zu entwickelnden Function $\frac{1}{\zeta - z}$ enthält. Dann ist

$$\frac{R_{n+1}(z)\,G_{n+1}(\zeta)}{R_n(z)\,G_n(\zeta)} < 1,$$

so lange ζ nicht gleich z wird, und wird 1, sobald dies der Fall ist. Man hat also in der Umgebung von $z=c$

$$\text{Lim}\,\frac{R_{n+1}(z)}{R_n(z)} = \frac{1}{\varkappa(z)}$$

und damit diesen Quotienten für jedes z erhalten, nachdem er für ein unendlich kleines Stück der Ebene gegeben. Nun ist unmittelbar zu sehen, *dass die Reihe* (1) *in dem Stück des Bereichs A convergirt, wo dies auch mit der Reihe*

$$(2)\qquad 1 + \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa(z)} + \frac{\varkappa(\zeta)^2}{\varkappa(z)^2} + \cdots\cdots$$

der Fall ist; also sobald

$$\text{mod}\, \varkappa(\zeta) < \text{mod}\, \varkappa(z) \tag{3}$$

ist. —

Nach diesen Bemerkungen kann man unmittelbar die Cauchy'sche Methode zur Entwickelung nach Potenzreihen für alle G-Functionen und ihre Reciproken erweitern. Wir gehen hierzu von der Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \tag{4}$$

aus, wo das Integral über einen Bereich auszudehnen, in welchem die Function stetig verläuft und z ein Punkt des Bereiches ist.

Sei nun die Function $\varphi(z)$ endlich, eindeutig und stetig in einem peripherischen Bereiche der Ebene, d. h. ausserhalb einer bestimmten $\varkappa$-Curve, dann kann man die Gleichung (4) anwenden und man erhält, wenn man noch für $\frac{1}{\zeta - z}$ die Reihe (1) einsetzt*):

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(\zeta)\, d\zeta \left\{ R_0(z)\, G_0(\zeta) + R_1(z)\, G_1(\zeta) + \cdots\cdots \right\}.$$

Nach einem von Laurent an der o. e. Stelle gleichfalls bewiesenen Satze ist, wenn $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... auf dem Integrationsweg endlich, stetig und eindeutig bleibt und die Reihe

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots\cdot$$

convergirt, auch

$$\int \varphi_1(z)\, dz + \int \varphi_2(z)\, dz + \cdots\cdots$$

in demselben Bereiche convergent. Man erhält also

$$\varphi(z) = C_0 R_0(z) + C_1 R_1(z) + \cdots\cdot \tag{5}$$

und hierin:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\, G_n(z)\, dz. \tag{6}$$

Man sieht daraus, dass *eine Entwickelung nach den reciproken Entwickelungsfunctionen, wie* (5), *gültig ist für den peripherischen Theil des Darstellungsbereichs, welcher durch*

$$\text{mod}\, \varkappa(\zeta) < \text{mod}\, \varkappa(\zeta_c)$$

um den Punkt c herum gegeben ist. Die innere Grenze des Convergenzbereichs ist gegeben durch die erste Curve

$$\text{mod}\, \varkappa(\zeta) = \lambda,$$

auf welcher ein Discontinuitätspunkt der Function $\varphi(\zeta)$ liegt. Im günstigsten Falle, wo $\varphi(\zeta)$ für den ganzen Bereich A stetig ist, ist diese Grenze (die Integrationscurve):

*) Dies ist gestattet, weil z ein Punkt des Bereichs ist, also immer wie dies der Fall sein muss, damit die Reihe convergire,

$$\text{mod}\, \varkappa(\zeta) < \text{mod}\, \varkappa(z)$$

ist.

$$\operatorname{mod} \varkappa(\zeta) = 0,$$

d. i. der Punkt c, wo die Reihe (2) jedenfalls schon divergirt.

Wir untersuchen nun den allgemeinsten Fall, wo die Function $\varphi(z)$ stetig bleibt in einem ringförmigen Theil des Bereichs A, d. i. in dem zwischen zwei $\varkappa$-Curven (von denen die erste die weitere sei)

$$\operatorname{mod} \varkappa(z) = \lambda$$
$$\operatorname{mod} \varkappa(z) = \lambda'$$

eingeschlossenen Stücke. Man kann dann für

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wo das Integral über die Begrenzung dieser Ringfläche zu nehmen ist, schreiben:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda')} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Es ist hier das erste Integral über die Curve λ, das zweite über die Curve λ' zu nehmen, beide aber den bekannten Festsetzungen nach in entgegengesetzter Richtung. Um diese in beiden gleich zu machen, schreiben wir die Formel in folgender Gestalt:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda')} \frac{\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta. \tag{7}$$

Da hierin ζ einen Punkt des Bereichs darstellt, ist für das erste Integral (λ):

$$\operatorname{mod} \varkappa(\zeta) < \operatorname{mod} \varkappa(z), \tag{8}$$

und für das zweite (λ'):

$$\operatorname{mod} \varkappa(\zeta) > \operatorname{mod} \varkappa(z). \tag{9}$$

Es ist ferner aus (2):

$$\frac{1}{\zeta - z} = R_0(z)\, G_0(\zeta) + R_1(z)\, G_1(\zeta) + \cdots\cdots,$$
$$\frac{1}{z - \zeta} = R_0(\zeta)\, G_0(z) + R_1(\zeta)\, G_1(z) + \cdots\cdots,$$

die erste dieser Reihen convergirt, wenn die Bedingung (8), die zweite, wenn (9) erfüllt ist. Man darf also für $\frac{1}{\zeta - z}$ und $\frac{1}{z - \zeta}$ in dem ersten und zweiten Integral der Gleichung (7), die erste resp. zweite dieser Reihen einsetzen. Die gliedweise Integration ist nach dem Laurent'schen Satze gleichfalls gestattet und man erhält also folgende Entwickelung:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) = {} & C_0^+ G_0(\zeta) + C_1^+ G_1(\zeta) + C_2^+ G_2(\zeta) + \cdots \\ & + C_0^- R_0(\zeta) + C_1^- R_1(\zeta) + C_2^- R_2(\zeta) + \cdots,\end{aligned} \tag{10}$$

wo

$$C_n^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda')} \varphi(z)\, R_n(z)\, dz$$

und

$$C_n^- = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \varphi(z)\, G_n(z)\, dz.$$

Wir stellen die bisher erhaltenen Resultate kurz zusammen.

Jedes System von G-Functionen $G_0, G_1, \ldots$ *bestimmt ein System von reciproken Entwickelungsfunctionen* $R_0, R_1, \ldots$ *Die grösste, überhaupt mögliche Ausdehnung des Darstellungsbereichs ist durch*

$$\mathrm{mod}\; \varkappa(z) < \mathrm{mod}\; \varkappa(z_c)$$

gegeben, ein Bereich, den wir mit A bezeichnen wollen, und der auch die ganze Ebene umfassen kann. Die Convergenzcurven sind gegeben durch

$$\mathrm{mod}\; \varkappa(z) = \lambda.$$

Eine Function ist entwickelbar nach G-Functionen, wenn sie endlich, stetig und eindeutig ist um den Punkt $z = c$. *Die Entwickelung gilt bis zur ersten* $\varkappa$*-Curve, welche einen Unstetigkeitspunkt der Function enthält.*

Eine Function ist entwickelbar nach R-Functionen, wenn sie endlich, stetig und eindeutig ist in einem peripherischen Theile des Bereiches A. Die Entwickelung gilt von dessen äusserster Grenze bis zur ersten $\varkappa$*-Curve, die einen Unstetigkeitspunkt der Function enthält.*

Man hat endlich eine Entwickelung nach G- und R-Functionen, wenn sie endlich, stetig und eindeutig ist in einem ringförmigen Stück des Bereichs A. Man kann die einschliessenden $\varkappa$*-Curven soweit hinausschieben, bis sie Unstetigkeitspunkte der Function treffen.*

Aus dem bisher behandelten Systeme reciproker Entwickelungsfunctionen lässt sich nun eine unendliche Anzahl neuer solcher herleiten. Sei zu diesem Zwecke $\Phi(\zeta', z)$ irgend eine Function, die endlich, stetig und eindeutig in der Umgebung von $\zeta' = c$, die ausserdem durch die Substitution

$$\zeta' = \chi(\zeta)$$

in

$$\frac{1}{\zeta - z}$$

übergeht. Solcher Functionen giebt es unendlich viele. Setzt man

$$\zeta = f(\zeta'),$$

so wird

$$\frac{1}{f(\zeta') - z}$$

eine solche, die wieder durch die Substitution

$$\zeta' = S.f(\zeta)$$

wenn $S.f$ die inverse Function bezeichnet, in $\frac{1}{\zeta - z}$ übergeht. Nach dem Vorigen existirt nun eine Entwickelung:

(11) $$\Phi(\zeta', z) = S_0(z)\, G_0(\zeta') + S_1(z)\, G_1(\zeta') + \cdots\cdots$$

deren Darstellungsbereich A gegeben sei:

$$\operatorname{mod} \varkappa(\zeta') < l.$$

Setzt man nun $\zeta' = \chi(\zeta)$, so wird nach den gemachten Festsetzungen:

$$\frac{1}{\zeta - z} = S_0(z)\, G_0\{\chi(\zeta)\} + S_1(z)\, G_1\{\chi(\zeta)\} + \cdots\cdots$$

eine Reihe, welche die Function in dem Bereiche A':

$$\operatorname{mod} \varkappa\{\chi(\zeta)\} < l$$

darstellt. Wenn wir

$$\varkappa\{\chi(\zeta)\} = K(\zeta)$$
$$G_n\{\chi(\zeta)\} = \Gamma_n(\zeta)$$

setzen, so wird

(12) $$\frac{1}{\zeta - z} = S_0(z)\, \Gamma_0(\zeta) + S_1(z)\, \Gamma_1(\zeta) + \cdots\cdots$$

eine Reihe, deren charakteristische Convergenzcurven durch $K(\zeta)$ bestimmt sind. Es ist hierbei wohl zu beachten, dass durch diese Transformation eine weitere Einschränkung des möglichen grössten Darstellungsbereichs erfolgen kann, da dieser sich nun von dem durch

$$\chi(\zeta) = c$$

gegebenen Punkte*) aus nur bis $K'(\zeta) = 0$ erstrecken kann. Den so bestimmten Bereich bezeichnen wir mit A'.

Sei jetzt $\varphi(\zeta)$ eine Function, die in einem ringförmigen Stücke des Bereiches A', d. i. zwischen den Curven

$$\operatorname{mod} K(\zeta) = \lambda$$
$$\operatorname{mod} K(\zeta) = \lambda',$$

wo die erste die weiter ausgedehnte sein möge, endlich, stetig und eindeutig bleibt. Dann ist aus der Cauchy'schen Gleichung wieder:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda')} \frac{\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta.$$

Hierin stellt ζ einen beliebigen Punkt des Bereiches dar, also ist für das Integral um (λ):

(13) $$\operatorname{mod} K(\zeta) < \operatorname{mod} K(z),$$

für das zweite um (λ'):

(14) $$\operatorname{mod} K(\zeta) > \operatorname{mod} K(z).$$

Nun ist auch:

---

*) Im Allg. ist ζ eine mehrdeutige Function. Um Eindeutigkeit zu erlangen, hat man einen bestimmten Zweig der Function zu wählen.

$$\frac{1}{\zeta - z} = S_0(z)\,\Gamma_0(\zeta) + S_1(z)\,\Gamma_1(\zeta) + \cdots\cdots$$

und

$$\frac{1}{z - \zeta} = S_0(\zeta)\,\Gamma_0(z) + S_1(\zeta)\,\Gamma_1(z) + \cdots\cdots$$

und zwar wie früher (S. 323) mit den Convergenzbedingungen (13) und (14). Also lassen sich auch die unendlichen Reihen in den Ausdruck des $\varphi(z)$ einsetzen, und man erhält:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = A_0^+\,\Gamma_0(z) + A_1^+\,\Gamma_1(z) + A_2^+\,\Gamma_2(z) + \cdots\cdots \\ + A_0^-\,S_0(z) + A_1^-\,S_1(z) + A_2^-\,S_2(z) + \cdots\cdots, \end{aligned} \tag{15}$$

wo

$$A_n^+ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda')}\varphi(\zeta)\,S_n(\zeta)\,d\zeta,$$

und

$$A_n^- = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)}\varphi(\zeta)\,\Gamma_n(\zeta)\,d\zeta.$$

Aus jedem der bisher erhaltenen Systeme von Entwickelungsfunctionen lässt sich nun wieder eine unendliche Anzahl von anderen durch Substitution neuer Variabeln ableiten. Man wird sich leicht überzeugen, dass die auf diesem Wege erhaltenen neuen Systeme dieselben sind, wie wenn man von der verallgemeinerten Cauchy'schen Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{\displaystyle\int\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\psi(\zeta) - \psi(z)}}{\displaystyle\int\frac{d\zeta}{\psi(\zeta) - \psi(z)}}$$

ausgegangen wäre. Aus diesem Grunde habe ich es auch vorgezogen, den bisherigen Entwickelungen die einfachere Form zu Grunde zu legen.

§ 5.

Anzahl der Entwickelungen einer Function.

Wir wenden uns nun zur Lösung der Frage, auf wieviel verschiedene Arten dieselbe Function entwickelbar ist, die wir genauer so fassen: Giebt es Bereiche der Ebene, in welchen verschiedene Entwickelungen einer Function nach denselben Entwickelungsfunctionen zu gleicher Zeit gelten können?

Wir werden das allgemeinste System reciproker Entwickelungsfunctionen, das sich aus der Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = E_0^-(z)\,E_0^+(\zeta) + E_1^-(z)\,E_1^+(\zeta) + \cdots\cdots$$

herleitet, also

$$E_0^+(z)\ ,\ E_1^+(z)\ ,\ E_2^+(z)\,,\ \ldots$$
$$E_0^-(z)\ ,\ E_1^-(z)\ ,\ E_2^-(z)\,,\ \ldots$$

betrachten. Durch die Entwickelung selbst gelangt man dazu, die zu entwickelnde Function in zwei Theile

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$$

zu zerlegen, von denen der erste um den Mittelpunkt des Convergenzbereichs, d. i. eine Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{mod} K(z) = 0$$

endlich, der zweite unendlich wird. Wir werden demnach die Entwickelungen nach den E^+ (die den G entsprechen mögen) und den E^- gesondert betrachten können.

In bekannter Weise reducirt sich das aufgestellte Problem auf die Untersuchung sämmtlicher Entwickelungen der Null. Hat man zwei verschiedene Reihen für eine Function, so ist ihre Differenz

$$0 = \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots$$

eine Entwickelung der Null, die verschieden ist von der einen bekannten:

$$0 = 0\,.\,E_0 + 0\,.\,E_1 + 0\,.\,E_2 + \cdots$$

Umgekehrt kennt man alle Entwickelungen einer Function aus einer derselben, *wenn die Entwickelungen der Null bekannt sind.*

Giebt es eine zweite Entwickelung der Null, so giebt es schon unendlich viele, da man diese mit einer beliebigen Constante multipliciren kann. Hiernach gestaltet sich die zu behandelnde Aufgabe dergestalt um, dass man zu untersuchen hat, *wieviel willkürliche Constanten die Coefficienten der Reihenentwickelungen für eine gegebene Function enthalten.*

Für die Entwickelungsfunctionen

$$E_0^+(z),\ \ E_1^+(z),\ \ E_2^+(z),\ \ldots\ldots$$

erhält man unmittelbar den Satz: *Die Entwickelung einer Function nach den E^+ ist in einem gegebenen Bereiche nur in einer Weise möglich.* Wir bemerken hierzu, dass die E^+ in Bezug auf ein $z = \gamma$ noch immer die Eigenschaft besitzen, nach welcher γ eine pnfache Wurzel der Gleichung

$$E_n^+(z) = 0$$

ist.*) Für den Punkt γ folgt also aus

$$0 = \alpha_0 E_0^+(z) + \alpha_1 E_1^+(z) + \alpha_2 E_2^+(z) + \cdots \tag{1}$$

*) Wenn $\chi(\zeta)$ die Function ist, durch welche die Variable transformirt wird, ist p der Grad der Vielfachheit einer beliebigen Wurzel der Gleichung $\chi(\gamma) = c$.

(wenn man $z = \gamma$ setzt). Da $E_0^+(\gamma)$ nicht null ist

$$\alpha_0 = 0.$$

Da nun auch die E^+ in der Umgebung von $z = \gamma$ stetige Functionen sind, folgt durch p-malige Differentiation aus (1)

$$0 = \alpha_1 D^p E_1^+(z) + \alpha_2 D^p E_2^+(z) + \cdots$$

und $z = \gamma$ gesetzt

$$\alpha_1 = 0.$$

Ebenso erhält man alle aufeinander folgenden α gleich 0. Um den Punkt γ ist also nur eine Entwicklung möglich. Andererseits ist früher bewiesen worden, dass der Bereich einer Entwicklung nach den E^+ einen Punkt γ enthalten muss. Es ist damit der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Für die Entwicklungsfunctionen E_0^-, E_1^-, ... wird sich das Resultat weniger einfach gestalten. Dass der soeben eingeschlagene Gang hier nicht möglich ist, sieht man schon daraus, dass die E^- grade für den Punkt $z = \gamma$ unstetig werden. In der That wird es verschiedene Entwicklungen einer Function nach diesen geben*).

Um die Anzahl der willkürlichen Constanten und die Art ihres Vorkommens in den Entwicklungen nach den E^- festzustellen, bedürfen wir vor Allem eines Hülfssatzes, der zuerst entwickelt werden soll. Nach dem vorigen ist die Entwicklung:

$$\varphi(z) = C_0^+ E_0^+(z) + C_1^+ E_1^+(z) + C_2^+ E_2^+(z) + \cdots$$

nur in einer Weise möglich und ist in dieser:

$$C_n^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \varphi(z)\, E_{(n)}^-(z)\, dz.$$

Daher ist die Entwicklung von $E_\mu^+(z)$ nur in der Weise möglich:

$$E_\mu^+(z) = 1 \,.\, E_\mu^+(z).$$

Für die Coefficienten dieser Entwicklung gilt aber wieder:

$$C_\nu^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda E_\mu^+(z)\, E_\nu^+(z)\, dz.$$

Da aber die C^+ sämmtlich gleich Null mit Ausnahme des C_μ, das eins ist, erhält man hieraus den Satz: *dass das Integral:*

$$\int_\lambda E_\mu^+(z)\, E_\nu^+(z)\, dz.,$$

gleich 0 *oder* $2\pi i$ *ist, je nachdem* μ *und* ν *verschieden oder gleich sind.*

---

*) Entwicklungen der angegebenen Art sind von Frobenius gegeben worden. Crelle, 73.

Wenn nun die Entwicklung einer Function nach den E^- gegeben ist,

$$(2)\qquad \varphi(z) = C_0^- E_0^-(z) + C_1^- E_1^-(z) + C_2^- E_2^-(z) + \cdots$$

so erhält man durch Multiplication mit $E_\nu^+(z)\,dz$ und Integration auf dem geschlossenen Umkreise:

$$\operatorname{mod} K(z) = \lambda$$

$$(3)\qquad C_\nu^- = \int_{(\lambda)} \varphi(z) E_\nu^+(z)\,dz.$$

Es muss also, wenn auch mehrere Entwicklungen möglich sind, der ν^{te} Entwicklungscoefficient durch diese Gleichung ausgedrückt werden. In dieser kann λ jeden Werth zwischen 0 und λ' annehmen, wenn die Entwicklung von $\varphi(z)$ bis

$$\operatorname{mod} K(z) = \lambda'$$

convergirt, da die Entwicklung von $E_\mu^+(z)$ nach den E^+ für die ganze Ebene convergirt. Nur dürfen die K-Curven nicht grade durch Unstetigkeitspunkte der Functionen E^+ durchgelegt sein. — Seien diese Unstetigkeitspunkte der E^+, die in dem Bereiche A' liegen

$$\pi_1\ ,\ \pi_2\ ,\ \pi_3, \ldots .$$

und denken wir uns diese ihrer Lage nach geordnet auf sich von $z = \gamma$ aus continuirlich erweiternden K-Curven

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{mod} K(z) = p_1\,, \\ &\operatorname{mod} K(z) = p_2\,, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

von denen auch mehrere aufeinanderfolgende zusammenfallen können. — Da nun die Werthe der Entwicklungscoefficienten sich nicht ändern, wenn die einschliessende K-Curve bis zu einer des Systems (4) ausgedehnt wird, *so wird es für eine zu entwickelnde Function nur so viele sich nicht vollständig deckende Convergenzbereiche verschiedener Entwicklungen geben, als es Curven des Systems* (4) *giebt. Und zwar entspricht jeder Curve* (4) *ein Convergenzbereich, der ein oder mehreren Entwicklungen eigenthümlich ist.*

Nach diesem wird es, um alle Nullentwicklungen nach den E^- zu erhalten, nur nothwendig sein, alle zu bestimmen, die in einem bestimmten Bereich convergiren. Hat man diese in Bezug auf jede der Curven (4) erhalten, so kann jede andere Nullentwicklung nur durch Summation der vorigen entstanden sein und wird in dem gemeinschaftlichen Stück beider Convergenzbereiche convergiren. — In dem zur Bestimmung der Coefficienten erhaltenen Integrale (3) können, da dasselbe um Unstetigkeitspunkte der unter dem Integralzeichen stehen-

den Function zu nehmen ist, unendlich kleine Werthänderungen des $\varphi(z)$ endliche Werthunterschiede geben, und in der That wird dies die Ursache sein, wesshalb auch für einen vorherbestimmten Convergenzbereich verschiedene Nullentwicklungen möglich sind.

Wir wollen den unendlich kleinen Werth des $z - \alpha$, dem sich dieses für

$$\lim z = \alpha$$

nähert, mit δ bezeichnen, und als die Fundamentale Null 1[ter] Ordnung betrachten. Dann erhält man als allgemeinen Ausdruck der Null:

$$\Delta = \mu_1 \delta + \mu_2 \delta^2 + \mu_3 \delta^3 + \cdots\cdots; \tag{5}$$

da nach den bisherigen Untersuchungen nur *eindeutige* Functionen von z nach den E^- entwickelt werden können, und diese nur von einer *ganzen* Ordnung null werden können. μ_1, μ_2, u. s. f. sind hingegen völlig beliebige Zahlen.

Ein Nullausdruck der oben angegebenen Form ist für die ganze Ebene eine endliche, eindeutige und stetige Function. Für eine solche ist eine Entwicklung nur nach den E^- möglich in dem peripherischen Theile des Bereiches A, der nach innen bis hart an die Curve

$$\operatorname{mod} K(z) = p_i$$

ausgedehnt sei, also die Unstetigkeitspunkte

$$\pi_1, \pi_2, \cdots\cdot \pi_{i-1}, \pi_i$$

der Functionen E^+ nicht enthalte, die in dem centralen, ausgeschlossenen Stück des Bereiches A' liegen.

Bezeichnen wir nun den Werth des Integrals:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi} \varphi \,.\, E_r^+(z)\, dz\,,$$

genommen in einem kleinen Kreise um den Punkt π_s mit $\Pi_r^{(s)}(\varphi)$. Dann werden wir zur Bestimmung der Coefficienten der Entwicklung die Grössen

$$\Pi_r^{(s)}(\delta),\quad \Pi_r^{s}(\delta^2),\quad \Pi_r^{(s)}(\delta^3),\ \cdots,\ \Pi_r^{(s)}(\delta^{\varrho})\,,\ \cdots\cdots$$

zu berechnen haben, d. i. wenn π_s ein Punkt ist, in dem die Function $E_r^+(z)$ von der $\lambda_{r,s}$ten Ordnung unendlich wird, das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\pi_s)} \frac{\delta^{\varrho}(z-\pi_s)^{\lambda_{r,s}} E_r^+(z)}{(z-\pi_s)^{\lambda_{r,s}}}\, dz.$$

Da dasselbe in einem unendlich kleinen Kreise um den Punkt π_s genommen werden soll, wird

$$z - \pi_s = \delta$$

gesetzt werden können. Das Integral geht also über in

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\pi_s)} \frac{(z-\pi_s)^{\lambda_{r,s}} E_r^+(z)}{\delta^{\lambda_{r,s}-\varrho}} dz,$$

wo noch $(z-\pi_s)^\lambda E_r^+(z)$ in der Nähe von π_s einen endlichen Werth behält. Man weiss von einem solchen Integral (Cauchy's Residuum), dass es endliche Werthe besitzt, wenn die Function unter dem Integralzeichen wirklich unendlich wird, also

$$\lambda_{r,s} > \varrho;$$

aber null ist, wenn

$$\lambda_{r,s} \leq \varrho.$$

Es sind also

$$(6) \qquad \Pi_r^{(s)}(\delta), \quad \Pi_r^{(s)}(\delta^2), \;\ldots\; \Pi_r^{(s)}(\delta^{\lambda_{r,s}-1})$$

endliche Grössen, alle darauffolgenden verschwinden. Nach diesen Erörterungen erhält man als Coefficienten von $E_n^-(z)$ in der allgemeinsten Nullentwicklung, die in dem peripherischen Theil des A' bis zur Curve

$$\text{mod}\, K(z) = p_i$$

convergirt:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda} \Delta \,.\, E_n^-(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(p_i+1)} (\mu_1\delta + \mu_2\delta^2 + \cdots)\, E_n^-(z)\, dz,$$

und da das Integral um die K-Curve gleich den Integralen um die einzelnen Unstetigkeitspunkte ist, weiter

$$(7) \quad \varepsilon_n = \sum_{s=1}^{s=i} \left\{\mu_1 \Pi_n^{(s)}(\delta) + \mu_2 \Pi_n^{(s)}(\delta^2) + \cdots\cdots + \mu_{\lambda_{n,s}} \Pi_n^s(\delta^{\lambda_{n,s}-1})\right\}.$$

Ist ein π kein Unstetigkeitspunkt des E_n^+, so werden gleichfalls die darauf bezogenen Π verschwinden.

Sei nun von den Zahlen

$$\begin{array}{llll} \lambda_{0,1}, & \lambda_{0,2}, & \cdots\cdots, & \lambda_{0,i} \\ \lambda_{1,1}, & \lambda_{1,2}, & \cdots\cdots, & \lambda_{1,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \end{array}$$

irgend eine

$$\lambda_{\mu,\nu} = m$$

die grösste; d. h. irgend eine Function E^+ soll in Bezug auf irgend einen der Punkte π höchstens von der m^{ten} Ordnung unendlich werden, wo also m in gewissen Fällen ins Unendliche wachsen kann. Dann hängen die Coefficienten einer Nullentwicklung, die in dem angegebenen Bereiche convergirt, in der aus (7) ersichtlichen Weise von den m beliebigen Grössen

$$\mu, \mu_2, \ldots \mu_m$$

ab, und es ist früher auch gezeigt worden, dass dieses die allgemeinste Form der Entwicklung in diesem Bereiche ist.

Es ist somit das Problem, alle Entwicklungen der Null nach den E^- anzugeben, vollständig gelöst. Es sind zuerst alle Convergenzbereiche angegeben, für die eine solche möglich, und zweitens für einen beliebigen Bereich die allgemeinste Entwicklung gefunden. — Die Anzahl der Entwicklungen kann auf zwei Arten ins Unendliche wachsen, und zwar wenn dies mit der Anzahl der Unstetigkeitspunkte oder mit der Ordnungszahl eines solchen der Fall ist. Im ersten Falle giebt es unendlich viele verschiedene Convergenzbereiche; im zweiten unendlich viele Entwicklungen in einem Bereiche. Beides kann auch zugleich eintreten. — Dem Gesagten zufolge lässt sich nun eine *Eintheilung aller Entwicklungen* der Null (und damit jeder andern Function) *in Classen und Genera* angeben.

In *ein Genus* sollen alle jene Entwicklungen zählen, *die in demselben Bereiche convergiren;* die demselben Genus angehörenden Entwicklungen theilen wir in *Classen*, in der Weise, dass *alle Entwicklungen derselben Classe Nullwerthe von gleicher Ordnung darstellen.*

Die Anzahl der Classen in einem Genus ist dann $m - 1$; d. i. das Maximum der Ordnungszahlen jener Unstetigkeitspunkte, die in dem von der Curve

$$\text{mod } K(z) = p_i$$

der inneren Begrenzung des Convergenzbereiches, eingeschlossenen Raume liegen.

Zur Begründung des zuletzt ausgesprochenen Satzes ist nur zu bemerken, dass der Nullausdruck, von dessen Entwicklung wir ausgingen, nur bis zu dem Glied $\mu_{m-1}\,\delta^{m-1}$ fortgesetzt zu werden braucht, also die Form

$$\Delta = \mu_1\delta + \mu_2\delta^2 + \cdots\cdots + \mu_{m-1}\,\delta^{m-1}$$

besitzt. Die weiteren Glieder haben keinen Einfluss auf die Entwicklung, da die bezüglichen Theilintegrale null sind, oder mit anderen Worten, in den Reihen für $\mu_m\delta^m$, u. s. f. sämmtliche Coefficienten unendlich klein von erster, zweiter, ... Ordnung werden, d. i. mit der unmittelbar gegebenen

$$0\,.\,E_0^-(z) + 0\,.\,E_1^-(z) + \cdots\cdots$$

zusammenfallen. Wenn also μ_α das erste μ ist, welches nicht gleich null, so ist Δ eine Grösse, die unendlich klein wird von der α^{ten} Ordnung. — Die in dem betrachteten Bereich convergirenden Null-Entwicklungen stellen also in der That sämmtlich unendlich kleine Grössen der 1ten bis $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung dar; und eine hierauf begründete Eintheilung erschöpft sämmtliche Entwicklungen.

Wir nennen *ein vollständiges System von Repräsentanten der Nullentwicklungen* ein solches, aus welchem jeder andere durch blosse Addition zusammengesetzt werden kann. *Ein solches vollständiges System erhält man jedesmal, wenn man aus jeder Classe der Nullentwicklungen einen beliebigen Repräsentanten wählt.* Seien diese

$$\begin{aligned} 0_1^{(i)} &= c^i_{1,1}\delta + c^i_{1,2}\delta^2 + \cdots + c^i_{1,m-1}\delta^{m-1}, \\ 0_2^{(i)} &= \qquad\quad c^i_{2,2}\delta^2 + \cdots + c^i_{2,m-1}\delta^{m-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0_{m-1}^{(i)} &= \qquad\qquad\qquad\quad c^i_{m-1,m-1}\delta^{m-1}, \end{aligned}$$

(die $c_{r,s}$ wo $r > s$ müssen null sein, da 0^i_r eine unendlich kleine Grösse r^{ter} Ordnung bedeutet), so lassen sich immer Zahlen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{m-1}$ bestimmen, dass identisch

$$\sigma_1 0^i_1 + \sigma_2 0^i_2 + \cdots \sigma_{m-1} 0^i_{m-1} = \mu_1\delta + \mu_2\delta^2 + \cdots \mu_{m-1}\delta^{m-1}$$

wird. Addirt man Entwicklungen, die in verschiedenen Bereichen convergiren, so wird, da die Bereiche sich einschliessen, die Summe in dem kleineren der Bereiche convergiren, also auch dann die Form der allgemeinen Entwicklung besitzen, die in diesem Bereiche convergirt.

In einfachster Weise werden wir als Repräsentanten der einzelnen Classen die Entwicklung von δ, δ^2, ... wählen, und, wenn diese bis zur Curve

$$\operatorname{mod} K(z) = p_i$$

convergiren, mit

$$[\delta]_{p_i} \quad , \quad [\delta^2]_{p_i}, \ldots\ldots$$

bezeichnen.

Um nun alle Entwicklungen einer gegebenen Function nach den E^- anzugeben, werden wir aus den gegebenen Integralformeln die Coefficienten in gewöhnlicher Weise berechnen. Die Entwicklung convergirt dann im peripherischen Theil des Bereiches A' bis zum ersten Unstetigkeitspunkte der Function. Addirt man nun die verschiedenen Nullentwicklungen, so erhält man neue Entwicklungen, die in dem gemeinsamen Stück der Convergenzbereiche der addirten Reihe convergiren.

Dieselben Verhältnisse haben statt, wenn die Entwicklung einer Function in einem ringförmigen Stück des Bereichs gegeben ist.

Zwei Entwicklungen gehören in dasselbe Genus oder in dieselbe Classe, wenn dieses mit den zur ursprünglichen Entwicklung addirten Nullentwicklungen der Fall ist.

§ 6.

Anwendung auf einzelne Gattungen von Entwicklungsfunctionen. Beispiele.

I. Wir wollen vor Allem die im § 4. entwickelte Methode zur Darstellung neuer Entwicklungsfunctionen aus den ursprünglichen G und R zur Bildung eines Systems benutzen, welches diesem in vieler Beziehung analog ist und mit diesem die einfachsten Formen der Entwicklungsfunctionen darstellt. Zu diesem Behufe soll

$$-\frac{z'-c}{(\zeta-c)(z'-c)-1}$$

in Bezug auf z' nach G-Functionen entwickelt werden. (In dem eben hingeschriebenen Ausdruck ist c die $n$fache Wurzel der Gleichung $G_n(z')=0$.) In dieser Reihe

$$r_0(\zeta)\,G_0(z')+r_1(\zeta)\,G_1(z')+r_2(\zeta)\,G_2(z')+\cdots\cdot$$

ist, wie man aus den Relationen (5) des § 1. unmittelbar erhält, r_0, r_1 .... bestimmt durch die Gleichungen

$$(1)\qquad\begin{aligned}
0 &= G_0(c)\,.\,r_0\,,\\
1 &= G_0'(c)r_0+G_1'(c)r_1\,,\\
2\,!\,(\zeta-c) &= G_0''(c)r_0+G_1''(c)r_1+G_2''(c)r_2\,,\\
3\,!\,(\zeta-c)^2 &= G_0'''(c)r_0+G_1'''(c)r_1+G_2'''(c)r_2+G_3'''(c)r_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Man erhält also $r_0(\zeta)=0$, und die darauffolgenden $r_1(\zeta)$, $r_2(\zeta)$, ... als ganze Functionen vom 0ten, 1ten, *im Allg.* $r_n(\zeta)$ *als ganze Function* $n-1^{\text{ten}}$ *Grades* von ζ bestimmt. Setzt man nun

$$z'-c=\frac{1}{z-c}\,,$$

so wird

$$(2)\qquad \frac{1}{\zeta-z}=r_1(\zeta)\,g_1(z)+r_2(\zeta)\,g_2(z)+r_3(\zeta)\,g_3(z)+\cdots\cdot\cdot$$

und damit ein *System von Entwicklungsfunctionen*,

$$\begin{matrix} g_1(z)\;, & g_2(z), \ldots\ldots\\ r_1(z)\;, & r_2(z), \ldots\ldots \end{matrix}$$

in denen $g_n(z)$ *für* $z=\infty$ *von der* n^{ten} *Ordnung null wird,* $r_n(z)$ *eine ganze Function* $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ *Grades von* $\zeta-c$ *ist.* Waren die Convergenzcurven des ursprünglichen Systems:

$$\operatorname{mod} \varkappa(z')=\lambda,$$

so erhält man jetzt für diese:

$$\operatorname{mod} \varkappa\left(\frac{1}{z-c}+c\right)=0.$$

Der grösste mögliche Bereich, in dem eine Function durch die g und r dargestellt wird, umschliesst demnach den Punkt ∞. Ebenso

wie derselbe für die G und R auch die ganze Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes umfassen konnte, kann dies auch jetzt der Fall sein. Ausnahmestellen sind dann einzelne Punkte oder Linien. Dieselben ergeben sich aus der Abbildung der unendlich entfernten x-Curve durch die Function $\frac{1}{z-c}$.

In diese Classe gehören z. B. die Entwicklungen nach *Kugelfunctionen.* Die im endlichen befindliche Ausnahmelinie ist das Stück einer Geraden zwischen $+1$ und -1. Wir werden die Theorie dieser Functionen in der von Hermite gegebenen Erweiterung auf beliebig viele Variabeln wieder aufnehmen. Ganz ähnlich werden sich die gleichfalls von Hermite aufgestellten U-Functionen behandeln lassen.

Ueberhaupt ist durch das vorhergehende die Möglichkeit einer Entwicklung nach ganzen Functionen von steigendem Grade gegeben.

In derselben Weise, wie die G oder g-Functionen die R oder r bestimmen, ist dies auch umgekehrt der Fall. Sollen die Relationen (1) des Art. 4. oder des gegenwärtigen für in der erhaltenen Form gegebene R oder r bestehen, so müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $z-c$ verschwinden. Dies giebt lineare Gleichungen zur Bestimmung von

$$G_0(c),\ G_0'(c),\ \ldots,\ G_1'(c),\ G_1''(c),\ \ldots\ G_2''(c),\ \ldots .$$

Die hierin nicht enthaltenen

$$G_1(c);\ G_2(c),\ G_2'(c);\ G_3(c),\ G_3'(c),\ \ldots .$$

verschwinden in Folge der bekannten Eigenschaften der G-Functionen.

Im zweiten, soeben behandelten Fall, gehen die Relationen über in:

$$(3)\qquad \begin{aligned} 1 &= G_1'(c),\ r_1 \\ 2!\,(\zeta-c) &= G_1''(c)r_1 + G_2''(c)r_2 \\ 3!\,(\zeta-c)^2 &= G_1'''(c)r_1 + G_2'''(c)r_2 + G_3'''(c)r_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und man erhält also die Bestimmung von

$$G_1'(c),\ G_1^{(n)}(c),\ \ldots;\ G_2''(c),\ \ldots\ ;\ \ldots .$$

Aus den so erhaltenen Grössen kennt man aber die Potenzentwicklung der gesuchten G und c; und damit diese Functionen selbst.

II. *Seien die Entwicklungsfunctionen r_1, r_2, ... die Summe der n ersten Terme einer Potenzreihe*

$$a_0 + a_1(\zeta-c) + a_2(\zeta-c)^2 + \cdots\cdot$$

Dieselbe muss natürlich convergent sein, da sonst auch die r in's Unendliche wachsen würden. Die Relationen (3) geben:

$$G_1' = \frac{1}{a_0}$$

$$G_1'' = \frac{2!}{a_1}, \quad G_2'' = \frac{2!}{a_1}$$

$$G_1''' = 0, \quad G_2''' = -\frac{3!}{a_2}, \quad G_3''' = \frac{3!}{a_2}$$

$$G_1'''' = 0, \quad G_2'''' = 0, \quad G_3'''' = -\frac{4!}{a_3}, \quad G_4'''' = +\frac{4!}{a_4}$$

. . . .

und hieraus wird:

$$G_1(z') = (z'-c)\left(\frac{1}{a_0} - \frac{2!}{a_1}(z'-c)\right)$$

$$G_2(z') = (z'-c)^2\left(\frac{2!}{a_1} - \frac{3!}{a_2}(z'-c)\right)$$

$$G_3(z') = (z'-c)^3\left(\frac{3!}{a_2} - \frac{4!}{a_3}(z'-c)\right)$$

. . . .

Endlich erhält man

$$(4)\quad \begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{z-c}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{2!}{a_1}\frac{1}{z-c}\right) \\ g_2(z) &= \frac{1}{(z-c)^2}\left(\frac{2!}{a_1} - \frac{3!}{a_2}\frac{1}{z-c}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(z) &= \frac{1}{(z-c)^n}\left(\frac{n!}{a_{n-1}} - \frac{(n+1)!}{a_n}\frac{1}{z-c}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es entsprechen sich demnach die beiden Systeme von Entwicklungsfunctionen:

$$g_1(z), \quad g_2(z), \quad g_3(z), \ldots\ldots.$$

$$r_1(z), \quad r_2(z), \quad r_3(z), \ldots\ldots.$$

Um vor allem die Form der die Convergenzbereiche begrenzenden Curven zu finden, bilden wir den Quotienten zweier aufeinander folgender g Functionen. Derselbe nähert sich, wenn die zu Grunde gelegte Reihe convergirt, der Grenze

$$\pm \frac{1}{z-c}.$$

Die Convergenzcurven sind also Kreise um $z = c$ und zwar convergirt die Entwicklung nach den g ausserhalb, die nach den r innerhalb eines solchen Kreises bis zum Punkte $z = c$.

Setzt man $z - c = x^2$, so erhält man

$$\varphi(x^2) = A_1\overline{r_1} + A_2\overline{r_2} + A_3\overline{r_3} + \cdots,$$

und

$$x\varphi(x^2) = A_1 x\overline{r_1} + A_2 x\overline{r_2} + A_3 x\overline{r_3} + \cdots$$

wo

$$r_1 = a_1,$$
$$r_2 = a_1 + a_2 x^2,$$
$$r_3 = a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also die Entwicklung einer graden (oder ungraden) Function nach den Näherungswerthen einer Potenzreihe, welche eine grade (oder ungrade) Function darstellt.

Herr Weierstrass benutzt z. B. in seiner Vorlesung über Anwendung der elliptischen Functionen die Näherungswerthe der Reihe

$$x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \cdots\cdots$$

zur Reihendarstellung des elliptischen Integrals erster Gattung.

III. *Facultätenreihen.* Auch diese Entwicklungen gehören dem unter I. entwickelten Falle an. Man setze hiezu

$$g_1(z) = \frac{1}{z},$$
$$g_2(z) = \frac{1}{z(z+1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g_n(z) = \frac{1}{z(z+1)\cdots\cdots(z+n-1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und hieraus für die G:

$$G_n(z) = \frac{z^n}{1 \cdot (1+z)(1+2z)\cdots\cdots(1+\overline{n-1}\,z)},$$

und da $G_0(z) = 1$, also $r_0 = 0$ ist, und ferner

$$G_1'(0) = 1 \quad , \quad G_1''(0) = G_1'''(0) = \cdots\cdots = 0$$
$$G_2''(0) = 2\,! \quad , \quad G_2'''(0) = -3\,! \quad , \quad G_2'''' = +4\,! \ldots\ldots$$
$$G_3'''(0) = 3\,! \quad , \quad G_3''''(0) = -3 \,.\, 4\,!, \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wird, erhält man

$$r_1 = 1,$$
$$r_2 = z,$$
$$r_3 = z(z+1),$$
$$r_4 = z(z+1)(z+2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

als das reciproke Entwicklungssystem. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender g hat zur Grenze die Grösse:

$$\frac{1}{z+n}$$

d. h. Kreise, deren Mittelpunkt der unendlich entfernte Punkt auf der reellen x-Axe ist. Wenn also der Convergenzbereich überhaupt ins Endliche gelangt, sind die Convergenzcurven der y-Axe parallele Grade, seine grösste Ausdehnung, da $z = 0$ schon ein Unstetigkeitspunkt der g ist, die zur rechten der y-Axe liegende Halbebene, wo dann der dieser zunächstgelegene Theil als der peripherische zu gelten hat. — Ebenso, oder durch Abbildung aus den vorigen ergeben sich auch die Convergenzcurven der G-Reihen. Es sind dies Kreise, welche die y-Axe berühren, und deren Mittelpunkt auf der positiven Seite der x-Axe fortrückt.

Eine Function ist demnach in eine Facultätenreihe entwickelbar, wenn sie endlich stetig und eindeutig ist für alle Punkte zur rechten einer Graden, die parallel (und zur rechten) der y-Axe verläuft. Die Coefficienten lassen sich nach § 1. berechnen.

IV. Bessel'sche Functionen.

Dieselben sind definirt durch die in der ganzen Ebene convergenten unendlichen Reihen:

$$J^n(z) = \frac{z^n}{2^n\, n!}\left(1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \cdots\cdots\right)$$

Dieselben besitzen demnach in Bezug auf $z = 0$ die Eigenschaften der zuerst eingeführten G-Functionen. Man erhält also für die Entwicklung

$$\Phi(z+z_0) = F_0(z_0)\, J^0(z) + F_1(z_0)\, J^1(z) + F_2(z_0)\, J_2(z)$$

die Bestimmung der Coefficienten durch folgende Relationen

$$\begin{aligned}
F_0(z_0) &= \Phi(z_0) \\
F_0'(z_0) &= \tfrac{1}{2}\, F_1(z_0) \\
F_0''(z_0) &= -\tfrac{1}{2}\, F_0(z_0) + \tfrac{1}{4}\, F_2(z_0) \\
F_0'''(z_0) &= -\tfrac{3}{8}\, F_1(z_0) + \tfrac{1}{8}\, F_3(z_0) \\
F_0''''(z_0) &= \tfrac{3}{8}\, F_0(z_0) - \tfrac{1}{4}\, F_2(z_0) + \tfrac{1}{16}\, F_4(z_0) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Man erhält ebensoleicht das System reciproker Functionen, die Neumann als Bessel'sche Functionen 2ter Art eingeführt:

$$O^0(z) = \frac{1}{z}$$

$$O^1(z) = \frac{2}{z^2}$$

$$O^2(z) = \frac{2}{z} + \frac{8}{z^3}$$

$$O^3(z) = \frac{6}{z^2} + \frac{48}{z^4}$$

. . . . . .

Um die Convergenz der nach den J und O fortschreitenden Reihen zu prüfen, bilde man

$$\lim \left\{ \frac{J^{n+1}(z)}{J^n(z)} \right\}_{n=\infty}.$$

Derselbe ist sehr einfach:

$$\varkappa(z) = \frac{z}{2(n+1)}.$$

Die nach den J fortschreitenden Reihen convergiren also in Kreisen um den Nullpunkt. $\varkappa'(z)$ ist eine Constante; kein J wird ausser für $z = \infty$ unstetig, die Reihen convergiren also, so lange die darzustellende Function endlich stetig und eindeutig ist.

Eine Entwicklung nach den O convergirt ausserhalb eines bestimmten Kreises, der sämmtliche Unstetigkeitspunkte der Function einschliesst. Endlich erhält man eine Entwicklung nach beiden Functionensystemen, wenn die Function in einem Kreisring endlich, stetig und eindeutig ist.

Durch das Vorstehende ist die Entwicklung beliebiger Functionen nach den Bessel'schen J^n auf die mechanische Ausrechnung der Coefficienten zurückgeführt, die bisher nur in der Form geschlossener Integrale bekannt waren. In Bezug auf specielle Beispiele kann auf die Monographien von Neumann und Lommel verwiesen werden.

Aus den gegebenen Formeln erhellt unmittelbar, dass in der Entwicklung grader oder ungrader Functionen nur die Bessel'schen Functionen mit gradem (resp. ungradem) Index vorkommen. Man überzeugt sich leicht, dass dies eine allgemeine Eigenschaft der G-Functionen ist, die den Wurzelpunkt $c = 0$ besitzen, und abwechselnd grade und ungrade Functionen von x sind. Hieraus erhält man auch den Beweis eines von Lommel als wahrscheinlich bezeichneten Satzes, dass jede grade Function nach Quadraten der Bessel'schen Function entwickelbar ist. Analoges erhält man für Entwicklungen nach Producten von Bessel'schen Functionen. Beispiele solcher Entwicklungen sind von Schlömilch gegeben.

Nach den entwickelten Methoden lassen sich auch die von Frobenius untersuchten Reihen behandeln, die nach den Näherungswerthen eines unendlichen Productes, oder den Zählern oder Nennern

der Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruchs besonderer Form fortschreitet. Die Reihe dieser Functionen besteht aus ganzen Functionen 1ten, 2ten Grades u. s. f., gehören also auch unter I.

V. Die Entwicklung endlich vieldeutiger Functionen um ihren Verzweigungspunkt a lässt sich aus den früheren durch die Substitution

$$z - c = (x - a)^{\frac{1}{n}}$$

ableiten, grade so, wie dies bei Potenzreihen geschieht. Die den G entsprechenden Entwicklungsfunctionen müssen demnach um $x = a$ in eine Reihe entwickelbar sein, die nach Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{n}}$ fortschreitet, und zwar beginnt die Entwicklung von $G_\varrho(x)$ mit der Potenz $(x - a)^{\frac{\varrho}{n}}$. Man kann z. B., wenn man die Discriminante der algebraischen Gleichung $F(x, y) = 0$ mit $D(x)$ bezeichnet, die Wurzeln dieser Gleichung in der Umgebung der Verzweigungspunkte nach gebrochenen Potenzen von $D(x)$ entwickeln. Aehnliche Verhältnisse werden für Gleichungen zwischen mehreren Variabeln stattfinden, worauf wir noch zurückkommen werden.

Raab, September 1871.

Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung.

Von Paul Gordan in Giessen.

Dass der allgemeinen Fläche dritter Ordnung ein bestimmtes Pentaeder zugeordnet sei, dessen Ecken Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche sind, und dass diese Eigenschaft dazu führt, die Gleichung der Fläche durch die Summe von fünf Cuben darzustellen, hat zuerst Sylvester ausgesprochen (Cambr. and Dublin Math. J. Bd. 6., 1851). Sylvester giebt die wesentlichsten analytischen und geometrischen Verhältnisse an, aber ohne Beweis und Ableitung.

Fünf Jahre später entwickelte Steiner (Crelles J. Bd. 53., 1856) in einem der Theorie der Flächen dritter Ordnung gewidmeten Aufsatze die Eigenschaften des Pentaeders genauer und ausführlicher, aber ebenfalls ohne Beweise.

Im Jahre 1860 wurde die Frage von Salmon (Phil. Tr.) und Clebsch (Crelle's J. Bd. 58.) aufgenommen, indem dieselben an die erwähnte kanonische Form anknüpften. Insbesondere gab Salmon a. a. O. eine Reihe algebraischer Bildungen, leider die höhern, wie das Product der Pentaederseiten selbst, ohne Angabe des Bildungsweges. Diese Untersuchungen wurden in Salmon's Raumgeometrie reproducirt.

Dagegen gab Clebsch im folgenden Jahre (Crelle's Journal Bd. 59., 1861) zuerst eine directe Untersuchung des Pentaeders, und damit eine directe Lösung der Aufgabe, eine quaternäre cubische Form als Aggregat von fünf Cuben darzustellen.

Es wurden endlich in rein geometrischer Weise die Sätze von Sylvester, Steiner und Clebsch begründet in den beiden grossen Arbeiten von Cremona und Sturm, welche den Steiner'schen Preis von 1866 erhielten, und von denen die erste in Crelle's Journal Bd. 68., die andere als besonderes Werk (Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig, Teubner, 1867) erschienen ist.

Der gegenwärtige Aufsatz schliesst sich im Wesentlichen an die Arbeit von Clebsch vom Jahre 1861 an. Obwohl dort der Weg zur Transformation der quaternären cubischen Form in ein Aggregat von

fünf Cuben angegeben ist, so fehlt doch noch grossentheils die Ausführung der angedeuteten Operationen; es fehlt insbesondere, was auch bei Salmon nicht gegeben ist, die Bildungsweise des Productes der fünf Pentaederebenen, durch welches die zu lösende Gleichung fünften Grades gegeben wird.

Die Ausfüllung dieser Lücke ist der Zweck dieses Aufsatzes. Dabei bin ich um so lieber auf ausführliche Entwicklungen eingegangen, als ich beabsichtigte, an dem Beispiele des Pentaeders im Zusammenhange die Methoden darzulegen, welche die Algebra allmälig zur Behandlung derartiger Probleme entwickelt hat. Die Hülfsmittel, welche ich anwende, sind grösstentheils der Methode der symbolischen Rechnung entnommen, wegen deren Begründung ich auf die „Theorie der binären Formen" von Clebsch, Leipzig, Teubner, 1871, verweise. Dabei hielt ich es, um das Verständniss zu erleichtern, für zweckmässig, auch bekannte Sätze über das Pentaeder zu reproduciren, die ich in der hier vorgetragenen Form grösstentheils der angeführten Abhandlung von Clebsch entnahm.

Der Gang der Untersuchung ist folgender. In § 1.—3. stelle ich einige Sätze aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung auf, und wende dieselben in § 4.—6. auf die quadratischen Polaren der Flächen dritter Ordnung an. Hierauf bestimme ich in § 7.—9. die Zahl der Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche und ihre Lage als Ecken eines Pentaeders. Daran knüpfe ich in § 11.—13. die Transformation einer quaternären cubischen Form in die Summe von 3 Cuben, wobei die Pentaederebenen als bekannt vorausgesetzt werden, und zeige in § 14., 15., wie sich in dieser kanonischen Form der Flächen dritter Ordnung die Bildungsgesetze der Covarianten und Invarianten gestalten, und wie die Eigenschaften der Knotenpunkte sich wiederum aus ihr entwickeln. Mit den auf solche Weise erhaltenen Formeln löse ich dann in § 16. eine Reihe von Aufgaben, in welchen einzelne Theile des Pentaeders gegeben, andere gesucht sind. In § 17. endlich zeige ich, wie das Product der Pentaederseiten aus der gegebenen Flächengleichung gefunden wird, und benutze dasselbe in § 18., um die Ebenen des Pentaeders zu finden und die gegebene Form dritter Ordnung in der kanonischen Form darzustellen.

Während dieser Untersuchungen setze ich stets *allgemeine* Flächen dritter Ordnung voraus, und lasse einerseits diejenigen besondern Flächen unberücksichtigt, welche sich in der kanonischen Form nicht darstellen lassen, andererseits alle Fälle, in welchen die Fläche dritter Ordnung einen oder mehrere Knotenpunkte besitzt.

§ 1.

Symbolische Darstellung der Flächen n^{ter} Ordnung und ihrer Polaren.

Bezeichnen wir durch
$$f(x) = 0$$
die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung in den Tetraedercoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. In der Methode der symbolischen Rechnung ersetzt man f symbolisch durch die Potenz eines linearen Ausdrucks, und schreibt daher beziehungsweise
$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4)^n \ldots$$
oder kürzer
$$f = a_x^n = b_x^n \ldots .$$

Die Aufgabe, die Durchschnittspunkte der Fläche mit der Verbindungslinie zweier Punkte zu finden, nimmt bei dieser Bezeichnungsweise folgende Form an. Die gegebenen Punkte seien x und y (d. h. sie haben die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4); dann ist ein beweglicher Punkt der Verbindungslinie durch die Coordinaten
$$x_1 + \lambda y_1 \quad , \quad x_2 + \lambda y_2 \quad , \quad x_3 + \lambda y_3 \quad , \quad x_4 + \lambda y_4$$
gegeben, und mag daher kurz durch $x + \lambda y$ bezeichnet werden. Den n Schnittpunkten der Geraden mit der Fläche mögen die n Parameterwerthe
$$\lambda_1 \quad , \quad \lambda_2 \ldots \lambda_n$$
entsprechen. Dieselben sind dann die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades
$$f(x + \lambda y) = 0.$$
Nimmt man f in der symbolischen Form, so nimmt die Gleichung die Gestalt
$$(a_x + \lambda a_y)^n = 0$$
oder
$$a_x^n + \binom{n}{1} \lambda a_x^{n-1} a_y + \binom{n}{2} \lambda^2 a_x^{n-2} a_y^2 \cdots + \lambda^n a_y^n = 0$$
an.

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ in dieser Gleichung, also die Ausdrücke
$$a_x^{n-k} a_y^k$$
stellen, indem man die y als constant, die x als veränderlich ansieht, gleich Null gesetzt die sogenannten Polarflächen des Punktes y dar, und zwar wird die durch die Gleichung
$$a_x^{n-k} a_y^k = 0$$
dargestellte Fläche $(n - k)^{ter}$ Ordnung, die k^{te} Polare von y genannt.

Bei den Flächen 2ter Ordnung erhält man auf diese Weise nur die eine Polare

$$a_x a_y = 0,$$

welche eine Ebene ist.

Bei Flächen 3ter Ordnung erhält man zwei Polaren, die erste, quadratische:

$$a_x^2 a_y = 0,$$

und die zweite, lineare:

$$a_x a_y^2 = 0,$$

von welchen die erste sonach eine Fläche 2ter Ordnung, die zweite eine Ebene darstellt.

§ 2.

Flächen zweiter Ordnung.

Im Folgenden werde ich öfters Gelegenheit haben, Formeln zu benutzen, welche sich auf Flächen 2ter Ordnung beziehen, und welche daher hier, wenn auch ohne Beweis, vorausgeschickt werden mögen.

Die allgemeine Fläche 2ter Ordnung sei in Punktcoordinaten durch die Gleichung

$$f = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} f_{ik} x_i x_k = 0$$

oder symbolisch durch

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2 = 0$$

dargestellt.

Die Bedingung dafür, dass die Schnittlinie zweier Ebenen

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$
$$v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$$

die Fläche berührt, d. h. die *Gleichung der Fläche in den Liniencoordinaten* $u_i v_k - v_i u_k$, ist dann durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & u_1 & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & u_2 & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & u_3 & v_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(a\,b\,u\,v)^2 = 0$$

gegeben, wo bei der symbolischen Darstellung die Gleichung $(a\,b\,u\,v)$ die Determinante

$$(a\,b\,u\,v) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

bedeutet.

Die Bedingung ferner dafür, dass eine Ebene $u_x = 0$ die Fläche berührt, d. h. die *Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten*, ist:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & u_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{6}(a\,b\,c\,u)^2 = 0.$$

Die Determinante der Fläche endlich hat den Ausdruck

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{24}(a\,b\,c\,d)^2.$$

Ihr Verschwinden sagt aus, dass die Fläche einen Knotenpunkt hat, also ein Kegel ist. Die Coordinaten der Spitze x dieses Kegels genügen dann den vier Gleichungen

$$a_x a_1 = 0, \quad a_x a_2 = 0, \quad a_x a_3 = 0, \quad a_x a_4 = 0.$$

Man kann dieselben durch die eine Formel

$$a_x\, a_y = 0$$

ausdrücken, wenn man voraussetzt, dass die y beliebige Werthe annehmen können, ohne dass die Gleichung zu bestehen aufhört. Die Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten

$$(a\,b\,u\,v)^2 = 0$$

fährt dann fort, die Tangenten des Kegels darzustellen; dagegen stellt die Gleichung

$$(a\,b\,c\,u)^2 = 0$$

nur noch das Quadrat der Gleichung u_x der Spitze dar. Daraus folgt, dass der Ausdruck

$$\frac{(a\,b\,c\,u)^2}{u_x^{\,2}}$$

einen von den Veränderlichen u unabhängigen Werth hat; dass also, wenn die u wie die v ganz beliebige Grössen darstellen, immer

$$\frac{(a\,b\,c\,u)^2}{u_x^{\,2}} = \frac{(a\,b\,c\,v)^2}{v_x^{\,2}}$$

oder

$$v_x^{\,2}(a\,b\,c\,u)^2 = u_x^{\,2}(a\,b\,c\,v)^2$$

ist.

Aus der Identität der Gleichungen $u_x^{\,2} = 0$ und $(a\,b\,c\,u)^2 = 0$ folgt noch, dass die Produkte und Quadrate der Coordinaten x der Kegelspitze den Unterdeterminanten von Δ proportional sind.

Eine weitere Particularisation der Fläche entsteht, wenn auch diese Unterdeterminanten verschwinden. Alsdann hat die Fläche unendlich viele Knotenpunkte, und ist ein Ebenenpaar. Die Gleichung in Ebenencoordinaten verschwindet dann identisch. Die Gleichungen

$$a_x a_1 = 0, \quad a_x a_2 = 0, \quad a_x a_3 = 0, \quad a_x a_4 = 0$$

reduciren sich auf nur zwei von einander verschiedene, welche zusammen die Doppellinie des Ebenenpaars repräsentiren, und die Gleichung

$$(a b u v)^2 = 0$$

stellt das Quadrat der Gleichung dieser Doppellinie in Liniencoordinaten dar, oder sie ist Quadrat der Bedingungsgleichung, welche angiebt, dass eine Gerade diese Doppellinie schneide.

§ 3.

Conjugirte Elemente in Bezug auf diese Fläche zweiter Ordnung.

Als conjugirte Punkte in Bezug auf eine Fläche 2[ter] Ordnung bezeichne ich zwei Punkte, von denen jeder auf der Polaren des andern liegt. Zwei conjugirte Punkte x, y sind demnach durch die Gleichung verbunden:

$$a_x a_y = 0.$$

Ebenso bezeichne ich als conjugirte Ebenen zwei solche, deren jede durch den Pol der andern geht. Zwei solche Ebenen u, v sind durch die Gleichung verbunden:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & v_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{6}(a b c u)(a b c v) = 0.$$

Allen Punkten einer Geraden x, y sind die Punkte derjenigen Geraden conjugirt, in welcher die Polaren u, v von x, y sich schneiden, und umgekehrt sind den Punkten der Schnittlinie zweier Ebenen u, v sämmtliche Punkte der Verbindungslinie x, y ihrer Pole conjugirt. Man kann daher die Linien x, y und u, v selbst conjugirt nennen.

Die Geraden, welche die zu einer Geraden u, v conjugirte Gerade treffen, bilden einen speciellen Complex. Jede Gerade U, V, welche diesem Complexe angehört, will ich der Geraden u, v *entsprechend* nennen, so dass zwei Gerade einander entsprechen, wenn jede die conjugirte der andern trifft. Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade u, v und U, V einander entsprechen, ist dann:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & U_1 & V_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & U_2 & V_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & U_3 & V_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & U_4 & V_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(a\,b\,u\,v)\,(a\,b\,U\,V) = 0.$$

§ 4.

Anwendung auf die quadratische Polare einer Fläche dritter Ordnung.

Die in den beiden vorigen §§ angegebenen Resultate werde ich nun auf die erste (quadratische) Polare eines Punktes y bezüglich einer gegebenen Fläche 3ter Ordnung anwenden. Die Gleichung der Fläche 3ter Ordnung sei symbolisch durch

$$f = a_x^3 = b_x^3 \ldots$$

dargestellt. Die Gleichung der quadratischen Polare eines Punktes y in Bezug auf diese Fläche ist dann in symbolischer Form

$$a_x^2 a_y = 0;$$

bezeichnen wir die Coefficienten dieser Fläche 2ter Ordnung dem Vorigen entsprechend durch f_{ik}, so ist symbolisch

$$f_{ik} = a_y a_i a_k$$

und zugleich kann man für die f_{ik} die wirklichen Ausdrücke bilden:

$$f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i \partial y_k}.$$

Indem wir nun die oben ausgeführten Bildungen in Bezug auf diese Fläche vornehmen, bleibt die Gestalt der wirklichen Ausdrücke völlig unverändert; dagegen ist in der symbolischen Darstellung jeder der symbolischen Reihen a, b ... entsprechend ein Factor a_y, b_y ... hinzuzufügen. Wir können uns daher begnügen, die symbolischen Ausdrücke der zu betrachtenden Formen anzugeben, indem wir wegen der wirklichen auf die in den vorigen §§ gegebenen Determinanten verweisen.

Auf diese Weise erhalten wir aus dem Vorigen folgende Sätze:

1. *Die Geraden u, v, welche die quadratische Polare von y berühren, befriedigen die Gleichung*

(1) $$a_y b_y (a\,b\,u\,v)^2 = 0$$

(Gleichung der Polare in Liniencoordinaten).

Betrachtet man hierin die Gerade als gegeben, den Punkt y als beweglich, so folgt aus der Gleichung (1) sofort weiter:

2. *Alle Punkte y, deren erste Polare eine gegebene Gerade berührt, bilden die Fläche 2ter Ordnung* (1).

3. *Sind u, v und U, V entsprechende Gerade in Bezug auf die Polare von y, so hat man:*

$$(2) \qquad a_y b_y (a b u v)(a b U V) = 0.$$

Daher auch umgekehrt:

4. *Alle Punkte y, in Bezug auf deren erste Polare zwei gegebene Gerade u, v und U, V sich entsprechen, bilden die Fläche 2ter Ordnung* (2).

5. *Die Gleichung der Polare in Ebenencoordinaten ist:*

$$(3) \qquad a_y b_y c_y (a b c u)^2 = 0.$$

Daher hat man durch Umkehrung den Satz:

6. *Alle Punkte, deren erste Polaren eine gegebene Ebene u berühen, bilden die Fläche 3ter Ordnung* (3).

Diese Fläche soll *die zur Ebene u gehörige Fläche* (bei Steiner Polarfläche von u) genannt werden. Ihren symbolischen Ausdruck werde ich dadurch abkürzen, dass ich

$$a_y b_y c_y (a b c u)^2 = \varphi_y{}^3 u_\psi{}^2$$

setze. Der Uebergang von den Symbolen a, b, c der ursprünglichen Form zu den Symbolen φ, ψ der jetzt eingeführten geschieht dann, indem man die Coefficienten des linearen Ausdrucks $(a b c u)$ durch die ψ ersetzt, und die Coefficienten von $a_y b_y c_y$ durch die Coefficienten von $\varphi_y{}^3$. Aus Letzterem folgt, dass man symbolisch

$$6 \varphi_i \varphi_k \varphi_h = a_i b_k c_h + a_i b_h c_k + a_k b_i c_h + a_k b_h c_i + a_h b_i c_k + a_h b_k c_i$$

zu setzen hat. Aber da die Symbole a, b, c gleichwerthig sind, und auch in dem Ausdrucke von $\varphi_y{}^3 u_\psi{}^2$ symmetrisch vorkommen, so haben die aus

$$a_i b_k c_h (a b c u)^2$$

durch Vertauschung der Indices i, k, h zu bildenden Ausdrücke sämmtlich denselben Werth, und man kann also, da die 6 Glieder des obigen Ausdrucks von $6 \varphi_i \varphi_k \varphi_h$ sämmtlich dasselbe Endresultat liefern, kürzer durch

$$\varphi_i \varphi_k \varphi_h = a_i b_k c_h$$

die Relation zwischen den Symbolen ausdrücken.

Mit Benutzung der neuen Symbole ergiebt sich nun weiter:

7. *Zwischen den Coordinaten zweier Ebenen, welche in Bezug auf die Polare von y conjugirt sind, besteht die Gleichung:*

$$(4) \qquad a_y b_y c_y (a b c u)(a b c v) = \varphi_y{}^3 u_\psi v_\psi = 0.$$

Und umgekehrt:

8. *Die Punkte, in Bezug auf deren erste Polare zwei gegebene Ebenen u, v conjugirt sind, bilden die Fläche 3ter Ordnung* (4).

§ 5.

Die conjugirten Punkte der Hesse'schen Fläche.

Soll die quadratische Polare von y einen Knotenpunkt haben, so wird sie ein Kegel. Der Ort der Punkte y, deren Polaren Kegel sind, ist also durch das Verschwinden der Determinante der Polare, oder nach § 2. durch die Gleichung:

$$a_y\, b_y\, c_y\, d_y\, (a\,b\,c\,d)^2 = 0 \tag{1}$$

gegeben. Ich werde die linke Seite dieser Gleichung durch 24Δ bezeichnen, so dass Δ die Determinante der f_{ik} selbst ist. Die *Fläche 4ter Ordnung* $\Delta = 0$, *oder symbolisch* $\Delta_y{}^4 = 0$, *ist also der Ort der Pole* y, *deren Polaren Kegel sind.* Sie heisst die *Hesse'sche Fläche**).

Ist z die Spitze des zu einem Punkte y der Hesse'schen Fläche gehörigen Kegels, so findet man nach § 2. z aus den vier linearen Gleichungen

$$a_y a_z a_1 = 0, \quad a_y a_z a_2 = 0, \quad a_y a_z a_3 = 0, \quad a_y a_z a_4 = 0, \tag{2}$$

welche in diesem Falle zusammen bestehen können, und welche man dadurch ersetzen kann, dass man die Gleichung

$$a_x\, a_y\, a_z = 0 \tag{3}$$

für alle Werthe der x bestehen lässt.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (2) die y, so erhält man die Gleichung $\Delta = 0$, nur diesmal mit den z geschrieben, und man hat also den Satz:

1. *Auf der Hesse'schen Fläche liegen nicht nur diejenigen Punkte, deren Polaren Kegel sind, sondern auch die Spitzen dieser Kegel.*

Da die Spitze z des zu y gehörigen Kegels auf der Hesse'schen Fläche liegt, so ist seine Polare abermals ein Kegel, und man findet dessen Spitze ξ, indem man die Gleichung

$$a_x\, a_z\, a_\xi = 0$$

für alle Werthe der x bestehen lässt. Vergleicht man aber dies mit (3), so zeigt sich, dass so lange die Spitze überhaupt völlig bestimmt ist (den entsprechenden Ausnahmefall untersuchen wir weiter unten), ξ mit y zusammenfallen muss. Wir haben also den Satz:

2. *Ist die Polare von y ein Kegel mit der Spitze in z, so ist auch die Polare von z ein Kegel mit der Spitze in y.*

---

*) Bei Flächen $n$ter Ordnung heisst Hesse'sche Fläche diejenige, welche durch das Verschwinden der Determinante der zweiten Differentialquotienten gegeben wird, und welche der Ort der Knotenpunkte von Polaren ist, dagegen heisst der Ort der zugehörigen Pole die Steiner'sche Fläche. Bei den Flächen 3ter Ordnung fallen beide Flächen zusammen.

Die Hesse'sche Fläche zerfällt daher in Punktepaare, welche einander so entsprechen, dass jeder die Spitze eines Kegels ist, welcher die Polare des andern ist. Solche Punkte wollen wir *conjugirte* Punkte der Hesse'schen Fläche nennen. Da für solche Punktepaare die Gleichung (3) unabhängig von den Werthen der x besteht, so hat man den Satz:

3. *Ein Paar conjugirter Punkte der Hesse'schen Fläche ist in Bezug auf die Polare jedes beliebigen Punktes x conjugirt.*

Man kann ferner sofort zeigen:

4. *Kein Punkt der Hesse'schen Fläche ist sich selbst conjugirt.*

Denn in solchem Falle würden die Gleichungen (2) in

$$a_1 a_y^2 = 0, \quad a_2 a_y^2 = 0, \quad a_3 a_y^2 = 0, \quad a_4 a_y^2 = 0$$

übergehen. Das Zusammenbestehen dieser Gleichungen würde aussagen, dass die Fläche einen Knotenpunkt habe, ein Fall, welchen wir ausschliessen.

Ist, wie oben, z die Spitze der in einen Kegel ausartenden Polaren von y, so stellt nach § 2. die Gleichung der Polare in Ebenencoordinaten

$$\varphi_y^3 u_\psi^2 = 0$$

das Quadrat $u_z^2 = 0$ der Kegelspitze dar, und es ist, wenn u und v beliebige Ebenen sind:

$$\varphi_y^3 u_\psi^2 \,.\, v_z^2 = \varphi_y^3 v_\psi^2 \,.\, u_z^2.$$

Verschwindet also u_z, ohne dass v_z verschwindet, so muss $\varphi_y^3 u_\psi^2 = 0$ sein. Dies lässt sich durch folgenden Satz interpretiren:

5. *Geht eine Ebene u durch einen Punkt z der Hesse'schen Fläche, so geht die ihr zugehörige Fläche 3ter Ordnung durch den zu z conjugirten Punkt.*

Ferner knüpft sich daran der Satz:

6. *Alle Flächen 3ter Ordnung, welche im oben benutzten Sinne zu Ebenen gehören, welche durch einen Punkt z der Hesse'schen Fläche gehen, werden in dem conjugirten Punkte y von der zweiten Polare des Punktes z berührt.* (Clebsch, a. a. O. p. 202.)

Die Tangentenebene der zu u gehörigen Fläche 3ter Ordnung im Punkte y hat die Gleichung

$$\varphi_x \varphi_y^2 u_\psi^2 = 0.$$

Setzt man für $\varphi_y^3 u_\psi^2$ seinen Ausdruck $a_y b_y c_y (abcu)^2$, so erhält man durch Differentiation nach den y und Multiplication mit den x:

$$3\varphi_x \varphi_y^2 u_\psi^2 = \left\{a_x b_y c_y + a_y b_x c_y + a_y b_y c_x\right\} (abcu)^2,$$

oder, da rechts alle drei Terme denselben Werth haben:

$$\varphi_x \varphi_y^2 u_\psi^2 = a_x b_y c_y (abcu)^2.$$

Auf das Produkt dieses Ausdrucks mit v_z^2 wende ich nun die Identität an:

$$(abcu)\,v_z = (abcv)\,u_z - (abuv)\,c_z + (acuv)\,b_z - (bcuv)\,a_z\,.$$

Es wird dann

$$\varphi_x \varphi_y^2 u_\psi^2 . v_z^2 = \left\{(abcv)u_z - (abuv)c_z + (acuv)b_z - (bcuv)a_z\right\}^2 . a_x b_y c_y\,.$$

Nun ist erstlich nach der Voraussetzung $u_z = 0$, ferner aber auch $a_y a_z a_i = b_y b_z b_i \ldots = 0$; daher bleibt nur:

$$\varphi_x \varphi_y^2 u_\psi^2 \,.\, v_z^2 = (bcuv)^2 a_z^2 a_x\,.$$

Die fragliche Tangentialebene ist also nicht verschieden von der zweiten Polare $a_z^2 a_x = 0$ des Punktes z, wie zu beweisen war.

In derselben Weise beweist man den Satz:

7. *Die zweite Polare $a_x^2 a_z = 0$ eines Punktes z der Hesse'schen Fläche ist die Tangentenebene derselben im conjugirten Punkte y.*

Die Gleichung dieser Tangentenebene ist

$$(abcd)^2 a_y b_y c_y d_x = 0\,;$$

multiplicirt man die linke Seite mit v_z^2, und verfährt wie oben, so erhält man

$$(abcd)^2 a_y b_y c_y d_x \,.\, v_z^2 = (abcv)^2 a_y b_y c_y \,.\, d_x d_z^2,$$

d. h. diese Tangentenebene ist von der zweiten Polare $d_x d_z^2 = 0$ des Punktes z nicht verschieden.

§ 6.

Die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche. Knotengerade und Knotenebenen.

Schon oben wurde bemerkt, dass für besondere Pole y die Polare $a_x^2 a_y = 0$ mehr als einen Knotenpunkt haben kann. Sie hat dann unendlich viele und zerfällt in *ein Ebenenpaar*. In diesem Falle muss nach § 2. die Form $\varphi_y^3 u_\psi^2$ für alle Werthe der u verschwinden, und umgekehrt ist es die hinreichende Bedingung für das Zerfallen der Polare in ein Ebenenpaar, wenn die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi_y^3 u_\psi^2 = 0$$

für alle Werthe der u besteht.

Wenn man auf die wirkliche Form dieser Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & u_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zurückgeht, so erkennt man, dass die Coefficienten, welche hier ver-

schwinden müssen, die sämmtlichen Unterdeterminanten von Δ sind. Daher verschwinden auch die Differentialquotienten von Δ, und die Hesse'sche Fläche hat also in jedem solchen Punkte y einen Knotenpunkt. Mat hat so den Satz:

1. *Die Punkte, deren Polare in ein Ebenenpaar ausartet, sind Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche.*

Die Gleichung $\varphi_y{}^3 u_\psi{}^2 = 0$ bestand unabhängig von den Werthen der u, sobald y einer dieser Knotenpunkte war. Daher ergiebt sich:

2. *Alle den Ebenen des Raumes zugeordneten Flächen 3ter Ordnung haben diese Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche zu gemeinsamen Punkten.*

Da die Polare eines solchen Knotenpunktes y deren unendlich viele besitzt (die Punkte der Doppellinie der Polare), so hat ein solcher Knotenpunkt unendlich viele conjugirte Punkte z. Sie bilden eine Gerade; man erhält diese aus irgend zweien der Gleichungen

$$(2)\qquad a_y a_z a_1 = 0,\quad a_y a_z a_2 = 0,\quad a_y a_z a_3 = 0,\quad a_y a_z a_4 = 0,$$

welche sich in diesem Falle auf nur zwei von einander unabhängige Gleichungen reduciren.

Diese Gerade will ich die dem Knotenpunkte conjugirte *Knotengerade* nennen, die durch sie und durch den Knotenpunkt gelegte Ebene seine *Knotenebene*. Diese letztere ist immer bestimmt, denn da nach § 5. Satz 4. kein Punkt der Hesse'schen Fläche sich selbst conjugirt sein kann, so hat man auch den Satz:

3. *Ein Knotenpunkt liegt niemals auf seiner Knotengeraden.*

Nach § 2. ist

$$(3)\qquad a_y b_y (a b u v)^2 = 0$$

das Quadrat der Gleichung eines speciellen Complexes, welcher durch sämmtliche die Knotengerade von y treffende Geraden befriedigt wird, und die Gleichung (1) kann also als die Gleichung dieser Knotengeraden angesehen werden.

Ist z ein Punkt der Knotengeraden, so ist nach § 2.

$$\varphi_z{}^3 u_\psi{}^2 = 0$$

das Quadrat der Gleichung von y, und man hat zugleich für alle beliebigen Werthe von u und v

$$v_y{}^2 \,.\, \varphi_z{}^3 u_\psi{}^2 = u_y{}^2 \,.\, \varphi_z{}^3 v_\psi{}^2.$$

§ 7.

Zahl der Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche.

Um die Anzahl der Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche zu bestimmen, deren Polaren Ebenenpaare sind, schlage ich folgenden

Weg ein. Es sei eine beliebige Gerade gegeben, ξ, η seien zwei Punkte, welche auf ihr liegen, u, v zwei Ebenen, welche durch sie gehen. Die Ebenen, welche durch die Gerade gehen, bilden dann das Büschel

$$u_x + \lambda v_x = 0;$$

und die denselben zugehörigen Flächen 3ter Ordnung bilden die Flächenschaar

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\varphi_x^3 (u_\psi + \lambda v_\psi)^2 = 0 \\ &= \varphi_x^3 u_\psi^2 + 2\lambda\, \varphi_x^3 u_\psi v_\psi + \lambda^2 \varphi_x^3 v_\psi^2. \end{aligned}$$

Nach § 6. Satz 2. schneiden alle diese Flächen sich unter anderm in den gesuchten Knotenpunkten; man hat also nur die Schnittpunkte aller dieser Flächen, d. h. die 27 Schnittpunkte der Flächen

$$(2)\qquad \varphi_x^3 u_\psi^2 = 0 \quad , \quad \varphi_x^3 u_\psi v_\psi = 0 \quad , \quad \varphi_x^3 v_\psi^2 = 0$$

aufzusuchen, und diejenigen auszuscheiden, welche der Frage fremd sind.

Diese 27 Punkte zerfallen in drei Classen, jenachdem ihre Polaren keinen, einen oder mehr als einen Knotenpunkt besitzen; nur die letztere Classe liefert die gesuchten Punkte.

1. Gehört einer der 27 Punkte (y) zu der ersten Classe, so liegt die gegebene Gerade auf seiner Polare, und es finden die Gleichungen statt:

$$a_y a_\xi^2 = 0 \quad , \quad a_y a_\xi a_\eta = 0 \quad , \quad a_y a_\eta^2 = 0.$$

Man erhält auf diese Weise nur einen einzigen Punkt y, der aus diesen Gleichungen auf lineare Weise bestimmt ist. Man kann die Gleichung dieses Punktes, d. h. *desjenigen Punktes, dessen Polare eine gegebene Gerade* ξ, η *oder* u, v *enthält*, folgendermassen aufstellen. Fügt man den drei obigen Gleichungen die Gleichung $w_x = 0$ hinzu, so ergiebt sich durch Elimination der x die gesuchte Gleichung in der folgenden Form, wobei nur die Symbole in den verschiedenen Reihen beziehungsweise durch a, b, c bezeichnet sind:

$$0 = \begin{vmatrix} a_\xi^2 a_1 & a_\xi^2 a_2 & a_\xi^2 a_3 & a_\xi^2 a_4 \\ b_\xi b_\eta b_1 & b_\xi b_\eta b_2 & b_\xi b_\eta b_3 & b_\xi b_\eta b_4 \\ c_\eta^2 c_1 & c_\eta^2 c_2 & c_\eta^2 c_3 & c_\eta^2 c_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = a_\xi^2 b_\xi b_\eta c_\eta^2 (abcw).$$

Indem man abc auf alle Weise vertauscht, und statt der obigen Gleichungen die Summe aller so entstehenden setzt, findet man die symmetrischere Form:

$$0 = (abcw)\,(a_\xi b_\eta - b_\xi a_\eta)\,(a_\xi c_\eta - c_\xi a_\eta)\,(b_\xi c_\eta - c_\xi b_\eta),$$

oder endlich, wenn man statt der Bestimmungsstücke ξ, η die Bestimmungsstücke u, v einführt:

$$0 = (abcw)\,(abuv)\,(acuv)\,(bcuv).$$

2. Gehört y der zweiten Classe an, so ist seine Polare ein Kegel, und dessen Spitze z muss nach § 5. Satz 5. auf jeder der Ebenen $u_x + \lambda v_x = 0$, also auf der gegebenen Geraden liegen. Da man voraussetzen darf, dass die ganz willkürliche Gerade ξ, η der Hesse'schen Fläche nicht ganz angehört, so trifft sie dieselbe in 4 Punkten; die ihnen conjugirten sind die 4 Punkte y, welche in diese Classe gehören. Aber nach § 5. Satz 7. haben alle Flächen der Schaar 1., also auch die Flächen 2. in jedem dieser Punkte eine gemeinsame Tangentialebene (die zweite Polare des betreffenden Punktes z); daher sind ihre Berührungspunkte als vierfache Schnittpunkte zu zählen*).

3. Gehört endlich der Punkt y der 3ten Classe an, so ist seine Polare ein Ebenenpaar, er selbst einer der gesuchten Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche. War nun in der ersten Classe nur ein ein-

---

*) Den Beweis des Satzes, *dass ein gemeinsamer Berührungspunkt dreier Flächen als vierfacher Schnittpunkt anzusehen sei*, gab Herr Clebsch in der oft angeführten Abhandlung. Ich will der Vollständigkeit halber den Beweis hier kurz reproduciren.

Denken wir uns ein beliebiges dreiaxiges Coordinatensystem, den Anfang ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) in den fraglichen Punkt gelegt, und die gemeinsame Tangentenebene zur Ebene $x = 0$ genommen. Suchen wir nun die Schnittpunkte der Flächen, welche dem Anfangspunkte unendlich nahe liegen, für welche also x, y, z unendlich kleine Werthe erhalten.

Die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ der drei Flächen kann man sich den Bedingungen gemäss in die Form gebracht denken:

$$F = x + f(x, y, z) \ldots = 0$$
$$\Phi = x + \varphi(x, y, z) \ldots = 0$$
$$\Psi = x + \psi(x, y, z) \ldots = 0,$$

wo f, φ, ψ homogene Functionen 2ter Ordnung sind.

Vernachlässigt man nun Grössen höherer Ordnung, so kann man diese Gleichungen durch die Gleichungen dreier Flächen 2ter Ordnung

$$x + f = 0 \quad , \quad x + \varphi = 0 \quad , \quad x + \psi = 0$$

ersetzen, und diese verhalten sich in der Nähe des Anfangspunktes genau wie die gegebenen, haben also dort auch die gesuchte Anzahl gemeinsamer Schnittpunkte. Nun folgt aber aus den letzten Gleichungen

$$f - \varphi = 0, \quad f - \psi = 0.$$

Hierdurch hat man zwei Gleichungen für $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, welche also vier Werthsysteme dieser Grössen liefert. Hat man sie gefunden, so giebt irgend eine der Gleichungen $x + f = 0$ etc. die Grösse x eindeutig. Es giebt also vier Werthsysteme x, y, z, welche den Gleichungen

$$x + f = 0, \quad x + \varphi = 0, \quad x + \psi = 0$$

genügen, ohne dass $x = y = z = 0$. Da nun drei Flächen 2ter Ordnung sich in acht Punkten schneiden, so müssen die vier fehlenden Schnittpunkte in den Berührungspunkt gefallen sein. Eben dies muss also auch bei den gegebenen drei Flächen stattfinden, und der Berührungspunkt zählt daher für vier Schnittpunkte.

ziger Punkt enthalten, in der zweiten vier, deren jeder vierfach zählte, so bleiben 27 — 1 — 4 . 4 = 10 Punkte der letzten Classe übrig, und man hat den Satz:

Die Zahl der gesuchten Knotenpunkte ist 10.

Im Allgemeinen fallen von diesen nicht zwei zusammen, und ebenso wenig fallen zwei der zehn Knotengeraden oder zwei der *zehn Knotenebenen* zusammen. Denn wäre dies der Fall, so müsste dasselbe auch bei jeder speciellen Fläche 3ter Ordnung eintreten. Nun zeigt sich aber das Gegentheil bei einer Fläche, welche als Aggregat von fünf Cuben gegeben ist, wie wir weiter unten sehen werden. Es kann also im allgemeinen Falle nicht eintreten, dass zwei der Knotenpunkte etc. zusammenfallen.

§ 8.

Die Knotengeraden.

Einem Knotenpunkte y sei eine Knotengerade L conjugirt, der Ort der dem Punkte y conjugirten Punkte der Hesse'schen Fläche. Es giebt zehn Gerade L, wie zehn Punkte y.

Ich werde nun zunächst folgenden Satz beweisen:

1. *Jede Gerade L schneidet alle zu den Ebenen des Raumes gehörenden Flächen 3ter Ordnung* $\varphi_x{}^3 u_\psi{}^2 = 0$ *in denselben drei Punkten, also in Knotenpunkten* y.

Nach der letzten Formel des § 6. besteht nämlich, wenn y einer der zehn Knotenpunkte, z ein Punkt der Knotengeraden L ist, für alle Werthe der u, v die Gleichung

$$v_y{}^2 \,.\, \varphi_z{}^3 u_\psi{}^2 = u_y{}^2 \,.\, \varphi_z{}^3 v_\psi{}^2.$$

Ist also z so gewählt, dass es auf der zur Ebene u gehörigen Fläche liegt (welche man als nicht durch y gehend annehmen kann), so ist auch $\varphi_z{}^3 v_\psi{}^2 = 0$, d. h. z liegt auch auf jeder zu einer anderen Ebene v gehörigen Fläche 3ter Ordnung, wie zu beweisen war.

Man beweist nun ferner leicht den Satz:

2. *Von den drei auf einer Knotengeraden liegenden Knotenpunkten sind niemals zwei conjugirt.*

Wären nämlich zwei der drei auf L liegenden Knotenpunkte, etwa ξ, η conjugirt, so bildeten die Punkte y, ξ, η ein Dreieck, in welchem jede Ecke der andern conjugirt wäre, in welchem also jede Seite die der gegenüberliegenden Ecke conjugirte Knotengerade wäre. Es würde die Ebene dieses Dreiecks also die Knotenebene für jede der Ecken sein und es fielen also mehrere Knotenebenen zusammen, was im Allgemeinen nicht eintritt.

Den drei auf der zu y conjugirten Knotengeraden L liegenden Knotenpunkten ξ, η, ζ sind drei andere Knotengeraden M, N, O

conjugirt, welche durch y gehen. Ich will M, N, O auch der Geraden L gegenüber als die dieser *conjugirten Knotengeraden* bezeichnen. Von zwei conjugirten Knotengeraden geht also jede durch den der andern conjugirten Knotenpunkt.

Man kann über conjugirte Knotengerade folgende Sätze aufstellen:

3. *Zwei einander conjugirte Knotengeraden haben niemals einen Punkt gemein.*

Wären L, M zwei conjugirte Knotengerade, welche einen Punkt z gemein hätten, so wäre dieser jedenfalls den mit L und M conjugirten Knotenpunkten selbst conjugirt, also ein Punkt, welchem mehr als *ein* Punkt der Hesse'schen Fläche conjugirt wäre, mithin einer der zehn Knotenpunkte. Derselbe müsste also einer der auf L liegenden Knotenpunkte sein. Nun liegt aber der Annahme nach auf L auch der zur Geraden M conjugirte Knotenpunkt; und dieser müsste also entweder mit z zusammenfallen oder ihm conjugirt sein. Im erstern Fall läge ein Knotenpunkt z auf seiner Knotengeraden M, was dem Satze 3. des § 7. widerspricht; im zweiten Falle lägen auf L zwei conjugirte Knotenpunkte, was nach Satz 2. des gegenwärtigen §. unmöglich ist.

4. *Zwei conjugirte Knotengerade entsprechen einander in Bezug auf die Polare eines jeden Punktes s im Raume.*

Da nämlich ein Knotenpunkt y jedem Punkte z seiner Knotengeraden conjugirt ist, so muss nach § 5. Formel 3. die Gleichung

$$a_s a_y a_z = 0$$

für jeden Punkt s bestehen. Es muss also z und daher die ganze Gerade L auf der in Bezug auf $a_s a_x^2 = 0$ genommenen Polarebene von y ($a_s a_y a_x = 0$) liegen, und die in Bezug auf die Fläche $a_s a_x^2 = 0$ zu L conjugirte Gerade P muss also durch den Pol dieser Ebene, durch y, gehen. Im Punkte y aber wird sodann P von M, N, O geschnitten, welche die durch y gehenden, also zu L conjugirten Knotengeraden sind. Diese Geraden sind also in Bezug auf die Fläche $a_s a_x^2 = 0$ zu L *entsprechend* nach der Definition des § 3.; was zu beweisen war.

§ 9.

Die gegenseitige Lage der zehn Knotenpunkte.

Mit Hilfe der im Vorigen gegebenen Sätze ist es nun leicht, die gegenseitige Lage der zehn Knotenpunkte zu studiren.

Gehen wir von einem derselben, x, aus. Durch ihn gehen drei Knotengerade G_1, G_2, G_3; auf jeder der letztern befinden sich noch zwei Knotenpunkte, welche durch

$$y_1, z_1 \quad ; \quad y_2, z_2 \quad ; \quad y_3, z_3$$

bezeichnet werden mögen. Die noch fehlenden drei Knotenpunkte müssen also auf der zu x conjugirten Knotengeraden G liegen; sie sollen durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet sein.

Alle zehn Knotenpunkte liegen demnach auf den vier Geraden G, G_1, G_2, G_3, den durch x gehenden und den zu x conjugirten. Das Entsprechende muss bezüglich aller andern Knotenpunkte, z. B. in Bezug auf ξ_1, stattfinden. Auf der zu ξ_1 conjugirten Geraden G_1 liegen die drei Knotenpunkte x, y_1, z_1; auf der durch ξ_1 gehenden Knotengeraden G liegen die drei Punkte ξ_1, ξ_2, ξ_3. Mithin müssen auf den beiden andern durch ξ_1 gehenden Geraden H_1 und H_2, noch paarweise die übrigen Knotenpunkte y_2, z_2, y_3, z_3 liegen. Die Geraden H_1 und H_2 sind den Punkten y_1, z_1 conjugirt, da sie andern Punkten nicht conjugirt sein können. Wählen wir also die Bezeichnung noch so, dass y_2, y_3 auf H_2 und z_2, z_3 auf H_1 liegen, und dass H_1 dem Punkte y_1, H_2 dem Punkte z_1 conjugirt ist, so erhalten wir nunmehr folgende Tafel:

Knotenp.	Conj. Ger.	Knotenpunkte auf derselben.
x	G	$\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$
ξ_1	G_1	$x\ y_1\ z_1$
ξ_2	G_2	$x\ y_2\ z_2$
ξ_3	G_3	$x\ y_3\ z_3$
y_1	H_1	$\xi_1\ z_2\ z_3$
z_1	H_2	$\xi_1\ y_2\ y_3$.

Mit Hilfe dieser Tafel findet man nun auch leicht die Punkte, welche auf den zu den vier übrigen Knotenpunkten y_2, z_2, y_3, z_3 conjugirten Knotengeraden K_2, L_2, K_3, L_3 liegen. Nach der obigen Tafel sind zu

$$y_2,\ z_2 \quad , \quad y_3,\ z_3$$

schon beziehungsweise conjugirt die Punktepaare

$$\xi_2,\ z_1 \quad ; \quad \xi_2,\ y_1 \quad ; \quad \xi_3,\ z_1 \quad ; \quad \xi_3,\ y_1 .$$

Es fehlt also auf jeder dieser 4 Knotengeraden nur noch *ein* Punkt. Nun sind die gedachten vier Knotenpunkte beziehungsweise mit den folgenden Punkten *nicht* conjugirt, weil sie mit denselben auf Knotengeraden liegen (§ 8. Satz 2.):

$$z_2,\ y_3 \quad ; \quad y_2,\ z_3 \quad ; \quad z_3,\ y_2 \quad ; \quad y_3,\ z_2 ;$$

ausserdem *nicht* conjugirt den folgenden Punkten, weil sie ihnen gegenüber in der Tafel nicht vorkommen:

$$\xi_3,\ y_1 \quad ; \quad \xi_3,\ z_1 \quad ; \quad \xi_2,\ y_1 \quad ; \quad \xi_2,\ z_1 ;$$

endlich aus beiden Gründen *nicht* conjugirt zu x, ξ_1. Also bleiben als dritte conjugirte Punkte nur übrig beziehungsweise:

$$z_3\ ,\ y_3\ ,\ z_2\ ,\ y_2,$$

und die vorige Tafel wird also durch die folgende ergänzt:

Knotenp.	Conj. Ger.	Knotenpunkte auf derselben.
y_2	K_2	ξ_2, z_1, z_3
z_2	L_2	ξ_2, y_1, y_3
y_3	K_3	ξ_3, z_1, z_2
z_3	L_3	$\xi_3, y_1, y_2.$

Aus diesen Tafeln geht nun leicht eine einfache Gruppirung der zehn Knotenpunkte hervor. Bemerken wir, dass die von einem Knotenpunkte ausgehenden Geraden niemals in einer Ebene liegen können; denn nach dem Satze 3. des § 8. kann z. B. von den durch x gehenden Geraden G_1 nicht in der Ebene von G_2 und G_3 liegen, weil H_1 in dieser Ebene liegt, welches dem auf G_1 liegenden Punkte y_1 conjugirt und daher auch zu G_1 selbst conjugirt ist.

So bilden die drei durch x gehenden Geraden die drei Ebenen G_2G_3, G_3G_1 und G_1G_2, die ich durch $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ bezeichnen will. Diese Ebenen aber enthalten nach der Tafel beziehungsweise die Punkte

$$x, y_2, z_2, y_3, z_3, \xi_1\ ;\ x, y_3, z_3, y_1, z_1, \xi_2\ ;\ x, y_1, z_1, y_2, z_2, \xi_3,$$

und die Geraden

$$H_1, H_2\ ;\ K_2, L_2\ ;\ K_3, L_3.$$

Ausserdem finden sich noch zwei ausgezeichnete Ebenen $E^{(4)}$, $E^{(5)}$, welche durch die zu x conjugirte Gerade G gehen; in diesen Ebenen liegen beziehungsweise die Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3\ ,\ z_1, z_2, z_3\ ;\ \xi_1, \xi_2, \xi_3\ ,\ y_1, y_2, y_3,$$

und die Geraden

$$G, H_1, K_2, K_3\ ;\ G, H_2, L_2, L_3.$$

Construirt man hieraus die Tafel

Ebenen.	Punkte in ihnen.	Gerade in ihnen.
$E^{(1)}$	$x, y_2, z_2, y_3, z_3, \xi_1$	G_2, G_3, H_1, H_2
$E^{(2)}$	$x, y_3, z_3, y_1, z_1, \xi_2$	G_3, G_1, K_2, L_2
$E^{(3)}$	$x, y_1, z_1, y_2, z_2, \xi_3$	G_1, G_2, K_3, L_3
$E^{(4)}$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, z_1, z_2, z_3$	G, H_1, K_2, K_3
$E^{(5)}$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3, y_1, y_2, y_3$	$G, H_2, L_2, L_3,$

so bemerkt man, dass die zehn Geraden nichts sind, als die Durchschnitte von je zweien der Ebenen, die zehn Punkte nichts anderes, als die Durchschnitte derselben zu dreien.

Die Knotenpunkte und Knotengeraden sind Ecken und Kanten eines gewissen Pentaeders, des Pentaeders der Fläche 3ter Ordnung.

§ 10.

Das Pentaeder. (Clebsch a. a. O. p. 208.)

Die Bezeichnung der zehn Knotenpunkte und Knotengeraden wird nun durch Einführung des Pentaeders einfach und übersichtlich. Wir bezeichnen jeden Knotenpunkt durch die Indices der drei Ebenen, die sich in ihm schneiden; jede Knotengerade durch die beiden Indices der sich in ihr schneidenden Ebenen. Die Zahlen der zu einem Punkte conjugirten Geraden sind immer diejenigen, welche unter denen des Punktes nicht vorkommen. Es sind demnach folgende Knotenpunkte und Knotengerade conjugirt:

Punkte:	Gerade:
1, 2, 3	4, 5
1, 2, 4	3, 5
1, 2, 5	3, 4
1, 3, 4	2, 5
1, 3, 5	2, 4
1, 4, 5	2, 3
2, 3, 4	1, 5
2, 3, 5	1, 4
2, 4, 5	1, 3
3, 4, 5	1, 2.

Zwei Knotenpunkte sind conjugirt, wenn sie durch keine Gerade verbunden sind, also wenn sie nur *eine* gemeinsame Zahl enthalten; so sind z. B. zu 1, 2, 3 conjugirt die Punkte 1, 4, 5; 2, 4, 5; 3, 4, 5.

Einer Knotengeraden sind diejenigen conjugirt, welche sie nicht treffen, also diejenigen, welche keine Zahl mit ihr gemein haben; so sind zu 4, 5 conjugirt die Geraden 1, 2; 2, 3; 3, 1.

Punkte liegen in einer Ebene, wenn sie eine, in einer Geraden, wenn sie zwei Zahlen gemein haben; Gerade liegen in einer Ebene, wenn sie eine Zahl gemein haben, und durch einen Punkt gehen diejenigen, deren Zahlen sich aus drei Zahlen paarweise zusammensetzen.

Die Gleichungen der Pentaederebenen bezeichnen wir durch

$$E_x^{(i)} = E^{(i)} = E_1^{(i)} x_1 + E_2^{(i)} x_2 + E_3^{(i)} x_3 + E_4^{(i)} x_4 = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Die Gleichung der Schnittlinie von $E^{(i)}$ mit $E^{(k)}$ ist:

$$\begin{vmatrix} E_1^{(i)} & E_2^{(i)} & E_3^{(i)} & E_4^{(i)} \\ E_1^{(k)} & E_2^{(k)} & E_3^{(k)} & E_4^{(k)} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = (E^{(i)}, E^{(k)}, u, v) = 0;$$

d. h. dieses ist die Gleichung des Complexes, welcher aus allen jene Linie treffenden Geraden gebildet ist, oder die Bedingung dafür, dass die Schnittlinie der Ebenen $u_x = 0$, $v_x = 0$ mit jener einen Punkt gemein haben.

Die Gleichung des Schnittpunkts von $E^{(i)}$, $E^{(k)}$, $E^{(h)}$ ist

$$\begin{vmatrix} E_1^{(i)} & E_2^{(i)} & E_3^{(i)} & E_4^{(i)} \\ E_1^{(k)} & E_2^{(k)} & E_3^{(k)} & E_4^{(k)} \\ E_1^{(h)} & E_2^{(h)} & E_3^{(h)} & E_4^{(h)} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = (E^{(i)}, E^{(k)}, E^{(h)}, u) = 0.$$

Ausser diesen Determinanten werden im Folgenden noch oft die aus den Coefficienten von vier der Ebenen gebildeten Determinanten:

$$\begin{vmatrix} E_1^{(i)} & E_2^{(i)} & E_3^{(i)} & E_4^{(i)} \\ E_1^{(k)} & E_2^{(k)} & E_3^{(k)} & E_4^{(k)} \\ E_1^{(h)} & E_2^{(h)} & E_3^{(h)} & E_4^{(h)} \\ E^{(m)} & E_2^{(m)} & E_3^{(m)} & E_4^{(m)} \end{vmatrix} = (E^{(i)}, E^{(k)}, E^{(h)}, E^{(m)}).$$

Der Bequemlichkeit wegen werde ich in Zukunft bei der Bezeichnung dieser Determinanten den Buchstaben E überall auslassen. Es soll also die letzte durch (i, k, h, m) bezeichnet werden, die Gleichung einer Knotenlinie durch

$$(i, k, u, v) = 0,$$

und die Gleichung eines Knotenpunktes durch

$$(i, k, h, u) = 0,$$

wobei auch die Komma wegbleiben können.

Die fünf aus vier Reihen der E gebildeten Determinanten sind die Coefficienten der zwischen den fünf Ausdrücken E_x stattfindenden Identität, welche nach der nunmehr eingeführten Bezeichnung so zu schreiben ist:

$$(2345)\,E_1 - (1345)\,E_2 + (1245)\,E_3 - (1235)\,E_4 + (1234)\,E_5 = 0.$$

§ 11.

Ueber gewisse im Folgenden auftretende Constanten.

Ehe ich dazu übergehe, die Gleichung der Fläche 3ter Ordnung durch die fünf linearen Ausdrücke E darzustellen, werde ich einige Formeln entwickeln, welche diese Darstellung wesentlich erleichtern.

Nach § 5., Formel (3) besteht, wenn y, z conjugirte Punkte der Hesse'schen Fläche sind, die Gleichung

$$a_x a_y a_z = 0$$

unabhängig von den Werthen der x. Da nun der Knotenpunkt 1 2 3 jedem Punkte der Geraden 4 5 conjugirt ist, so darf man für y den Punkt 123, für z den Schnittpunkt der Geraden 45 mit einer beliebigen Ebene u setzen, und hat daher für alle Werthe der x und der u:

$$(1) \qquad a_x (a\,123)(a\,45\,u) = 0,$$

oder allgemein:

$$(2) \qquad a_x (a\,i_1\,i_2\,i_3)(a\,i_4\,i_5\,u) = 0,$$

wenn i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in irgend welcher Reihenfolge bedeuten.

Insbesondere hat man aus (1) die Gleichungen:

$$a_x (a\,123)(a\,145) = 0,$$
$$a_x (a\,123)(a\,245) = 0,$$
$$a_x (a\,123)(a\,345) = 0$$

(für beliebige x), Gleichungen, welche in ähnlicher Weise für je zwei conjugirte Knotenpunkte bestehen. Da jedem der zehn Knotenpunkte drei conjugirt sind, so giebt es $\frac{10 \cdot 3}{2}$ Paare conjugirter Knotenpunkte, und die entsprechenden fünfzehn Gleichungen haben die Form:

$$(3) \qquad a_x (a\,i_1\,i_2\,i_3)(a\,i_1\,i_4\,i_5) = 0;$$

nur eine einzige Zahl kommt hier zweimal vor.

Dagegen verschwinden nicht identisch für alle x diejenigen Ausdrücke, welche aus $a_x a_y a_z$ entstehen, wenn man für y, z zwei nicht conjugirte Knotenpunkte setzt, also zwei solche, die auf derselben Geraden liegen, mithin *zwei* Zahlen gemein haben. Die Gleichung

$$(4) \qquad a_x (a\,234)(a\,235) = 0$$

stellt also eine Ebene dar. Aber wegen der Gleichungen (3) sieht man sofort, dass diese Gleichung durch die Knotenpunkte

$$124, \; 125, \; 134, \; 135, \; 145$$

befriedigt wird, da die Ausdrücke

$$(a\,124)\,(a\,234)\,(a\,235)$$
$$(a\,125)\,(a\,234)\,(a\,235)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

aus den verschwindenden Ausdrücken

$$(a\,124)\,(a\,235)\,a_x, \quad (a\,125)\,(a\,234)\,a_x \ldots$$

durch passende Wahl der x abgeleitet werden können. Die Gleichung (4) wird also durch fünf in der Ebene $E_x^{(1)}$ liegende Knotenpunkte befriedigt, und kann sich demnach von $E_x^{(1)} = 0$ nur um einen constanten Factor unterscheiden. Man hat also identisch:

$$a_x\,(a\,234)\,(a\,235) = c\,.\,E_x^{(1)}, \tag{5}$$

und ebenso:

$$a_x\,(a\,234)\,(a\,245) = d\,.\,E_x^{(1)}, \tag{6}$$

sowie noch vier andere ähnliche Darstellungen, bei welchen links beziehungsweise die Zahlen 25, 34, 35, 45 doppelt vorkommen.

So lange die absoluten Werthe der Coefficienten der E nicht völlig bestimmt sind, bleiben auch die absoluten Werthe der $c, d \ldots$ unbestimmt. Ihre Verhältnisse aber ergeben sich auf folgende Weise. Multipliciren wir (5) mit (1245), (6) mit (2345) und bilden die Differenz, so finden wir links:

$$a_x\,(a\,234)\,\{(a\,235)\,(1245) - (a\,245)\,(1235)\}$$
$$= a_x\,(a\,234)\,(a\,125)\,(2345),$$

was nach (3) identisch verschwindet. Daher giebt die rechte Seite:

$$c\,.\,(1245) - d\,.\,(1235) = 0,$$

oder:

$$\frac{c}{(1\,2\,3\,5)} = \frac{d}{(1\,2\,4\,5)}.$$

Der von linker Seite von (5), (6) nur um einen constanten Factor verschiedene Ausdruck:

$$\frac{a_x\,(a\,2\,3\,4)\,(a\,2\,3\,5)}{(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)} = \frac{c\,E_x^{(1)}}{(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)} = \frac{d\,E_x^{(1)}}{(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,4\,5)} = \frac{a_x\,(a\,2\,3\,4)\,(a\,2\,4\,5)}{(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,4\,5)}$$

ändert also seinen Werth nicht mehr, wenn man die Zahlen 3 und 4 vertauscht. Da er nun in Bezug auf 23 einerseits und auf 45 andererseits vollkommen symmetrisch ist, so kann er sich auch nicht mehr ändern, wenn man die Zahlen 2, 3, 4, 5 *irgendwie* vertauscht. Daher ist er von $E_x^{(1)}$ nur um einen von diesen Zahlen gänzlich unabhängigen constanten Factor verschieden, welcher durch $\alpha^{(1)}$ bezeichnet werden mag. Man hat also:

$$\frac{a_x\,(a\,k_2\,k_3\,k_4)\,(a\,k_2\,k_3\,k_5)}{(1\,k_2\,k_3\,k_4)\,(1\,k_2\,k_3\,k_5)} = \alpha^{(1)}\,E_x^{(1)},$$

wo nun k_2, k_3, k_4, k_5 die Zahlen 2, 3, 4, 5 in irgend welcher Reihen-

folge bedeuten. Und allgemein erhält man auf gleiche Weise die Formel:

$$(7) \qquad \frac{a_x\,(a\,i_2\,i_3\,i_4)\;(a\,i_2\,i_3\,i_5)}{(i_1\,i_2\,i_3\,i_4)\;(i_1\,i_2\,i_3\,i_5)} = \alpha^{(i_1)}\,E_x^{(i_1)}\,,$$

wo i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in irgend welcher Reihenfolge darstellen.

Haben wir die absoluten Werthe der Coefficienten in E in irgend welcher Weise fixirt, so bestimmen die Gleichungen (7) fünf Constante $\alpha^{(i)}$, welche den fünf Ebenen einzeln zugeordnet sind. Von diesen soll in der Folge wiederholt Gebrauch gemacht werden.

§ 12.

Die Polaren der Knotenpunkte.

Es wurde oben gezeigt, dass die Polare eines Knotenpunktes 1 2 3 aus zwei Ebenen besteht, welche sich in der Geraden 4 5 schneiden. Die Polare soll jetzt durch die Ebenen E ausgedrückt werden. Ihre Gleichung ist zunächst

$$a_x^2\,(a\,1\,2\,3) = 0.$$

Multiplicirt man mit (2 3 4 5) und wendet die Identität an:

$$a_x\,(2\,3\,4\,5) - E_x^{(2)}\,(a\,3\,4\,5) + E_x^{(3)}\,(a\,2\,4\,5) - E_x^{(4)}\,(a\,2\,3\,5) + E_x^{(5)}\,(a\,2\,3\,4) = 0,$$

so erhält man:

$$a_x^2\,(a\,1\,2\,3)\,(2\,3\,4\,5) = a_x\,(a\,1\,2\,3)\left\{E_x^{(2)}\,(a\,3\,4\,5) - E_x^{(3)}\,(a\,2\,4\,5) + E_x^{(4)}\,(a\,2\,3\,5) - E_x^{(5)}\,(a\,2\,3\,4)\right\} = 0.$$

Nun verschwinden nach § 11. die Coefficienten von $E_x^{(2)}$ und $E_x^{(3)}$; die von $E_x^{(4)}$ und $E_x^{(5)}$ aber werden nach der Formel (7) desselben §.:

$$a_x\,(a\,1\,2\,3)\,(a\,2\,3\,5) = -\,(1\,2\,3\,4)\,(2\,3\,4\,5)\,\alpha^{(4)}\,E_x^{(4)}$$
$$a_x\,(a\,1\,2\,3)\,(a\,2\,3\,4) = \,(1\,2\,3\,5)\,(2\,3\,4\,5)\,\alpha^{(5)}\,E_x^{(5)}.$$

Setzt man diese Werthe ein und dividirt durch (2 3 4 5), so ergiebt sich der gesuchte Ausdruck der Polare des Knotenpunktes 1 2 3:

$$a_x^2\,(a\,1\,2\,3) = -\,\alpha_4\,E_x^{(4)^2}.\,(1\,2\,3\,4) - \alpha_5\,E_x^{(5)^2}.\,(1\,2\,3\,5).$$

Da hier in dem Ausdrucke der Polare nur die Quadrate von $E_x^{(4)}$ und $E_x^{(5)}$ auftreten, so folgt der Satz (vgl. Clebsch a. a. O. p. 218):

> *Die Ebenen, in welche die Polare eines Knotenpunktes zerfällt, sind harmonisch zu den Pentaederebenen, welche sich in der ihm conjugirten Knotengeraden schneiden.*

Man kann dies auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, diese beiden Pentaederebenen seien in Bezug auf die Polare conjugirt.

Allgemein haben wir, wenn i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 in irgend welcher Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bedeuten, für die Polare eines Knotenpunktes den Ausdruck:

$$(1) \quad a_x^2\,(a\, i_1\, i_2\, i_3) = -\alpha^{(i_4)} E_x^{(i_4)^2}(i_1\, i_2\, i_3\, i_4) - \alpha^{(i_5)} E_x^{(i_5)^2}(i_1\, i_2\, i_3\, i_5),$$

und die Polare zerfällt daher in die beiden Ebenen:

$$E_x^{(i_4)}\sqrt{-\alpha^{(i_4)}\,(i_1\, i_2\, i_3\, i_4)} + E_x^{(i_5)}\sqrt{\alpha^{(i_5)}\,(i_1\, i_2\, i_3\, i_5)} = 0$$

$$E_x^{(i_4)}\sqrt{-\alpha^{(i_4)}\,(i_1\, i_2\, i_3\, i_4)} - E_x^{(i_5)}\sqrt{\alpha^{(i_5)}\,(i_1\, i_2\, i_3\, i_5)} = 0.$$

§ 13.

Die kanonische Form der Fläche dritter Ordnung.

Mit Hülfe der im Vorigen entwickelten Formeln ist es nun leicht, die einfache Gleichung anzugeben, vermöge deren die Gleichung der Fläche 3[ter] Ordnung sich durch die fünf linearen Ausdrücke E darstellt.

Aus der Identität

$$a_x(2345) = E_x^{(2)}(a\,345) - E_x^{(3)}(a\,245) + E_x^{(4)}(a\,235) - E_x^{(5)}(a\,234)$$

erhält man durch Multiplication mit a_x^2:

$$(1) \quad a_x^3.(2345) = a_x^2\left\{E_x^{(2)}(a\,345) - E_x^{(3)}(a\,245) + E_x^{(4)}(a\,235) - E_x^{(5)}(a\,234)\right\}.$$

Nach der Gleichung (1) des vorigen §. haben nun die Coefficienten der E rechts die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a_x^2\,(a\,3\,4\,5) &= \alpha^{(2)} E_x^{(2)^2}(2\,3\,4\,5) + \alpha^{(1)} E_x^{(1)^2}(1\,3\,4\,5). \\ -a_x^2\,(a\,2\,4\,5) &= \alpha^{(3)} E_x^{(3)^2}(2\,3\,4\,5) - \alpha^{(1)} E_x^{(1)^2}(1\,2\,4\,5) \\ a_x^2\,(a\,2\,3\,5) &= \alpha^{(4)} E_x^{(4)^2}(2\,3\,4\,5) + \alpha^{(1)} E_x^{(1)^2}(1\,2\,3\,5) \\ -a_x^2\,(a\,2\,3\,4) &= \alpha^{(5)} E_x^{(5)^2}(2\,3\,4\,5) - \alpha^{(1)} E_x^{(1)^2}(1\,2\,3\,4). \end{aligned}$$

Führt man diese Ausdrücke ein, so erhält man aus (1) a_x^3, d. h. f, ausgedrückt mittelst der Formel:

$$f = \alpha^{(2)} E_x^{(2)^3} + \alpha^{(3)} E_x^{(3)^3} + \alpha^{(4)} E_x^{(4)^3} + \alpha^{(5)} E_x^{(5)^3}$$

$$+ \frac{\alpha_1}{(2345)} E_x^{(1)^2}\left\{E_x^{(2)}(1345) - E_x^{(3)}(1245) + E_x^{(4)}(1235) - E_x^{(5)}(1234)\right\}.$$

Nach der am Ende des § 10. angegebenen Identität ist aber der eingeklammerte Ausdruck rechts gleich

$$E_x^{(1)}(2\,3\,4\,5);$$

und es ergiebt sich also für f der symmetrische Ausdruck:

$$(2) \quad f = \alpha^{(1)} E_x^{(1)^3} + \alpha^{(2)} E_x^{(2)^3} + \alpha^{(3)} E_x^{(3)^3} + \alpha^{(4)} E_x^{(4)^3} + \alpha^{(5)} E_x^{(5)^3}.$$

Dieses ist Sylvester's kanonische Form, in welcher f sich als Aggregat von fünf Cuben ausdrückt.

Wir sind auf diese Form in einer eindeutigen Weise gekommen, indem wir die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche studirt haben. Es wird sich nun umgekehrt ergeben, dass in der That die Pentaederflächen die einzigen sind, für welche f die Form (2) annimmt; und zwar zeigt sich dieses dadurch, dass in der durch die Darstellung (2) gegebenen Fläche die E nothwendigerweise die Pentaederflächen sind. Wir werden dies zeigen, indem wir, von der Form ausgehend, diejenigen Bildungen (nebst anderen) aufstellen, welche wir oben, von der allgemeinen Form von f ausgehend, gegeben haben.

Es wird sich hierbei noch ein anderer Umstand erledigen. Denn in dem Vorigen war der Beweis für die Natur der gegenseitigen Lage der Knotenpunkte dadurch geführt, dass wir gewisse Vorkommnisse als im allgemeinen Falle nicht auftretend annahmen (§ 7.). Das letztere wird dadurch gerechtfertigt, dass wir es so finden, wenn wir von der Form (2) einer Fläche 3ter Ordnung ausgehen und die Frage in dieser Form studiren.

Um die in Rede stehenden Bildungen bequem ausführen zu können, werde ich zunächst im folgenden §. entwickeln, wie man aus der symbolischen Form einer aus f entsprungenen Covariante etc. sofort die wirkliche Gestalt ableiten kann, welche dieselbe für die in der kanonischen Form f gegebene Flächengleichung annimmt.

§ 14.

Darstellung symbolischer Produkte mittelst der kanonischen Form.

Wenn man die Formel

$$a_x^3 = \sum_{i=1}^{i=5} \alpha^{(i)} E_x^{(i)^3} \tag{1}$$

zweimal nach den x differenzirt, und die Incremente einmal durch y, einmal durch z ersetzt, so erhält man:

$$a_x a_y a_z = \sum_{i=1}^{i=5} \alpha^{(i)} E_x^{(i)} E_y^{(i)} E_z^{(i)}. \tag{2}$$

Vergleicht man irgend welche Coefficienten auf beiden Seiten der Gleichung (2), so hat man

$$a_k a_h a_l = \sum_{i=1}^{i=5} \alpha^{(i)} E_k^{(i)} E_h^{(i)} E_l^{(i)}. \tag{3}$$

Diese Formel dient dazu, in symbolisch gegebenen Bildungen die symbolischen Reihen durch die wirklichen Coefficienten der kanonischen Form zu ersetzen. Nach der Formel (3) hat man eine symbolische Reihe a dadurch in diese überzuführen, dass man an Stelle derselben

geradezu die Coefficienten von $E^{(i)}$ setzt, das Resultat mit $\alpha^{(i)}$ multiplicirt, sodann aber nach i von 1 bis 5 summirt. Führt man dasselbe in Bezug auf jedes Symbol aus, welches in einem gegebenen symbolischen Produkte vorkommt, das k Symbole enthält, so ergiebt sich eine $k$fache Summe analoger Produkte, welche aus dem gegebenen hervorgehen, indem man die darin auftretenden Reihen in allen möglichen Combinationen durch die Coefficienten der Ebenen E ersetzt und mit den entsprechenden α multiplicirt. Aber in dieser Summe verschwinden erstlich alle diejenigen Terme, in denen etwa die Coefficienten der nämlichen Ebene E für zwei verschiedene Reihen derselben symbolischen Determinante eingeführt sind. Enthält ferner ein solches symbolisches Produkt eine Anzahl von symbolischen Reihen symmetrisch und so, dass je zwei dieser Reihen dabei in einem symbolischen Determinantenfactor vereinigt auftreten, so verschwinden in der Summe nicht nur alle diejenigen Terme, in welchen nicht für alle diese symbolischen Reihen *verschiedene* Reihen der E eingeführt werden, sondern die übrigen werden auch einander gruppenweise gleich. Die Terme einer Gruppe unterscheiden sich nur durch Vertauschung der für diese symbolischen Reihen gesetzten Reihen von E unter einander. Man kann also die von diesen symbolischen Reihen herrührenden Summen durch eine einzige ersetzen, welche sich auf alle *Combinationen* (ohne Wiederholung) von Reihen der E bezieht, welche an Stelle jener symbolischen Reihen treten können, und muss diese einfache Summe dann nur mit der *Permutationszahl* der Anzahl der gedachten symbolischen Reihen multipliciren. Solche, auf die betreffenden Combinationen ausgedehnten einfachen Summen werde ich durch ein einfaches Summenzeichen bezeichnen, dem ich nur diejenigen Indices untersetze, welche durch alle bezüglichen Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu ersetzen sind.

Hiernach sind sofort die Formen ersichtlich, welche die symbolischen Ausdrücke

$$a_x b_x (a b u v)^2, \quad a_x b_x c_x (a b c u)^2 = \varphi_x^3 u_\psi^2, \quad \Delta = a_x b_x c_x d_x (a b c d)^2$$

in ihrer wirklichen Darstellung mit Hülfe der kanonischen Form annehmen.

In der Form $a_x b_x (a b u v)^2$ kommen zwei Symbolreihen vor, symmetrisch und in derselben Determinante $(a b u v)$ vereinigt. Daher hat man nach dem Obigen:

$$(4) \qquad a_x b_x (a b u v)^2 = 2 \sum_{i,k} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} (i k u v)^2,$$

wo die Summe sich über alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu zweien erstreckt.

In $\varphi_x^3 u_\psi^2 = a_x b_x c_x (a b c u)^2$ haben wir drei Symbolreihen, symmetrisch und in derselben Determinante vereinigt; also ist:

(5) $$\varphi_x^3 u_\psi^2 = 6 \sum_{i,k,h} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} \alpha^{(h)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} E_x^{(h)} (i\,k\,h\,u)^2,$$

wobei die Summe sich über alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu dreien erstreckt.

Endlich enthält $\Delta = a_x b_x c_x d_x (a\,b\,c\,d)^2$ vier Symbolreihen, symmetrisch und in derselben Determinante vereinigt. Daher ist:

(6) $$\Delta = 24 \sum_{i,k,h,l} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} \alpha^{(h)} \alpha^{(l)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} E_x^{(h)} E_x^{(l)} (i\,k\,h\,l)^2,$$

wo die Summe sich auf alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu vieren erstreckt.

Ich füge noch die Darstellung einer vierten Form:

(7) $$S = (a\,b\,c\,u)\,(a\,b\,d\,u)\,(a\,c\,d\,u)\,(b\,c\,d\,u) = u_s^4$$

hinzu, welche ich im Folgenden gebrauchen werde. Sie enthält vier symbolische Reihen, symmetrisch und je zwei in einem Determinantenfactor vereinigt. Daher ist:

(8) $$S = 24 \sum_{i,k,h,l} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} \alpha^{(h)} \alpha^{(l)} (ikhu)\,(iklu)\,(ihlu)\,(khlu),$$

wo die Summe sich wieder über alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 erstreckt.

Die Fläche 4ter Classe $S = 0$ wird von den Ebenen umhüllt, bei deren Schnittcurve mit $f = 0$ von den neun Wendetangenten sich dreimal drei in einem Punkte schneiden (Clebsch, Borchardt's Journal, Bd. 58. p. 238). Man kann sie nach ihrer Ableitung aus der Aronhold'schen Invariante S füglich die *Aronhold'sche Fläche* nennen.

§ 15.

Nachweis der Knotenpunkte und ihrer Lagenverhältnisse aus der kanonischen Form.

Dass die Pentaederecken Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche sind, lehrt die Gleichung (6) sofort. Denn für eine solche Ecke verschwinden drei Ausdrücke E_x. In den Differentialquotienten von Δ aber enthält jeder Term noch das Produkt dreier verschiedener E_x. Daher muss mindestens eines von diesen jedesmal verschwinden; es verschwinden also für eine Pentaederecke alle Differentialquotienten von Δ; mithin sind diese Ecken Knotenpunkte von $\Delta = 0$.

Bilden wir nun die Polare $a_x^2\,(a\,1\,2\,3)$ einer Pentaederecke 1 2 3, so haben wir nur in der Formel (2) des § 14. die y gleich den x zu setzen, für die z aber die Coordinaten dieser Ecke. Es verschwinden dann $E_z^{(1)}$, $E_z^{(2)}$, $E_z^{(3)}$, und es bleibt:

$$\alpha^{(4)} E_x^{(4)^2} (1\,2\,3\,4) + \alpha^{(5)} E_x^{(5)^2} (1\,2\,3\,5) = 0.$$

Dieses ist der Satz des § 12., nach welchem die Polare einer Pentaederecke aus zwei Ebenen besteht, welche durch die conjugirte Kante gehen und mit den durch dieselbe Kante gehenden Pentaederseiten ein harmonisches System bilden.

Das Quadrat der Seite dieser Kante ergiebt sich nach § 2., indem man die Gleichung der Polare von 1 2 3 in Liniencoordinaten ausdrückt. Der allgemeine Ausdruck der Polare von x in Liniencoordinaten ist

$$a_x b_x (a b u v)^2 = 0,$$

was nach § 14. (4) in

$$\sum_{i,k} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} (i k u v)^2 = 0$$

übergeht. Setzt man nun für x die Ecke 1 2 3, so verschwinden $E_x^{(1)}$, $E_x^{(2)}$, $E_x^{(3)}$, so bleibt

$$\alpha^{(4)} \alpha^{(5)} (1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,.\,(4\,5\,u v)^2 = 0,$$

also wirklich, abgesehen von einem constanten Factor, das Quadrat der Gleichung $(4\,5\,u v) = 0$ der Kante 4 5.

Die Kanten des Pentaeders liegen ganz auf der Hesse'schen Fläche, da deren Gleichung befriedigt wird, wenn irgend zwei der E_x verschwinden.

Ganz ebenso wie die Gleichung (4) des § 14. bildet man den Ausdruck

(1) $$a_x b_x (a b u v)(a b U V) = 2 \sum_{i,k} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} (i k u v)(i k U V),$$

welcher, gleich Null gesetzt, bedeutet, dass die Geraden u, v und U, V entsprechende sind in Bezug auf die Polare des Punktes x, d. h. dass jede dieser Geraden die der andern in Bezug auf die Polare conjugirte Linie schneidet.

Ersetzt man in (1) uv und UV durch zwei conjugirte Knotengerade, d. h. durch zwei solche, welche keinen Knotenpunkt gemein haben, etwa durch 23 und 45, so verschwinden alle Produkte $(i k u v)$ $(i k U V)$, und man erhält die Gleichung, welche von den x unabhängig besteht:

$$a_x b_x (a b\, 2 3)(a b\, 4 5) = 0,$$

d. h. den Satz 4. des § 8., nach welchem zwei conjugirte Knotengerade einander in Bezug auf die Polare *jedes* Punktes entsprechen.

Ersetzt man dagegen in (4) die uv, UV durch zwei *nicht* conjugirte Knotengeraden, also durch zwei, welche sich schneiden, etwa 35 und 45, so bleibt:

(2) $$a_x b_x (a b\, 3 5)(a b\, 4 5) = 2 \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} E_x^{(1)} E_x^{(2)} (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,5).$$

Dies verschwindet nur, wenn $E_x^{(1)} = 0$ oder $E_x^{(2)} = 0$, und man hat also den Satz:

1. *Nicht conjugirte Knotengerade entsprechen einander nur in Bezug auf die Polaren der Punkte derjenigen beiden Pentaederebenen, in welchen keine von ihnen liegt.*

Für die Polare des Punktes x in Ebenencoordinaten fanden wir in § 14. die Gleichung:

$$(3)\qquad \varphi_x^3 u_\psi^2 = 6 \sum_{i,k,h} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} \alpha^{(h)} E_x^{(i)} E_x^{(h)} E_x^{(k)} (ikhu)^2 = 0;$$

sieht man darin die u als gegeben, die x als veränderlich an, so ist dies zugleich die Gleichung der zur Ebene u gehörigen Fläche 3ter Ordnung.

Ersetzt man in (3) die x durch die Coordinaten eines Knotenpunktes, etwa 123, so verschwinden drei der E_x und damit der ganze Ausdruck (3). Man hat also

$$(\varphi\, 1\, 2\, 3)^3 u_\psi^2 = 0$$

für alle Werthe der u. Dies ist der Satz 2. des § 6., nach welchem alle den Ebenen u des Raumes zugehörigen Flächen 3ter Ordnung die Knotenpunkte gemein haben.

Ersetzt man dagegen x durch einen beliebigen Punkt einer Knotengerade, etwa durch den Punkt $12v$, in welchem die Knotengerade 12 von einer beliebigen Ebene v geschnitten wird, so muss die Gleichung seiner Polare in Ebenencoordinaten das Quadrat der Spitze des Kegels sein, in welche sie ausartet, d. h. das Quadrat der Gleichung des conjugirten Knotenpunktes (hier 345). In der That ist aus (3):

$$(4)\quad (\varphi\, 1\, 2\, v)^3 u_\psi^2 = 6\, \alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)} (1\,2\,3\,v)\,(1\,2\,4\,v)\,(1\,2\,5\,v)\,.\,(3\,4\,5\,u)^2,$$

also $(\varphi\, 1\, 2\, v)^3 u_\psi^2 = 0$ von $(3\,4\,5\,u)^2 = 0$ nur um einen constanten Factor verschieden.

Statt aber den beliebigen Punkt der Knotengeraden durch die Ebenen $12v$ zu bestimmen, kann man sie durch drei Ebenen UVv bestimmen, von denen die ersteren beiden durch sie gehen, so dass man sie als Gerade UV bezeichnen kann, und die Gleichung des conjugirten Knotenpunktes, ins Quadrat erhoben, ist dann:

$$(5)\qquad (\varphi\, U V v)^3 u_\psi^2 = 0,$$

wo die u die Veränderlichen, die v beliebige Constanten bedeuten.

Betrachtet man dagegen die u als gegeben, die v als veränderlich, so stellt (5) das Produkt der Schnittpunkte, welche die Knotenpunkte 12 oder UV mit der einer beliebigen Ebene u zugehörigen Fläche 3ter Ordnung bilden, also das Produkt der auf ihr liegenden Knotenpunkte dar. In der That ist diese Gleichung von der Gleichung

$$(1\,2\,3\,v)\,(1\,2\,4\,v)\,(1\,2\,5\,v) = 0$$

nur um einen constanten Factor verschieden.

Für zwei in Bezug auf die Polare von x conjugirte Ebenen u, v hat man aus (2):

$$\varphi_x^3 u_\psi v_\psi = 6 \sum_{i,k,h} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} \alpha^{(h)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} E_x^{(h)} (ikhu)(ikhv) = 0.$$

Ersetzt man hierin u, v durch irgend zwei Pentaederebenen, etwa 1, 2, so bleibt:

$$\varphi_x^3 E_\psi^{(1)} E_\psi^{(2)} = 6\, \alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)} E_x^{(3)} E_x^{(4)} E_x^{(5)} (1\,3\,4\,5)(2\,3\,4\,5) = 0.$$

Dies verschwindet nur, wenn $E_x^{(3)}$ oder $E_x^{(4)}$ oder $E_x^{(5)}$ verschwinden; daher folgt der Satz:

2. *Zwei Pentaederebenen sind conjugirt in Bezug auf die Polaren der Punkte jeder der drei anderen Ebenen des Pentaeders.*

§ 16.

Bestimmung des Pentaeders, wenn einzelne Theile desselben gegeben sind.

Ich werde nun, auf die Entwickelungen des vorigen Paragraphen gestützt, eine Reihe von Aufgaben lösen, in welchen von dem Pentaeder einer Fläche 3ter Ordnung einzelne Stücke als gegeben vorausgesetzt werden, und es sich darum handelt, die übrigen daraus zu finden.

I. *Vier Pentaederebenen sind bekannt* (2 3 4 5), *die fünfte* (1) *soll gefunden werden.*

Ich setze in der Gleichung (2) des § 14.:

$$a_x a_y a_z = \Sigma \alpha^{(i)} E_x^{(i)} E_y^{(i)} E_z^{(i)}$$

für y einen beliebigen Punkt der Ebene 2, für z den Punkt 3 4 5. Es bleibt dann

$$a_x a_y (a\,3\,4\,5) = \alpha^{(1)} E_x^{(1)} E_y^{(1)} (1\,3\,4\,5).$$

Die rechte Seite ist von $E_x^{(1)}$ nur um einen constanten Factor verschieden; daher ist

$$a_x a_y (a\,3\,4\,5) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der gesuchten fünften Pentaederseite.

In derselben kommt, wie man sieht, nur eine Ecke (3 4 5) und ein Punkt y der Ebene 2 vor. Diese Stücke genügen also zur Bestimmung der fünften Ebene.

Geometrisch kann man die in der Gleichung (1) gegebene Lösung der Aufgabe durch den Satz interpretiren:

Die Ebene $E^{(1)}$ ist die Polarebene eines beliebigen Punktes von $E^{(2)}$ in Bezug auf die quadratische Polare der Ecke 3 4 5.

II. *Drei Pentaederebenen* (3, 4, 5) *sind gegeben, man soll die beiden übrigen* (1, 2) *finden.*

Nach der Formel (2) des § 15. ist:

$$a_x b_x (ab\,35)(ab\,45) = 2\,\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} E_x^{(1)} E_x^{(2)} (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,5).$$

Die Gleichung

$$(2) \qquad a_x b_x (ab\,3\,5)(ab\,4\,5) = 0$$

ist daher von dem Produkte der Gleichungen der beiden gesuchten Pentaederebenen nur um einen constanten Factor verschieden und liefert also die Lösung der Aufgabe.

In (2) kommen nur die Kanten 35, 45 vor; ihre Kenntniss genügt also zur Auffindung der übrigen Pentaederseiten. Der geometrische Inhalt der Auflösung ist durch den Satz 1. des § 15. gegeben; man sucht diejenigen Punkte, in Bezug auf deren Polare die Kanten 35, 45 einander entsprechen; sie bilden die gesuchten beiden Ebenen.

III. *Ein Knotenpunkt* 123 *ist gegeben; man sucht die Ebenen des Pentaeders.*

Die Pentaederebenen theilen sich in diesem Falle in zwei Gruppen, deren jede besonders zu suchen ist. Zur einen Gruppe gehören die drei Ebenen, welche durch den gegebenen Knotenpunkt gehen, zur anderen Gruppe die beiden übrigen.

Das Quadrat der Gleichung der Geraden 45 erhält man (vergl. § 15.), indem man die Polare des Punktes 123 in Liniencoordinaten aufstellt:

$$(a\,1\,2\,3)(b\,1\,2\,3)(ab\,uv)^2 = 0.$$

Zwei Punkte dieser Geraden seien ξ, η. Die drei Punkte $\xi + \lambda_1\eta$, $\xi + \lambda_2\eta$, $\xi + \lambda_3\eta$, welche Knotenpunkte sind, erhält man nach § 8., Satz 1., indem man die Gerade mit der einer beliebigen Ebene u zugeordneten Fläche 3ter Ordnung schneidet, also aus der cubischen Gleichung:

$$(\varphi_\xi + \lambda\varphi_\eta)^3 u_\psi^2 = 0.$$

Hat man so die Knotenpunkte 145, 245, 345 gefunden, so findet man die Gleichungen der Ebenen $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$ nach § 11., (7) in der Form:

$$\begin{aligned} 1.:&\quad (a_\xi + \lambda_2 a_\eta)(a_\xi + \lambda_3 a_\eta)\,a_x = 0\\ 2.:&\quad (a_\xi + \lambda_3 a_\eta)(a_\xi + \lambda_1 a_\eta)\,a_x = 0\\ 3.:&\quad (a_\xi + \lambda_1 a_\eta)(a_\xi + \lambda_2 a_\eta)\,a_x = 0. \end{aligned}$$

Dagegen ist das Produkt der Ebenen $E^{(4)}$ und $E^{(5)}$ nach II. durch die Gleichung

$$a_x b_x (ab\,1\,2)(ab\,1\,3) = 0$$

gegeben.

IV. *Zwei Pentaederebenen sind gegeben, die übrigen gesucht.*

Man findet ihr Produkt nach der letzten Formel des § 15. ausgedrückt durch die Gleichung

$$\varphi_x^3 E_\psi^{(1)} E_\psi^{(2)} = 0.$$

Die geometrische Interpretation der Lösung ist in dem Satze 2. des § 15. enthalten.

Bei dieser Lösung wird von den Ebenen 1, 2 nur das Produkt benutzt, da $E_\psi^{(1)} E_\psi^{(2)}$ aus dem Produkt $E_x^{(1)} E_x^{(2)}$ entsteht, wenn man die x durch die ψ ersetzt. Diese Bemerkung führt zu einer weiterhin zu benutzenden Darstellung des Produktes dreier Pentaederebenen.

Es ist nach § 15., Formel (2):

$$a_x b_x (ab\,35)(ab\,45) = 2\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} E_x^{(1)} E_x^{(2)} (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,5).$$

Setzt man in dieser Identität für die x die ψ und multiplicirt mit φ_x^3, so hat man:

$$\varphi_x^3 a_\psi b_\psi (ab\,35)(ab\,45) = 2\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} . \varphi_x^3 E_\psi^{(1)} E_\psi^{(2)} . (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,5).$$

Aber nach der letzten Formel des § 15. ist:

$$\varphi_x^3 E_\psi^{(1)} E_\psi^{(2)} = 6\alpha^{(3)}\alpha^{(4)}\alpha^{(5)} E_x^{(3)} E_x^{(4)} E_x^{(5)} (1\,3\,4\,5)(2\,3\,4\,5).$$

Daher wird auch:

$$\varphi_x^3 a_\psi b_\psi (ab\,35)(ab\,45)$$

$$= 12\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}\alpha^{(4)}\alpha^{(5)} . E_x^{(3)} E_x^{(4)} E_x^{(5)} . (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,5)(1\,3\,4\,5)(2\,3\,4\,5).$$

Man hat hier das Produkt dreier Pentaederebenen durch einen Ausdruck dargestellt, in dem nur zwei ihrer Schnittlinien (35, 45) auftreten.

V. *Eine Pentaederebene* (5) *ist gegeben; die übrigen sind zu finden.*

Seien ξ, η irgend zwei Punkte der Ebene 5. Die Punkte, in welchen die Gerade ξ, η die Hesse'sche Fläche schneidet, findet man aus der biquadratischen Gleichung:

$$(\Delta_\xi + \lambda\Delta_\eta)^4 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung seien λ_1, λ_2, λ_3, λ_4; die vier Punkte $\xi + \lambda_i \eta$ liegen dann einzeln auf den Pentaederkanten 15, 25, 35, 45, in denen die Ebene 5 die Hesse'sche Fläche schneidet. Diese Kanten aber sind den vier Ecken 234, 134, 124, 123 conjugirt; man findet also die Quadrate der Gleichungen der letztern nach § 5., indem man die Polaren dieser Punkte in Ebenencoordinaten aufstellt, also aus den Gleichungen

$$(\varphi_\xi + \lambda_i\varphi_\eta)^3 u_\psi^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Setzen wir dies der Kürze wegen gleich $u_{\zeta^{(i)}}^2$, so dass $\zeta^{(i)}$ die Coordinaten eines dieser Knotenpunkte bedeuten, so ist nach I. die Gleichung der Pentaederebenen $E_x^{(i)}$ durch

$$a_\xi a_{\zeta^{(i)}} a_x = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wodurch die Aufgabe gelöst ist. Aber da

$$(\varphi_\xi + \lambda_i\varphi_\eta)^3 u_\psi^2 = u_{\zeta^{(i)}}^2$$

gesetzt wurde, so ist auch, identisch für die u und v:

$$(\varphi_\xi + \lambda_i \varphi_\eta)^3 u_\psi v_\psi = u_{\zeta^{(i)}} v_{\zeta^{(i)}}.$$

Versteht man also unter den v beliebige Constante, setzt aber für die u die Symbole a und multiplicirt mit $a_\xi a_x$, so erhält man die Gleichung der Ebene $E_x^{(i)}$ in der Form

$$(\varphi_\xi + \lambda_i \varphi_\eta)^3 a_\psi v_\psi a_\xi a_x = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Diese Form der Auflösung macht die Aufsuchung der Coordinaten $\xi^{(i)}$ unnöthig.

§ 17.

Das Produkt der fünf Pentaederebenen.

Ich gehe nun dazu über, das Produkt der Gleichungen aller fünf Pentaederebenen aufzustellen, wodurch dann die Aufgabe, die Ebenen des Pentaeders zu finden, allgemein auf eine Gleichung 5ten Grades zurückgeführt wird.

Durch P bezeichne ich das gesuchte Produkt, multiplicirt mit einer passend gewählten Constanten:

$$(1) \quad \begin{aligned} P = 24 \{\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)}\}^3 . \{(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5)\,(1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5)\}^2 \\ . E_x^{(1)} E_x^{(2)} E_x^{(3)} E_x^{(4)} E_x^{(5)}. \end{aligned}$$

Es kommt darauf an, den Ausdruck P auf eine Reihe von Bildungen zurückzuführen, in denen nur die Coefficienten der Fläche 3ter Ordnung, bez. deren Symbole auftreten.

Nun hat man zunächst nach den im vorigen §. unter IV. gegebenen Bildungen des Produktes zweier und dreier Ebenen, wobei nur die Bezeichnungen der Symbole verändert sind:

$$\varphi_x^3 a_\psi b_\psi (a b\, 3\,5)\,(a b\, 4\,5) \,.\, c_x d_x (c d\, 3\,5)\,(c d\, 4\,5)$$

$$= 24\, \alpha^{(1)^2} \alpha^{(2)^2} \alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)} . E_x^{(1)} E_x^{(2)} E_x^{(3)} E_x^{(4)} E_x^{(5)} . (1\,2\,3\,5)^2\,(1\,2\,4\,5)^2\,(1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5).$$

Führt man hieraus den Ausdruck des Produktes der E in (1) ein, so erhält man für P den Ausdruck:

$$(2) \quad \begin{aligned} P = \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \alpha^{(3)^2} \alpha^{(4)^2} \alpha^{(5)^2} . (1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5)\,(1\,2\,3\,4)^2 \\ . \varphi_x^3 a_\psi b_\psi (a b\, 3\,5)\,(a b\, 4\,5) \,.\, c_x d_x (c d\, 3\,5)\,(c d\, 4\,5). \end{aligned}$$

Es kommt darauf an, aus diesem Ausdrucke die Coefficienten der Ebenen allmälig herauszuschaffen und dafür symbolische Coefficienten der Fläche einzuführen. Ich gehe zu diesem Zwecke zunächst auf die Gleichung (1) des § 15. zurück:

$$(3) \quad a_x b_x (a b\, u\, v)\,(a b\, U V) = 2 \sum_{i,k} \alpha^{(i)} \alpha^{(k)} E_x^{(i)} E_x^{(k)} (i k\, u\, v)\,(i k\, U V).$$

Ich ersetze darin die x durch die Coordinaten der Punkte 1 2 3 und 1 2 4 und erhalte:

$$(a\,123)\,(b\,123)\,(ab\,uv)\,(ab\,UV) = \quad 2\,\alpha^{(4)}\,\alpha^{(5)}\,(1234)\,(1235)\,(45\,uv)\,(45\,UV),$$
$$(a\,124)\,(b\,124)\,(ab\,uv)\,(ab\,UV) = -2\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(5)}\,(1234)\,(1245)\,(35\,uv)\,(35\,UV).$$

Hier setze ich nun in der ersten Gleichung für

$$uv, \quad UV, \quad ab$$

die Symbole

$$ab, \quad cd, \quad ef,$$

in der zweiten Gleichung die Symbole

$$ab, \quad cd, \quad gh.$$

Alsdann ist:

$$(e\,1\,2\,3)\,(f\,1\,2\,3)\,(ef\,ab)\,(ef\,cd) = \quad 2\,\alpha^{(4)}\,\alpha^{(5)}\,(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,(4\,5\,ab)\,(4\,5\,cd)$$
$$(g\,1\,2\,4)\,(h\,1\,2\,4)\,(gh\,ab)\,(gh\,cd) = -2\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(5)}\,(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,4\,5)\,(3\,5\,ab)\,(3\,5\,cd);$$

multiplicirt man also (3) mit $-4\,(1235)\,(1245)$, so kann man rechts diese Gleichungen anwenden und erhält:

$$(4) \qquad -4\,P\,.\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5) = \alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}\,.\,(1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5)\,.$$
$$.\,\varphi_x^3\,a_\psi\,b_\psi\,c_x\,d_x\,(ab\,ef)\,(ab\,gh)\,(cd\,ef)\,(cd\,gh)\,(e\,1\,2\,3)\,(f\,1\,2\,3)\,(g\,1\,2\,4)\,(h\,1\,2\,4).$$

Die Form P erscheint hier im Zusammenhange mit einer Form, welche in Bezug auf zwei verschiedene Punkte quadratisch, für einen dritten von der 5ten Ordnung ist:

$$\varphi_x^3\,a_\psi\,b_\psi\,c_x\,d_x\,(ab\,ef)\,(ab\,gh)\,(cd\,ef)\,(cd\,gh)\,e_y\,f_y\,g_z\,h_z.$$

Aus dieser Form entsteht P bis auf einen constanten Factor, wenn man die y, z darin durch zwei nicht conjugirte Knotenpunkte (hier 1 2 3, 1 2 4) ersetzt.

Insofern wir diese Form nur rücksichtlich der in ihr auftretenden Punkte y, z betrachten, können wir dieselbe symbolisch durch

$$\varrho_y^2\,\sigma_z^2$$

bezeichnen, wobei zu bemerken ist, dass die Form für y, z symmetrisch ist, dass also $\varrho_y^2\,\sigma_z^2 = \varrho_z^2\,\sigma_y^2$.

Die Gleichung

$$\varrho_y^2\,\sigma_z^2 = 0$$

stellt also das Produkt der Pentaederseiten dar, wenn man unter y, z zwei nicht conjugirte Knotenpunkte versteht. Ausserdem hat man den Satz:

Wenn y, z zwei conjugirte Knotenpunkte sind, so verschwindet der Ausdruck $\varrho_y^2\,\sigma_z^2$ identisch.

Er verwandelt sich nämlich dann, etwa für die Knotenpunkte 1 2 3, 1 4 5, in

$$\varphi_x^3\,a_\psi\,b_\psi\,c_x\,d_x\,(ab\,ef)\,(ab\,gh)\,(cd\,ef)\,(cd\,gh)\,(e\,1\,2\,3)\,(f\,1\,2\,3)\,(g\,1\,4\,5)\,(h\,1\,4\,5).$$

Aber indem man die Formel (3) ähnlich wie oben benutzt, hat man:

$$(e\,1\,2\,3)\,(f\,1\,2\,3)\,(e\,f\,a\,b)\,(e\,f\,c\,d) = 2\,\alpha^{(4)}\,\alpha^{(5)}\,(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,(a\,b\,4\,5)\,(c\,d\,4\,5)$$

$$(g\,1\,4\,5)\,(h\,1\,4\,5)\,(g\,h\,a\,b)\,(g\,h\,c\,d) = 2\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,(1\,2\,4\,5)\,(1\,3\,4\,5)\,(a\,b\,2\,3)\,(c\,d\,2\,3),$$

und der obige Ausdruck kann also ersetzt werden durch:

$$4\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}\,\alpha^{(5)}\,(1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5)\,(1\,3\,4\,5)$$
$$.\,\varphi_x^3\,a_\psi\,b_\psi\,c_x\,d_x\,(a\,b\,4\,5)\,(c\,d\,4\,5)\,(a\,b\,2\,3)\,(c\,d\,2\,3).$$

Dieser Ausdruck aber verschwindet identisch, weil nach § 15. die Gleichung

$$a_x\,b_x\,(a\,b\,2\,3)\,(a\,b\,4\,5) = c_x\,d_x\,(c\,d\,2\,3)\,(c\,d\,4\,5) = 0$$

besteht, und also alle symbolischen Ausdrücke verschwinden, welche $(a\,b\,23)\,(a\,b\,45)$ oder $(c\,d\,23)\,(c\,d\,45)$ zu Factoren haben.

Wir haben nach dem Obigen für P den Ausdruck:

(5) $$-4\,P\,.\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5) = (\varrho\,1\,2\,3)^2\,(\sigma\,1\,2\,4)^2,$$

während zugleich

(6) $$0 = (\varrho\,1\,2\,3)^2\,(\sigma\,1\,4\,5)^2,$$

und während alle übrigen Gleichungen bestehen, welche durch Vertauschung der Zahlen aus diesen hervorgehen.

Quadrirt man nun die beiden identischen Gleichungen

$$(\varrho\,1\,3\,5)\,(1\,2\,3\,4) = (\varrho\,1\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5) - (\varrho\,1\,2\,3)\,(1\,3\,4\,5)$$
$$(\sigma\,2\,4\,5)\,(1\,2\,3\,4) = (\sigma\,2\,3\,4)\,(1\,2\,4\,5) - (\sigma\,1\,2\,4)\,(2\,3\,4\,5),$$

und multiplicirt die daraus erhaltenen Ausdrücke der doppelten Produkte rechts mit einander, so ergiebt sich:

$$4(\varrho\,123)\,(\varrho\,134)\,(\sigma\,124)\,(\sigma\,234)\,.\,(1235)\,(1245)\,(1345)\,(2345)$$
$$= \left\{(\varrho\,134)^2\,(1235)^2 + (\varrho\,123)^2\,(1345)^2 - (\varrho\,135)^2\,(1234)^2\right\}$$
$$.\left\{(\sigma\,234)^2\,(1245)^2 + (\sigma\,124)^2\,(2345)^2 - (\sigma\,245)^2\,(1234)^2\right\}.$$

Führt man rechts die Multiplication aus, so verschwinden nach (6) fünf Terme, während die anderen vier nach (5) den gemeinsamen Werth

$$-4\,\frac{P}{\alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}}\cdot(1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5)\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5)$$

annehmen. Es bleibt also nach Auslassung eines gemeinsamen Factors:

(7) $$-4\,P = (\varrho\,1\,2\,3)\,(\varrho\,1\,3\,4)\,(\sigma\,1\,2\,4)\,(\sigma\,2\,3\,4)\,.\,\alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)},$$

eine Gleichung, welche noch bestehen muss, wenn man an Stelle von 1, 2, 3, 4 vier andere der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 setzt.

Betrachten wir nun die Form, welche aus $\varrho_y^2\,\sigma_z^2$ entsteht, wenn man die z den y gleichsetzt. Diese Form mag symbolisch durch p_y^4 bezeichnet werden. Es ist dann

$$p_y^4 = \varrho_y^2\,\sigma_y^2\,;$$

und indem man diese Gleichung wiederholt nach den y differenzirt und die Incremente durch neue Coordinaten z, t, r ersetzt, findet man:

$$(8) \qquad 6\, p_y\, p_z\, p_t\, p_r = \Sigma\, \varrho_y\, \varrho_z\, \sigma_t\, \sigma_r\,,$$

wo die Summe rechts sich auf die sechs Glieder erstreckt, welche man durch Vertauschung der y, z, t, r aus der Grösse unter dem Summenzeichen erhält. Ersetzt man y, z, t, r durch die Coordinaten der Knotenpunkte

$$1\,2\,3, \quad 1\,3\,4, \quad 1\,2\,4, \quad 2\,3\,4,$$

so nimmt nach (7) jedes Glied der Summe (8) den Werth

$$-\frac{P}{\alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}}$$

an, und es ist also auch:

$$(9) \quad -4\,P = \alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}\,(p\,1\,2\,3)\,(p\,1\,2\,4)\,(p\,1\,3\,4)\,(p\,2\,3\,4),$$

und gleich den anderen Ausdrücken, die durch Aenderung der Zahlen aus diesem hervorgehen.

Nun hatten wir in § 14. für die Form

$$S = (a\,b\,c\,u)\,(a\,b\,d\,u)\,(a\,c\,d\,u)\,(b\,c\,d\,u) = u_s^4$$

den Ausdruck gefunden:

$$S = u_s^4 = 24 \sum_{i,k,h,l} \alpha^{(i)}\,\alpha^{(k)}\,\alpha^{(h)}\,\alpha^{(l)}\,(i\,k\,h\,u)\,(i\,k\,l\,u)\,(i\,h\,l\,u)\,(k\,h\,l\,u),$$

wo die Summe sich auf die fünf verschiedenen Combinationen der Zahlen i, k, h, l erstreckt. Ersetzen wir hierin die u durch die p, so verwandelt sich jedes Glied der Summe wegen (9) in $-4\,P$, und es bleibt also

$$-480\,P = p_s^4,$$

oder nach der Definition von P:

$$p_s^4 = -11520\,(\alpha^{(1)}\,\alpha^{(2)}\,\alpha^{(3)}\,\alpha^{(4)}\,\alpha^{(5)})^3\,((1\,2\,3\,4)\,(1\,2\,3\,5)\,(1\,2\,4\,5)\,(1\,3\,4\,5)\,(2\,3\,4\,5))^3$$
$$.\,E_x^{(1)}\,E_x^{(2)}\,E_x^{(3)}\,E_x^{(4)}\,E_x^{(5)}.$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck des Produktes der fünf Pentaederebenen durch die Coefficienten der Fläche. Ich fasse das Resultat in folgendem Satze zusammen:

Das Produkt der Pentaederebenen ist durch die Gleichung

$$p_s^4 = 0$$

gegeben, welche aus den Formen

$$u_s^4 = (a\,b\,c\,u)\,(a\,b\,d\,u)\,(a\,c\,d\,u)\,(b\,c\,d\,u)$$
$$p_y^4 = \varphi_x^3\,a_\varphi\,b_\varphi\,c_x\,d_x\,(a\,b\,c\,f)\,(a\,b\,g\,h)\,(c\,d\,c\,f)\,(c\,d\,g\,h)\,c_y\,f_y\,g_y\,h_y$$

gebildet ist, und in den Coefficienten der Fläche vom 15ten *Grade wird.*

§ 18.

Bestimmung der Pentaederebenen und Herstellung der kanonischen Form.

Von dem Produkt der Pentaederebenen ausgehend, kann man nun endlich den Weg, der zur Ueberführung von f in die kanonische Form einzuschlagen ist, vollständig darlegen. Es handelt sich zunächst darum, die Pentaederebenen zu finden; sind diese einzeln bekannt, so führen die Formeln des § 11. und 13. zum Ziele.

Bezeichnen wir durch G die Covariante

$$G = p_s^4;$$

sie stellt nach dem Vorigen, gleich Null gesetzt, das Produkt der Pentaederebenen dar; und insofern sie in den x vom 5ten Grade ist, kann man sie symbolisch durch

$$G = g_x^5$$

bezeichnen.

Schneiden wir nun die Fläche 5ter Ordnung $G = 0$, d. h. das Pentaeder, mit der Verbindungslinie zweier Punkte ξ, η. Die fünf Schnittpunkte haben dann Coordinaten von der Form $\xi + \lambda_i \eta$, und die den fünf Pentaederebenen entsprechenden Werthe λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 findet man aus der Gleichung 5ten Grades

$$(g_\xi + \lambda g_\eta)^5 = 0.$$

Hat man diese Gleichung gelöst und ist λ_i eine der fünf Wurzeln, so findet man die zugehörige Pentaederebene, indem man für den Punkt $\xi + \lambda_i \eta$ die Tangentenebene des Pentaeders bildet. Man kann also setzen:

$$(g_\xi + \lambda_i g_\eta)^4 g_x = E_x^{(i)},$$

und hat so die fünf Pentaederebenen bestimmt.

Um nun f in der kanonischen Form darzustellen, bestimmt man zunächst nach (7) § 11. die Constanten $\alpha^{(i)}$ durch die Formel

$$\frac{a_x\,(a\,i_2\,i_3\,i_4)\,(a\,i_2\,i_3\,i_5)}{(i_1\,i_2\,i_3\,i_4)\,(i_1\,i_2\,i_3\,i_5)} = \alpha^{(i_1)}\,E_x^{(i_1)},$$

in welcher die i die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in irgend welcher Reihenfolge bedeuten. Sofort hat man dann in der Gleichung

$$f = \Sigma\,\alpha^{(i)}\,E_x^{(i)^3}$$

die gesuchte kanonische Darstellung von f.

Giessen, im März 1872.

Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen.

Von A. Brill in Darmstadt.

Man wird in der analytischen Geometrie nicht selten auf die Aufgabe geführt, die gemeinschaftlichen Lösungen eines Systems von Gleichungen zu finden, welche durch das Verschwinden der Determinanten einer Matrix von Elementen (welche Variable enthalten) mit mehr Vertikal- als Horizontalreihen — Determinanten eines unvollständigen Systems — gebildet werden. Man hat die gemeinsamen Lösungen für eine gewisse Anzahl jener Gleichungen aufzustellen und von diesen die Zahl der den anderen nicht gemeinsamen Lösungen abzuziehen, um die Zahl der Allen gemeinsamen Lösungen zu finden. Für den allgemeinen Fall einer Matrix mit beliebig vielen Vertikal- und Horizontalreihen haben Herr S. Roberts*) und vorher durch Induction Herr Salmon**) diese Zahl gefunden. Beide jedoch ziehen in ihren Formeln nicht den Grad der einzelnen Veränderlichen, sondern die Gesammtdimension derselben in Rechnung. Ich werde im Nachfolgenden (§ 1.) ein Verfahren zur Bestimmung der gemeinsamen Lösungen angeben, welches auch auf den Fall, dass die Elemente nicht in Bezug auf die Dimension, sondern nur auf den Grad in den einzelnen Variabeln als allgemein angenommen werden, angewendet werden kann. Die erforderlichen Operationen werden beträchtlich vereinfacht, wenn man sich hierbei eines *algebraischen Hülfssatzes* (§ 3.) bedient, der, wie ich glaube, von allgemeinerem Interesse ist. Derselbe bezieht sich auf die Zahl der gemeinsamen Lösungen von zwei übervollständigen Systemen von Gleichungen, für welche einzeln man die entsprechenden Zahlen kennt.

Um ein grösseres Beispiel zu den allgemeinen Betrachtungen der § 1—3. zu geben, bestimmen wir in § 4. die Zahl derjenigen Werthesysteme $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ (deren einige auch constant sein können), welche die Determinanten des folgenden Systems zum Verschwinden bringen:

*) Crelle-Borchardt, Journal f. Math. Bd. 67.

**) Introductory lessons to the higher Algebra, 2. ed. p. 229.

$$(1)\qquad \left\|\begin{matrix} \varphi_1(\lambda_1) & \varphi_2(\lambda_1) & \dots\dots & \varphi_{k+i}(\lambda_1) \\ \varphi_1(\lambda_2) & \varphi_2(\lambda_2) & \dots\dots & \varphi_{k+i}(\lambda_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(\lambda_k) & \varphi_2(\lambda_k) & \dots\dots & \varphi_{k+i}(\lambda_k) \end{matrix}\right\|,$$

wo die φ ganze Functionen m^{ter} Ordnung je von den eingeklammerten Variabeln sind, und i sowohl positiv ($\leqq k$) als negativ ($\geqq 2-k$) sein kann.*)

Wenn man das Resultat dieser Abzählung geometrisch deutet, so enthält dasselbe die allgemeine Lösung einer Aufgabe über Schnittpunktsysteme von Curvenbüscheln mit einer geraden Linie, welche für den Fall $k=2$ (indem dort indess eine Curve an Stelle der Geraden tritt) in dem Abschnitt über das Verschwinden der Θ-Function (§ 61.) der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan gelöst worden ist.

§ 1.

Das übervollständige System von Gleichungen, welches durch Nullsetzen der einzelnen Determinanten des folgenden Systems mit k Horizontal- und q Vertikalreihen entsteht ($q \geqq k$):

$$(2)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kq} \end{matrix}\right\| = S(1, 2, \dots q)_k$$

enthält im Allgemeinen nur $q-k+1$ von einander unabhängige Gleichungen (wir werden sagen: ist „äquivalent“ $q-k+1$ Gleichungen). Denn man kann aus demselben, falls nicht alle Unterdeterminanten, welche sich aus irgend $k-i$ Vertikalreihen ($i<k$) bilden lassen, verschwinden**), ein System von q linearen Gleichungen, je mit den Elementen einer Vertikalreihe als Coefficienten, herleiten, welches $k-1$ Unbekannte besitzt und $q-k+1$ Relationen liefert.

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass zwischen den Elementen besondere Relationen nicht bestehen. Wir denken uns dieselben als Functionen von wenigstens soviel Variabeln, als von einander unabhängige Gleichungen durch das System (2) dargestellt sind.

Mit:

$$S(12\dots q)_k = 0$$

möge nun der Inbegriff aller Gleichungen bezeichnet werden, welche durch Nullsetzen der Determinanten des Systems (2) entstehen, mit:

$$(12\dots q)_k$$

*) Wir denken uns das System von Determinanten nach Bequemlichkeit bald in einem stehenden, bald in liegendem Rechteck angeordnet.

**) Vgl. den analogen Satz in Baltzer, Theor. d. Determinanten, 3. Aufl., S. 42.

die Zahl der *gemeinsamen Lösungen* dieser Gleichungen, wobei je nach Bedürfniss eine Anzahl von Variabeln als constant angesehen wird. Ferner möge mit:

$$[(12\ldots s)_k\,(12\ldots t)_k]$$

die Zahl der Lösungen bezeichnet werden, welche gleichzeitig den beiden Systemen:

$$S(12\ldots s)_k=0,\qquad S(12\ldots t)_k=0$$

genügen.

Wir führen nun im Folgenden mit Hülfe der Bemerkung, dass alle gemeinsamen Lösungen des Systems (2) unter denjenigen von irgend $q-k+1$ von einander unabhängigen Determinanten enthalten sind, die Bestimmung der gemeinsamen Lösungen eines Systems zurück auf diejenigen niederer Systeme, d. h. solcher Systeme, für welche entweder k oder q einen kleineren Werth besitzt.

1. Man betrachte zunächst das System von Gleichungen:

$$S(12\ldots q)_2=\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q}\end{matrix}\right\|=0. \tag{3}$$

Die Lösungen desselben sind alle enthalten unter den gemeinsamen Lösungen der beiden Systeme:

$$S(12\ldots q-1)_2=0,\quad S(q,\,q-1)_2=0,$$

von denen das Letztere bloss aus der letzten Determinante des Systems (3) besteht. Unter diesen Lösungen befinden sich indess auch solche, welche nicht allen Gleichungen von (3) gemeinsam sind. $S(q,\,q-1)_2$ verschwindet, wenn

$$S(q-1)_2=0 \tag{4}$$

ist, d. h. wenn die beiden Elemente $a_{1,\,q-1}$ und $a_{2,\,q-2}$ verschwinden.*) Alsdann verschwinden aber auch alle Determinanten von $S(12\ldots q-1)_2$, wenn nur noch die Gleichungen erfüllt werden:

$$S(12\ldots q-2)_2=0. \tag{4^a}$$

Die Gleichungen (3) sind einem System von $q-1$ Gleichungen äquivalent, (4) einem von 2, (4^a) $q-3$; also (4) und (4^a) zusammen wiederum $q-1$ Gleichungen. Man hat demnach:

$$(12\ldots q)_2=[(12\ldots q-1)_2\,(q-1,\,q)_2]-[(12\ldots q-2)_2\,(q-1)_2].$$

---

*) Hier wie in der Folge nehmen wir ein Rechteck von Elementen, welches auf die schmale Seite gestellt ist, als gleichbedeutend an mit demselben, auf die breite Seite gestellt, so dass z. B. die Bezeichnungen:

$$\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\right\|=0\quad\text{und}\quad\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{matrix}\right\|=0$$

gleichbedeutend sind.

Diese Gleichung gilt nur, so lange $S(12 \ldots q-2) = 0$ $q-3$ Gleichungen äquivalent ist, also für $q > 3$. Für $q = 3$ ist:

$$(4^b) \qquad (123)_2 = [(12)_2\,(23)_2] - (2)_2.$$

2. Wir betrachten ferner das System von Gleichungen:

$$(5) \qquad S(12 \ldots q)_3 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3q} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Die Lösungen sind inbegriffen unter denjenigen, welche

$$(6) \qquad S(12 \ldots q-1)_3 = 0 \quad \text{und} \quad S(q-2,\, q-1,\, q)_3 = 0$$

gemeinsam haben. Unter Letzteren befinden sich aber auch diejenigen, welche den Systemen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} S(q-2,\, q-1)_3 &= 0 \\ S(12 \ldots q-2)_3 &= 0 \end{aligned}$$

gemeinsam sind, ohne *alle* Gleichungen von $S(1 \ldots q) = 0$ zu befriedigen. Denn die erste der Gleichungen (7) macht die Determinante

$$S(q-2,\, q-1,\, q)_3$$

verschwinden, und von $S(1 \ldots q-1)_3$ diejenigen Determinanten, welche die beiden letzten Vertikalreihen enthalten. Darum verschwinden aber noch nicht alle Gleichungen des Systems. Es muss also die letzte Gleichung (7) noch hinzutreten. Dem System der Gleichungen (7) wiederum gehören noch die Lösungen von:

$$\begin{aligned} S(q-2)_3 &= 0 \\ S(12 \ldots q-3)_3 &= 0 \end{aligned}$$

an, welche den Gleichungen (6) nicht allen genügen. Man erhält so endlich:

$$(8) \qquad \begin{aligned} (1 \ldots q)_3 = {} & [(1 \ldots q-1)_3\,(q-2,\, q-1,\, q)_3] \\ & - [(1 \ldots q-2)_3\,(q-2,\, q-1)_3] + [(1 \ldots q-3)_3\,(q-2)_3]; \end{aligned}$$

Diese Formel, welche eine Zurückführung höherer Systeme auf niedere enthält, wird illusorisch, wenn $(1 \ldots q-3)_3 = 0$ nicht mehr $q-5$ Gleichungen repräsentirt. Die Formel (8) gilt demnach nur für $q > 5$.

Für $q = 2$ hat man ein stehendes Rechteck, welches auf den Fall mit dem Index 2 führt.

Für $q = 3$ erhält man eine einfache Determinante.

Der Fall $q = 4$ wird nach der Formel:

$$(8^a) \qquad (1\,2\,3\,4)_3 = [(1\,2\,3)_3\,(2\,3\,4)_3] - (2\,3)_3$$

behandelt.

$q = 5$ nach der leicht zu beweisenden Formel:

$$(8^b) \qquad (1\,2\,3\,4\,5)_3 = [(1\,2\,3\,4)_3\,(3\,4\,5)_3] - [(1\,2\,3)_3\,(3\,4)_3] + (3)_3.$$

3. Es erfordert nur eine Wiederholung dieser einfachen Betrachtungen, um für den allgemeinen Fall die Formel zu erhalten:

$$
(9)\quad \begin{aligned}
(1 \ldots q)_k = {} & [(1 \ldots q-1)_k \, (q-k+1,\; q-k+2, \ldots q)_k] - \\
& - [(1 \ldots q-2)_k \, (q-k+1,\; q-k+2, \ldots q-1)_k] + \\
& + [(1 \ldots q-3)_k \, (q-k+1,\; q-k+2, \ldots q-2)_k] - \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \pm [(1 \ldots q-k)_k \, (q-k+1)_k].
\end{aligned}
$$

Diese Formel liefert die Zahl der gemeinsamen Lösungen desjenigen Systems von Gleichungen, welches durch Nullsetzen der Determinanten des Systems (2) *entsteht, ausgedrückt durch die Zahl der Lösungen für niedere Systeme, d. h. solche, für welche entweder k oder q einen kleineren Werth besitzt.*

Die Formel (9) wird illusorisch, wenn das System $S(1 \ldots q-k)$ weniger Vertikal- als Horizontalreihen besitzt. Dieselbe gilt also nur, so lange

$$q - k > k - 1$$

ist. Wenn dagegen: $q - k \leqq k - 1$, so reducirt sich das System entweder auf ein aufrechtstehendes Rechteck, führt also auf einen Fall, den wir zu den niederen rechnen; dies geschieht, wenn:

$$k \geqq q \geqq 1$$

ist. Wenn aber:

$$k + 1 \leqq q \leqq 2k - 1$$

ist, so tritt, wie man ohne Mühe erkennt, an Stelle der Formel (9) die folgende, welche nach Analogie von (4^b), (8^a), (8^b) gebildet werden kann:

$$
(9^a)\quad \begin{aligned}
(12 \ldots q)_k = {} & [(12 \ldots q-1)_k \, (q-k+1,\; q-k+2, \ldots q)_k] - \\
& - [(12 \ldots q-2)_k \, (q-k+1,\; q-k+2, \ldots q-1)_k] + \\
& + \cdots\cdots \\
& \pm [(12 \ldots k)_k \quad (q-k+1,\; q-k+2, \ldots k+1)_k] \mp \\
& \mp (q-k+1,\quad q-k+2, \ldots k)_k,
\end{aligned}
$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $q - k$ ungerade oder gerade ist.

Die fernere Ausführung der Formeln (9), (9^a) erfordert die Bestimmung der Werthe der eckigen Klammern aus den darin vorkommenden runden. Es liegt nahe, in dieser Absicht für die Letzteren wieder eckige einzuführen.*) Auf diese Weise werden allmählich von einander unabhängige Gleichungen an die Stelle der übervollständigen Gleichungssysteme gesetzt; dieselben treten schliesslich gruppen-

*) So ist z. B. (8^b): $[(1234)_3\,(345)_3] = [(123)_3\,(234)_3\,(345)_3] - [(23)_3\,(345)_3]$, wo nun weiter für $(23)_3$ der Werth einzusetzen ist.

weise zu je $q - k + 1$ auf und es erübrigt bloss noch die bekannten Regeln über Elimination aus einer Gruppe von Gleichungen anzuwenden.

Diese Operation kann indess in vielen Fällen vereinfacht werden durch successive Anwendung eines Satzes, der die Werthe der eckigen Klammern direct aus denen der darin vorkommenden runden zusammensetzen lehrt und somit einen höheren Fall auf niedere zurückführt.

Man muss dabei zwischen folgenden beiden Fällen unterscheiden:

1. Die Elemente der Matrix werden mit Rücksicht auf ihre Dimension in Bezug auf alle in den Gleichungen auftretenden Variabeln betrachtet. Sind α, β die Werthe der beiden runden Klammern, die in einer eckigen auftreten, so ist der Werth der eckigen:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta .$$

Man beweist dies durch ein Verfahren, welches dem in den folgenden beiden §§. eingehaltenen analog ist. Da dieser Fall indess bereits anderweitig behandelt worden ist, so beschäftigen wir uns in der Folge vorzugsweise mit dem

2. Fall. Die Elemente werden mit Rücksicht auf den Grad in den einzelnen Variabeln betrachtet. Wie man alsdann aus den Werthen der runden Klammern, die im allgemeinen Falle nicht durch einzelne Zahlen, sondern Gruppen von solchen repräsentirt werden, die eckigen findet, lehrt der Satz des § 3. Wir wollen diesen Satz im Folgenden mit grösserer Ausführlichkeit, als dies für den vorliegenden Fall nöthig wäre, begründen, um die allgemeinere Bedeutung desselben erkennen zu lassen.

§ 2.

Die Theorie der Elimination aus algebraischen Gleichungen ist vorzugsweise entwickelt für solche Gleichungen, welche, wie die Gleichung einer allgemeinen Curve, Fläche n^{ter} Ordnung etc. dann für allgemein gerechnet werden, wenn alle Terme von der n^{ten} und allen niederen Dimensionen mit von einander unabhängigen Coefficienten vorhanden sind. Im Nachfolgenden wird nun eine Gleichung nicht mit Rücksicht auf ihre *Dimension*, sondern auf den *Grad in den einzelnen Variabeln* betrachtet. Wir sagen, eine Gleichung mit ϱ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$, welche in x_1 von der Ordnung p_1, in x_2 von der Ordnung $p_2, \ldots$ in x_ϱ von der Ordnung p_ϱ ist, sei allgemein, wenn in derselben jeder Term von der Form:

$$x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_\varrho^{i_\varrho} \, (i_1 \leqq p_1, \; i_2 \leqq p_2, \; \ldots \; i_\varrho \leqq p_\varrho)$$

mit einem beliebigen Coefficienten behaftet auftritt. Ueber die Elimination aus einem System von Gleichungen der erwähnten Art mögen

zunächst einige allgemeine Betrachtungen als Grundlage für das Folgende vorausgeschickt werden.

Wenn man aus zwei Gleichungen $m = 0$ und $n = 0$, welche in Bezug auf die Variabeln x_1 bez. vom Grad m_1 und n_1, in Bezug auf x_2 vom Grad m_2 und n_2 sind, eine der Variabeln eliminirt, so ist bekanntlich die Resultante in Bezug auf die andere vom Grad

$$m_1 n_2 + n_1 m_2.$$

Mit Rücksicht auf die determinanten-ähnliche Form dieses Ausdrucks (nur dass beide Glieder positiv sind) möge derselbe durch:

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{matrix}$$

oder kurzweg durch $\Sigma + m_1 n_2$ bezeichnet werden.

Sind drei Gleichungen $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ gegeben, welche in Bezug auf drei Variable x_1, x_2, x_3 bez. von den Geraden:

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$$

sind, so ist, wie gleich bewiesen werden soll, der Grad der Resultante in Bezug auf die nicht eliminirte Variable:

$$(10^a) \quad p_1 (m_2 n_3 + n_2 m_3) + p_2 (m_3 n_1 + n_3 m_1) + p_3 (m_1 n_2 + n_1 m_2);$$

ein Ausdruck, welchen man wieder mit Rücksicht auf die determinanten-ähnliche Form — nur dass alle Glieder positiv sind — durch:

$$\Sigma + m_1 n_2 p_3$$

darstellen kann. Man bildet nämlich die Resultante, indem man aus zweien der gegebenen Gleichungen, z. B. aus $m = 0$ und $n = 0$ alle Werthepaare x_2', x_3'; x_2'', x_3''; .... welche zu einem gegebenen x_1 gehören, an der Zahl $m_2 n_3 + n_2 m_3$, sich berechnet vorstellt, dieselben in die dritte Gleichung $p = 0$ der Reihe nach eingesetzt und das Produkt Π der so entstandenen gebildet annimmt. Dieses Produkt Π ist eine symmetrische Function jener Werthepaare und demnach durch die Coefficienten von $m = 0$ und $n = 0$, welche noch x_1 enthalten, rational darstellbar. Insofern x_1 explicite auftritt, ist der Grad des Produktes $= p_1 (m_2 n_3 + n_2 m_3)$. Indess kommt x_1 auch noch implicite in jenen symmetrischen Functionen vor. Man drückt dieselben, wie $x_2'^p x_3'^q + x_2''^p x_3''^q + \cdots$, durch die Coefficienten von m und n in ähnlicher Weise aus, wie dies Poisson für die allgemeinen Gleichungen von gegebener Dimension gethan hat.*) Man füge den zwei Gleichungen $m = 0$, $n = 0$ hinzu:

$$t = \lambda x_2 + \mu x_3.$$

*) Journal de l'école polyt. Cah. 11. S. auch Serret, Handbuch der Algebra, deutsch von Wertheim. Bd. I, S. 476 (§ 266.).

Durch Elimination von x_2 und x_3 aus denselben entsteht eine Gleichung, welche für t, λ, μ homogen und vom Grad $m_2 n_3 + n_2 m_3$ ist. Dieselbe ist für x_1 vom Grad $m_1(n_2 + n_3) + n_1(m_2 + m_3)$ und besitzt in Bezug auf t die Wurzeln $\lambda x_2' + \mu x_3'$; $\lambda x_2'' + \mu x_3''$; etc. Weil aber für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ der Grad in $x_1 = m_1 n_3 + n_1 m_3$ sein muss, ebenso für $\lambda = 0$, $\mu = 1$ der Grad in $x_1 = m_1 n_2 + n_1 m_2$, so muss in jener Gleichung für t der Factor der höchsten Potenz von t in 2 Factoren, je von diesen Graden, zerfallen, und in den übrigen Gliedern die Coefficienten der Potenzen von λ und die der Potenzen von μ je durch den einen dieser Factoren theilbar sein.

Die Gestalt dieser Gleichung ist demnach die folgende:

$$t^n + t^{n-1} \cdot \varrho_1 + t^{n-2} \varrho_2 + \cdots\cdots \varrho_n = 0$$

wo $\varrho_1 = \lambda \cdot \frac{a_1}{a_0} + \mu \cdot \frac{b_1}{b_0}$; $\varrho_2 = \lambda^2 \cdot \frac{a_2}{a_0} + \mu^2 \cdot \frac{b_2}{b_0} + \lambda\mu \cdot \frac{c_2}{a_0 b_0}$; etc. und die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von der Ordnung $m_1 n_3 + n_1 m_3$, die $b_0, b_1, b_2, \ldots$ von der Ordnung $m_1 n_2 + n_1 m_2$, endlich die $c_2 \ldots.$ von der Ordnung $m_1(n_2 + n_3) + n_1(m_2 + m_3)$ sind.

Bei der Berechnung der symmetrischen Functionen:

$$s_\alpha = (\lambda x_2' + \mu x_3')^\alpha + (\lambda x_2'' + \mu x_3'')^\alpha + \cdots$$

der Wurzeln der obigen Gleichung in t mittelst der Newton'schen Formeln sind, wie ein Blick auf dieselben:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\varrho_1 \\ s_2 &= \quad \varrho_1^2 - 2\varrho_2 \\ s_3 &= -\varrho_1^3 + 3\varrho_1\varrho_2 - 3\varrho_3 \\ s_4 &= \quad \varrho_1^4 - 4\varrho_1^2\varrho_2 + 4\varrho_1\varrho_3 + 2\varrho_2^2 - 4\varrho_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

lehrt, für den Grad in x_1 immer nur diejenigen Glieder massgebend, welche ϱ_1 und ϱ_2 allein enthalten. Diese sind für s_α: ϱ_1^α, $\varrho_1^{\alpha-2} \cdot \varrho_2$, $\varrho_1^{\alpha-4}\varrho_2^2$, etc. Denkt man sich diese Glieder nach Potenzen und Producten von λ und μ geordnet, so erkennt man, dass z. B. der Coefficient von $\lambda^\varkappa \mu^{\alpha-\varkappa}$ in der Entwicklung von s_α, nämlich:

$$x_2'^{\varkappa} x_3'^{\alpha-\varkappa} + x_2''^{\varkappa} x_3''^{\alpha-\varkappa} + \cdots,$$

nachdem derselbe mit $a_0^\varkappa b_0^{\alpha-\varkappa}$ multiplicirt ist, vom Grad:

$$\varkappa(m_1 n_3 + n_1 m_3) + (\alpha - \varkappa)(m_1 n_2 + n_1 m_2)$$

ist. Da nun in der Gleichung $p = 0$, x_2 bis zur Potenz p_2, x_3 bis zur Potenz p_3 vorkommt, so ist hiernach klar, dass durch die symmetrischen Functionen der Wurzelpaare x_2, x_3 der Gleichungen $m = 0$,

$n = 0$, welche in dem oben erwähnten Produkt Π auftreten, nachdem dasselbe mit dem Factor $a_0^{p_2} b_0^{p_3}$ multiplicirt worden ist, der Grad desselben in Bezug auf x_1 um:

$$p_2(m_1 n_3 + n_1 m_3) + p_3(m_1 n_2 + n_1 m_2)$$

erhöht wird. Somit ist der Ausdruck (10^a) der Gesammtgrad in x_1, w. z. b. w.

Man dehnt dieses Raisonnement ohne Schwierigkeit auf den Fall von vier und mehr Gleichungen $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 0$, ... mit je ebensoviel Variabeln aus, indem man die Gleichungen eine nach der anderen hinzunimmt. Immer wird *die Zahl der gemeinsamen Lösungen dargestellt durch einen Ausdruck* $\Sigma + m_1 n_2 p_3 q_4 \ldots$, *welchen man aus der Determinante* $\Sigma \pm m_1 n_2 p_3 q_4 \ldots$ *entstehen lassen kann, indem man in dieser allen negativen Gliedern positives Vorzeichen giebt.*

Für einen solchen Ausdruck gelten bezüglich der Anordnung nach den Elementen von einer, zwei u. s. w. Reihen dieselben Sätze, welche für die entsprechende Determinante gelten. Hat man z. B. 4 Gleichungen $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 0$ mit 4 Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, und sind die Gradzahlen bez. die folgenden:

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4, \end{matrix}$$

so hat man nach der oben eingeführten Bezeichnung für den Grad der Endgleichung:

$$(10^b) \quad \begin{aligned} \Sigma + m_1 n_2 p_3 q_4 = \Sigma + m_1 n_2 \,.\, \Sigma + p_3 q_4 + \Sigma + m_1 n_3 \,.\, \Sigma + p_2 q_4 + \\ + \cdots\cdot + \Sigma + m_3 n_4 \,.\, \Sigma + p_1 q_2; \end{aligned}$$

welche Zerlegung der Anordnung der entsprechenden Determinante nach den Elementen der beiden ersten Horizontalreihen entspricht.

Die Identität (10^b) enthält einen Satz. Mit Hilfe der Gleichungen $m = 0$, $n = 0$ lässt sich nämlich durch Elimination von je einer Variabeln ein „resultirendes" System von $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Gleichungen bilden, welches übervollständig und nur 2 Gleichungen äquivalent ist. Der Grad derjenigen Gleichung, welche durch Elimination von x_i entstanden ist, in Bezug auf x_k ist $= \Sigma + m_i n_k$. Man kann entsprechend aus den 2 letzten Gleichungen ein System von gleichfalls 6 Gleichungen in je 2 Variabeln bilden. Die Grade werden durch $\Sigma + p_i q_k$ dargestellt, und lassen sich je denen der ersten Gleichungen in derselben Weise zuordnen, wie Unterdeterminanten ihren complementären. *Der Grad der Resultante aller Gleichungen setzt sich also zusammen aus den Graden*

der resultirenden Systeme der beiden Gruppen, indem man die einander zugeordneten Grade mit einander multiplicirt und die Summe bildet.

Wenn die einzelnen Grade $\Sigma + m_i n_k$ alle einander gleich, etwa $= \alpha$ sind (wie dies eintritt, wenn die Gleichungen m und n in jeder der Variabeln von demselben Grade sind), ebenso die Grade $\Sigma + p_i q_k$ alle gleich β, so ist der Grad der Resultante:

$$= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \alpha\beta .$$

Allgemein, für ϱ Variabele und ebensoviele Gleichungen, die in 2 Gruppen von $\varkappa$ und $\varrho - \varkappa$ eingetheilt sind, ist der Grad der Resultante aller Gleichungen:

$$= \binom{\varrho}{\varkappa} \cdot \alpha\beta ,$$

wenn α der Grad ist, bis zu welchem die Variabeln in jeder der Gleichungen des resultirenden (Eliminations-) Systems der einen, β der Grad, bis zu welchem die der anderen Gruppe ansteigen.

Diese Bemerkungen gewähren, wie nun gezeigt werden soll, unter Umständen eine grosse Erleichterung bei der Aufstellung des Grades der Resultante von 2 Systemen von Gleichungen, welche einer geringeren Anzahl von Gleichungen äquivalent sind.

§ 3.

Es giebt Systeme von Gleichungen, welche in vielen Eigenschaften mit den im vorstehenden § erwähnten resultirenden übervollständigen Systemen übereinstimmen, ohne dass dieselben, wie diese, einem einzigen System von Gleichungen, welche gegenseitig von einander unabhängig sind (wir wollen ein solches im Gegensatz zum „resultirenden" System ein „Ursystem" nennen), ihren Ursprung verdanken, sondern aus der Combination von *mehreren* Ursystemen entstanden ist*).

---

*) Setzt man beispielsweise die Determinanten der folgenden Matrix gleich Null:

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{matrix} \right\| ,$$

(wo die α_i, β_i, γ_i Functionen von x_i ($i = 1 \ldots 4$) je vom Grad g_i sind), nachdem man dieselben je auf die entsprechende Potenz erhoben: $\Sigma \pm \alpha_1\beta_2\gamma_3$ auf die Potenz g_4, $\Sigma \pm \alpha_1\beta_2\gamma_4$ auf die Potenz g_3, u. s. f., so kann man wegen ihrer Bildungsweise diese 4 Gleichungen (deren jede nur 3 von den 4 Variabeln enthält) wieder ein „resultirendes" System U, welches zweien Gleichungen äquivalent ist, nennen. Der Grad derjenigen Gleichung, in welcher x_1 nicht vorkommt, in Bezug auf x_2 ist gleich dem Grad derjenigen, in welcher x_2 nicht vorkommt, in Bezug auf x_1,

Sei nun ein derartiges „resultirendes“ System U von $(\rho_\varkappa)$ Gleichungen mit ρ Variabeln, welches $\varkappa$ Gleichungen äquivalent und durch eine Anzahl von „Ursystemen“ ersetzbar ist, gegeben; d. h. ein System von $\binom{\rho}{\varkappa}$ Gleichungen, von welchen nur $\varkappa$ von einander unabhängig sind, deren jede nur $\rho - \varkappa + 1$ von den ρ Variabeln enthält, und welche sich aus einer Anzahl von Systemen $s' s'' \ldots$ mit je $\varkappa$ von einander unabhängigen Gleichungen („Ursysteme“) dadurch zusammensetzen lassen, dass man das zu jedem der Systeme s', s'', ... gehörige resultirende Gleichungssystem durch Elimination von $\varkappa - 1$ Variabeln herstellt, und je diejenigen Gleichungen dieser Systeme, welche dieselben Variabeln besitzen, mit einander multiplicirt (bez. je nach der Art der Zusammensetzung dividirt, indess ohne dass hierbei gebrochene Functionen entstehen). Die so gebildeten Gleichungen sind diejenigen von U. Die Gradzahlen U_1, U_2, ... $U_{\binom{\rho}{\varkappa}}$, welche ausdrücken, wieviele Werthsysteme je von $\varkappa$ Variabeln zu angenommenen Werthsystemen der $\rho - \varkappa$ übrigen gehören, lassen sich alsdann aus den entsprechenden

---

nämlich: $(12) = g_1 g_2$. Diese Zahl giebt an, wieviele Werthepaare $x_1 x_2$ zu einem gegebenen Paar $x_3 x_4$ gehören. Allgemein ist die Gradzahl $(ik) = g_i g_k$.

Bekanntlich ist dieses System U nicht durch ein einzelnes Ur-System von 2 Gleichungen ersetzbar, sondern durch folgende 3 Systeme:

$$\begin{array}{llll} s' \cdots\cdot & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 = 0; & & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_4 = 0 \\ s'' \cdots\cdot & \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \quad = 0; & & \Sigma \pm \alpha_1 \gamma_2 \quad = 0 \\ s''' \cdots\cdot & \alpha_1 \quad = 0; & & \alpha_2 \quad = 0, \end{array}$$

aus welchen man die Gleichungen des obigen Systems U dadurch zusammensetzen kann, dass man die resultirenden Systeme zu $s' s'' s'''$ bildet und je die entsprechenden von s' und s''' multiplicirt und durch diejenigen von s'' dividirt. Die Gradzahlen der Systeme $s' s'' s'''$ lassen sich durch folgendes Schema darstellen:

$$\begin{array}{ll} s' & \begin{cases} g_1 \; g_2 \; g_3 \; 0 \\ g_1 \; g_2 \; 0 \; g_4 \end{cases} \\ s'' & \begin{cases} g_1 \; g_2 \; 0 \; 0 \\ g_1 \; g_2 \; 0 \; 0 \end{cases} \\ s''' & \begin{cases} g_1 \; 0 \; 0 \; 0 \\ 0 \; g_2 \; 0 \; 0 \end{cases} \end{array}$$

aus welchen man die Gradzahlen (ik) des gegebenen „resultirenden“ Systems findet, indem man die Gradzahlen von s und s''' addirt, und hiervon die von s'' subtrahirt. In der That erhält man:

$$\begin{array}{l} (12) = 2 g_1 g_2 - 2 g_1 g_2 + g_1 g_2 = g_1 g_2 \\ (13) = \quad g_1 g_3 - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = g_1 g_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (34) = \quad g_3 g_4 - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = g_3 g_4 . \end{array}$$

Gradzahlen s_1', s_2', ... s_1'', s_2'', ... etc. der Systeme s', s'', ... durch Addition bez. Subtraction zusammensetzen:

$$U_i = \varepsilon' . s_i' + \varepsilon'' . s_i'' + \cdots$$

wo die $\varepsilon = \pm 1$ sind. Diejenigen Factoren der einzelnen Gleichungen des Systems U, welche zu demselben Gleichungssystem (z. B. s') gehören, bleiben offenbar auch in dem System U noch einander derart zugeordnet, dass, wenn dasselbe durch irgend ein Lösungssystem (worunter $\varrho - \varkappa$ willkürlich angenommene Variable) erfüllt wird, dies nur dadurch geschieht, dass eines der ursprünglichen Systeme $s's''$... erfüllt wird.

Ferner sei zur Ergänzung ein System S von $\varrho - \varkappa$ von einander unabhängigen Gleichungen zwischen denselben ϱ Variabeln gegeben, mit den Gradzahlen $S_1 S_2 \ldots . S_{\binom{\varrho}{\varkappa}}$, wo die Indices die „Zugehörigkeit" dieser Zahlen zu den U_i (sowie den s_i', s_i'', ...) andeuten mögen, so zwar, dass wenn z. B. U_i (bez. s_i', s_i'', ...) die Zahl der Werthepaare $x_1, x_2 \ldots x_\varkappa$ angiebt, welche bei angenommenem Werthsystem für $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \ldots x_\varrho$ die Gleichungen U (bez. s', s'', ...) erfüllen, dass dann S_i die Zahl der die Gleichungen S bei angenommenem Werthsystem $x_1 \ldots x_\varkappa$ befriedigenden Werthsysteme $x_{\varkappa+1}, \ldots . x_\varrho$ bedeutet.

Alsdann ist nach § 2. die Anzahl $[S, s']$ der Werthsysteme, welche gleichzeitig die beiden Ursysteme S und s' erfüllen:

$$[S, s'] = S_1 s_1' + S_2 s_2' + \cdots S_{\binom{\varrho}{\varkappa}} s'_{\binom{\varrho}{\varkappa}};$$

man hat ebenso:

$$[S, s''] = S_1 s_1'' + S_2 s_2'' + \cdots S_{\binom{\varrho}{\varkappa}} s''_{\binom{\varrho}{\varkappa}}.$$

u. s. f.

Nun setzen sich aber diejenigen Lösungen, welche gleichzeitig S und U befriedigen, offenbar aus derjenigen zusammen, welche S und je eines der Systeme s', s'', ... erfüllen. Denn das Eliminationsresultat aus S und einem System, welches wie U aus Gleichungen, die in Factoren zerfallen, besteht, wird gebildet, indem man das Produkt der Resultanten aus S und den einzelnen Factoren aufstellt. Von diesen liefern aber, weil U ein übervollständiges System ist, nur diejenigen wirkliche Resultanten, welche aus Factoren, die einem und demselben System s entsprechen, gebildet sind. Die Gradzahlen dieser Resultanten addiren sich und man hat als Zahl der gemeinsamen Lösungen von U und S:

$$[S, U] = \varepsilon' [S, s'] + \varepsilon'' [S, s''] + \cdots$$

oder endlich durch Einsetzung der Werthe:

$$[S,\ U] = S_1 U_1 + S_2 U_2 + \cdots S_{\binom{\varrho}{\varkappa}} U_{\binom{\varrho}{\varkappa}}.$$

Diese Formel, welche derjenigen für den Grad der Resultante aus 2 Ursystemen durchaus entspricht, gestaltet die Berechnung des Grades der Resultante des Ursystems S und des resultirenden U *ohne den Recurs auf die Gradzahlen der einzelnen Systeme* s', s''... *nöthig zu machen.* Tritt endlich auch an Stelle von S ein resultirendes System V mit den Gradzahlen V_1, $V_2 \dots V_{\binom{\varrho}{\varkappa}}$, äquivalent $\varrho - \varkappa$ Gleichungen und von demselben Charakter wie U, welches also wieder ersetzbar ist durch eine Anzahl von Systemen σ', σ'', ... je mit lauter unabhängigen Gleichungen, so lässt sich das obige Verfahren von U gegenüber S auf jedes einzelne System σ übertragen, und man erhält auf demselben Weg wie oben:

$$[U,\ V] = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \cdots U_{\binom{\varrho}{\varkappa}} V_{\binom{\varrho}{\varkappa}}.$$

Hat man also für ϱ Variable irgend zwei übervollständige „resultirende" (s. oben) Gleichungssysteme U und V gegeben, das erstere äquivalent $\varkappa$, das letztere $\varrho - \varkappa$ Gleichungen, deren jedes auf eine Anzahl von Systemen mit von einander unabhängigen Gleichungen (Ursystemen) zurückgeführt werden kann, so bildet man den Ausdruck für die Anzahl der beide Systeme befriedigenden Werthsysteme der Variabeln, indem man je die zu einander zugehörigen Gradzahlen von U und V multiplicirt und diese $\binom{\varrho}{\varkappa}$ Produkte addirt.

Für den Fall, dass diese Gradzahlen in dem System U alle $= \alpha$, in V alle $= \beta$ sind, hat man für jene Anzahl:

$$[\alpha,\ \beta] = \binom{\varrho}{\varkappa} \alpha\beta. \tag{10}$$

Wenn es sich um die wirkliche Bildung der Resultante handelte, so wäre ein Recurs auf die einzelnen Ursysteme s', s'', ... σ', σ'', ... (zum mindesten auf eines derselben) nicht zu umgehen. Wir haben oben ein (wenn auch sehr langwieriges) Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man die Resultante je aus einem s und einem σ erhält. Aus den so gebildeten Resultanten setzt sich die Resultante von U und V durch Multiplication (bez. Division) in der früher besprochenen Weise zusammen.

Beispiel. Setzt man die einzelnen Determinanten der beiden folgenden Systeme:

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 \end{matrix} \right\|, \quad D = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{matrix} \right\|,$$

(wo α_i, β_i, γ_i, δ_i und a_i, b_i, c_i ganze Functionen allein je von x_i, jene vom Grad g, diese vom Grad f sind $(i = 1, 2, \ldots 5)$), nachdem man diejenigen von Δ auf die Potenz g, diejenigen von D auf die Potenz f^2 erhoben hat, gleich Null, so erhält man zwei resultirende übervollständige Systeme, welche beide durch eine Anzahl von Ursystemen ersetzbar sind (s. d. letzte Note). Die Gradzahlen α des einen sind alle $= g^2$, die des anderen $\beta = f^3$. Nach (10) *giebt es:*

$$[\alpha, \beta] = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} g^2 f^3$$

Werthsysteme der Variabelen, welche alle Determinanten von Δ und D gleichzeitig zum Verschwinden bringen.

Wenn insbesondere in Δ die Horizontalreihen unter einander nur in Bezug auf die Variabeln verschieden sind, die entsprechenden Elemente in den Constanten aber übereinstimmen, so ist jede Determinante durch 6 von den Differenzen $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $\ldots$ $x_4 - x_5$ theilbar. In diesem Fall besteht das resultirende System aus diesen auf die $(g - 4)^{\text{te}}$ Potenz erhobenen dividirten Determinanten, für welche somit die Gradzahlen $\alpha = (g - 3)(g - 4)$ sind.

Besitzt das System D die gleiche Eigenschaft, dass die Determinanten durch eine Anzahl (3) jener Differenzen theilbar sind, so sind die Gradzahlen β des resultirenden Systems $= (f-2)(f-3)(f-4)$. Da aber die Systeme fortfahren, durch eine Anzahl von Ursystemen ersetzbar zu sein, so ist in diesem Falle die Anzahl der gemeinsamen Lösungssysteme nach (10):

$$[\alpha, \beta] = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} (g - 3)(g - 4)(f - 2)(f - 3)(f - 4);$$

von denselben sind endlich noch je $5! = 120$ einander gleich, weil die Variabeln symmetrisch auftreten.

§ 4.

Mit Hilfe des im vorigen § aufgestellten Satzes kann man nun die Werthe der eckigen Klammern in den Formeln (9), (9ª) auch für den zweiten der § 1. (a. E.) aufgeführten Fälle selbst bei unregelmässigem Vorkommen der Variabeln in den einzelnen Determinanten der Matrix (2) berechnen.

Wir wollen im Folgenden diese Rechnung für den Fall eines symmetrischen Auftretens der Variabeln durchführen. Gegeben sei das System von Gleichungen:

$$(11) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(\lambda_1)\,\varphi_2(\lambda_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{k+i}(\lambda_1) \\ \varphi_1(\lambda_2)\,\varphi_2(\lambda_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{k+i}(\lambda_2) \\ \vdots & & & & \\ \varphi_1(\lambda_k)\,\varphi_2(\lambda_k) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{k+i}(\lambda_k) \end{matrix} \right\| = 0,$$

wo die φ_i alle ganze Functionen m^{ten} Grades je der eingeklammerten Variabeln sind.

Den verschiedenen Werthen von i entsprechen verschiedene Gleichungssysteme, welche alle diejenigen Eigenschaften besitzen, welche die Anwendung der § 3. gegebenen Formel (10) voraussetzt.

Man nehme in (11) zunächst $i < 0$ an und setze für kurze Zeit $i + k = i'$. Das entsprechende System von Gleichungen enthält, wenn $i' > 1$ ist, mehr Variable als von einander unabhängige Gleichungen. Man nehme $i' - 1$ derselben als Constante an, so besteht für jede der Uebrigen eine (und zwar *dieselbe*) Gleichung vom n^{ten} Grad, welche indess $i' - 1$ Wurzeln besitzt, die mit den constant Gesetzten übereinstimmen. Schliesst man hier wie in der Folge *alle Werthsysteme aus, in welchen Paare von gleichen Werthen verschiedener Variabeln auftreten*, so sind die noch übrigen $m - i' + 1$ Wurzeln zu je $k - i' + 1$ zu combiniren (es muss also, wenn die Aufgabe Lösungen besitzen soll, $m \geq k$ sein). Dies liefert:

$$\frac{(m - i' + 1) \cdots (m - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots (k - i' + 1)}$$

oder:

$$(12) \qquad \frac{(m - k + 1)(m - k + 2) \cdots (m - k - i + 1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots (1 - i)}$$

verschiedene Lösungssysteme der Gleichungen (11) für den Fall, dass *i negativ* ist.

Der grösste *positive* Werth, den i in (11) annehmen kann, ist $i = k - 1$, wenn nicht mehr von einander unabhängige Gleichungen entstehen sollen, als Variable vorhanden sind. Das q der Formeln (9), (9ᵃ) wird alsdann $= 2k - 1$, woraus hervorgeht, dass, wenn für den Fall:

$$k - 1 > i \geq 0$$

die Formel (9ᵃ) allein Anwendung findet. Da in dem vorliegenden Fall ein auf die Formeln influirender Unterschied zwischen den einzelnen Determinanten des Systems (11) nicht angenommen wird, alle vielmehr in Bezug auf das Vorkommen der Variabeln von derselben Form sind, so kann man, indem man mit $(q)_k$ die Zahl der Lösungen eines Systems von q Vertikalreihen und k Horizontalreihen bezeichnet, den Formeln (9ᵃ) die folgende Gestalt geben:

$$(q)_k = [(q-1)_k (k)_k] - [(q-2)_k (k-1)_k] + [(q-3)_k (k-2)_k] - \cdots$$
$$\cdots \pm [(k)_k (2k-q+1)_k] \mp (2k-q),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu benutzen ist, jenachdem $q-k$ ungerade oder gerade ist; oder endlich, indem man $q = k+i$ setzt, und die Reihenfolge rechts umgekehrt:

$$(13) \quad \begin{aligned}(k+i)_k = \pm (k-i)_k \mp [(k)_k (k-i+1)_k] \pm [(k+1)_k (k-i+2)_k] \mp \cdots \\ \cdots\cdots - [(k+i-2)_k (k-1)_k] + [(k+i-1)_k (k)_k].\end{aligned}$$

Die Werthe $(k-i)_k$, $(k-i+1)_k$, ... $(k)_k$ bestimmen sich aus Formel (12), welcher man, indem man

$$(14) \qquad m - k + 1 = M$$

setzt, folgende Gestalt geben kann:

$$(15) \qquad (k-j)_k = \frac{M(M+1)\cdots\cdot(M+j)}{1\cdot 2\cdots\cdot(1+j)},$$

wo $j = -i$ von 0 bis $k-1$ geht.

Setzt man der Reihe nach für $k = 2, 3, \ldots$ die Werthe der Formel (14) in (13) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der unten nachfolgenden Bemerkungen:

$k=2$; $(2)_2 = m-1$; $(2)_3 = \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}$;

$k=3$; $(3)_3 = m-2$; $(4)_3 = \frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2}$; $(5)_3 = \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

$k=4$; $(4)_4 = m-3$; $(5)_4 = \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}$; etc.

Man erkennt hieraus sofort das Bildungsgesetz; *allgemein ist die Zahl der Lösungssysteme der Gleichungen* (11) *für den Fall, dass i positiv ist und kleiner als k*:

$$(16) \qquad (k+i)_k = \frac{(m-k+1)(m-k)\cdots\cdot(m-k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot(i+1)}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit der (12), bei augenscheinlich grosser Verschiedenheit der Probleme für die beiden Fälle: i positiv und negativ, ist bemerkenswerth. Man kann dieselbe mit Rücksicht auf (14) in die Gestalt bringen:

$$(17) \qquad (k+i)_k = \frac{M(M-1)\cdots\cdot(M-i)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(i+1)},$$

welche die Uebereinstimmung mit der entsprechenden Formel (15) noch deutlicher zeigt.

Den Beweis der Formel (17) führen wir durch den Schluss von $i-1$ auf i für einen allgemeinen Werth von k. Da die Richtigkeit von (17) für den einfachsten Fall $i=0$ unmittelbar einleuchtet, so gilt dieselbe alsdann allgemein.

Sei (17) für alle Werthe von $i: 0, 1, \ldots i-1$ bewiesen. Die Formel (15) gilt, wie oben gezeigt, allgemein. Mit Hilfe der bekannten

Fälle 0, 1, ... $i-1$ und (15) kann man nach den Regeln des § 3. (siehe insbes. das Beispiel) die rechte Seite von (13) vollständig entwickeln. Es darf hierbei nicht ausser Acht gelassen werden, dass in den Formeln für $(k+j)_k$ und $(k-j)_k$ in (15) und (17) nur solche Lösungssysteme zählen, welche von einander verschieden sind, während die Formel (13) mit Rücksicht auf *alle* Lösungssysteme, also auch die wegen des symmetrischen Vorkommens der Variabeln unter einander gleichen Lösungssysteme aufgestellt ist. Man hat also je das $1.2\ldots(j+1)$ fache jener Werthe bei der Einsetzung in (13) zu nehmen. Bei der Berechnung der eckigen Klammern aus der runden kommt F. (10) (§ 3.) in Anwendung. Dabei ist zu bemerken, dass für alle Glieder der rechten Seite von (17) die Zahl $\varrho = i+1$ ist. Man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned}(1.2.3\ldots(i+1))_k(k+i)_k = &\pm M.(M+1)\quad(M+2)\quad\ldots(M+i)\\ &\mp \frac{i+1}{1}M.M\quad(M+1)\quad\ldots(M+i-1)\\ &\pm\frac{(i+1)i}{2\cdot1}M.(M-1)\quad M\quad\ldots(M+i-2)\\ &\ldots\ldots\ldots\\ (18)\quad &\pm\frac{(i+1)i\cdots(i-k+2)}{k(k-1)\cdots1}M.(M-k+1)(M-k+2)\ldots(M+i-k)\\ &\mp\frac{(i+1)i\cdots(i-k+1)}{(k+1)k\cdots1}M.(M-k)\quad(M-k+1)\ldots(M+i-k-1)\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{(i+1)i}{2\cdot1}M.(M-i+2)(M-i+1)\ldots(M+1)\\ &+\frac{i+1}{1}M.(M-i+1)(M-i)\quad\ldots\quad M,\end{aligned}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu benutzen ist, jenachdem i gerade oder ungerade ist. Ich behaupte nun: die Summe der $k+2$ ersten Glieder der rechten Seite dieser Formel beträgt:

$$p_{k+2} = (-1)^{i-k+1}\frac{i(i-1)\cdots(i-k)}{(k+1)k\cdots1}(M-k-1)(M-k)\ldots(M+i-k-1).$$

Man erkennt sofort, dass dies für $k=0$ stattfindet. Gesetzt, die Formel wäre bewiesen für $k=0, 1, \ldots (k+1)$, so wird der Beweis für $k+2$ geführt, indem man zu p_{k+1} das $(k+2)^{te}$ Glied der rechten Seite von (18) zufügt. Man erhält fast ohne Rechnung den oben für p_{k+2} angeschriebenen Werth. Hieraus folgt aber, dass:

$$(1.2.3\ldots(i+1))(k+i)_k = p_{i+1} = M(M-1)\ldots(M-i),$$

was zu beweisen war. Wenn man von (18) diese Gleichung abzieht, erhält man Identitäten zwischen den Binomialcoefficienten.

§ 5.

Anwendung auf Geometrie.

Das Gleichungssystem (11) besitzt ein geometrisches Interesse. Sei ein Büschel von Curven m^{ter} Ordnung in den Variabeln λ, μ mit $k+i$ linear und homogen auftretenden Parametern gegeben:
$\Sigma\alpha_i\varphi_i(\lambda, \mu) = \alpha_1\varphi_1(\lambda, \mu) + \alpha_2\varphi_2(\lambda, \mu) + \cdots\cdot\alpha_{k+i}\varphi_{k+i}(\lambda, \mu) = 0.$
Jede Curve desselben hat mit der geraden Linie:

$$\mu = 0$$

m Schnittpunkte gemeinsam. Nimmt man von diesen $k-i-1$ $(m > k)$ auf der Geraden willkürlich an $(i < k-1)$, so kann man fragen, ob man zu diesen noch andere i Punkte auf der Geraden finden kann, so dass alle Curven des Büschels $\Sigma\alpha_i\varphi_i = 0$, welche durch jene $k-1$ Punkte gehn, sich in noch einem weiteren (k^{ten}) Punkt der Geraden schneiden. In analytische Form gekleidet führt diese Frage, wie man sofort erkennt, auf das Gleichungssystem (11), für welches die Zahl der Lösungen durch (16) bestimmt ist.

Man kann also auf:

$$(16) \qquad (k+i)_k = \frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots\cdot(m-k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\cdots(i+1)}$$

verschiedene Weisen auf einer Geraden je i Punkte finden, welche mit $k-i-1$ *gegebenen auf der Geraden* $(i \leq k-1)$ *ein solches System von Punkten bilden, dass alle Curven eines gegebenen Büschels von Curven* m^{ter} *Ordnung* $(m \geq 2k)$ *mit* $k+i-1$ *freien Bestimmungsstücken, welche durch dieselben hindurchgehn, sich in noch einem weiteren* (k^{ten}) *Punkt der Geraden schneiden.*

Man kann endlich noch der Formel eine Deutung in einer Geometrie von höheren Dimensionen geben, wenn man sich eines Princips*) bedient, das durch die Theorie der eindeutigen Transformationen seine Begründung erfährt, wonach jener Geraden in einem Raum von $k+i-1$ Dimensionen ein lineares Gebilde vom Geschlecht Null entspricht, wenn man die Transformation mittelst der Formeln:

$$(19) \qquad \varrho\,.\,x_r = \varphi_r(\lambda, \mu), \quad r = 1, 2, \ldots. (k+i)$$

ausführt, während die Gleichung $\mu = 0$ besteht. Eine lineare Function der φ, gleich Null gesetzt, entspricht alsdann einem „ebenen Raum" von $k+i-2$ Dimensionen, und man hat durch Uebertragung den Satz:

In einem ebenen Raum von $k+i-1$ *Dimensionen befinde sich*

*) Andere Anwendungen siehe: diese Annalen, Bd. III., S. 459 und Bd. IV., S. 527.

ein lineares Gebilde vom Geschlecht Null. Nimmt man auf demselben $k - i - 1$ *Punkte beliebig an, so kann man auf noch* $(k + i)_k$ (16) *verschiedene Arten je i Punkte desselben finden, welche die Eigenschaft haben, dass alle ebenen Räume von* $k + i - 2$ *Dimensionen, welche durch diese und die beliebigen* $k - i + 1$ *Punkte gehen, in einem und demselben weiteren Punkt das Gebilde schneiden.*

Für $k = 2$, $i = 1$ erhält man hieraus den bekannten Satz, dass die Zahl der Doppelpunkte einer Curve vom Geschlecht Null $= \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ ist; $k = 3$, $i = 1$: dass die Zahl der durch einen gegebenen Punkt einer Raumcurve vom Geschlecht Null gehenden dreifach schneidenden Sehnen $= \frac{(m-2)(m-3)}{2}$ ist. Nimmt man für $k + i = 6$ an, dass zwischen den φ die identische Relation:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_4 + \varphi_2 \cdot \varphi_5 + \varphi_3 \cdot \varphi_6 = 0$$

bestehe, so repräsentiren die Gleichungen (19) eine windschiefe Fläche m^{ter} Ordnung vom Geschlecht Null.

$i = 1$. *Man nehme 3 Gerade der Fläche an, so lässt sich noch auf:*

$$\frac{(m-5)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot}$$

verschiedene Arten je 1 Gerade der Fläche finden, durch welche eine lineare Congruenz geht, die ausser dieser und den gegebenen 3 Geraden noch eine weitere (5te) Gerade der windschiefen Fläche enthält.

$i = 2$. *Man nehme eine Gerade der Fläche an, so lassen sich noch auf:*

$$\frac{(m-5)(m-4)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

verschiedene Arten je 2 Gerade der Fläche finden, durch welche ein Hyperboloid geht, das ausser diesen und der gegebenen Geraden noch eine weitere (4te) Gerade der windschiefen Fläche ganz enthält.

Darmstadt, 4. December 1871.

Preisaufgabe

der Beneke'schen Stiftung für das Jahr 1874.

(Gestellt von der philosophischen Honorenfacultät der Universität Göttingen, April 1872.)

Die Abhängigkeit veränderlicher Grössen von einander, welche wir allgemein durch das Wort Function zu bezeichnen pflegen, ist für gewisse besondere Arten der Abhängigkeit bereits genauer untersucht worden. Insbesondere sind die periodischen Functionen in der Theorie der Abel'schen Functionen Gegenstand mathematischer Untersuchung geworden. Aber auch unter diesen ist nur ein kleiner Theil, die sogenannten hyperelliptischen Functionen, so weit gefördert, dass man im Stande ist, zu wirklichen Darstellungen überzugehen. Es sind dies diejenigen Functionen, bei deren Untersuchung eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche zu benutzen ist. Für einen wesentlichen Fortschritt in dieser Richtung würde es daher zu halten sein, wenn die nächste Classe Abel'scher Functionen ($p = 3$) genauer untersucht und bis zur Möglichkeit wirklicher Darstellungen gefördert würde. Aber dies kann nicht ausgeführt werden, ohne dass die Theorie der ebenen Curven 4ter Ordnung nach den Principien der neuern Algebra in ihren Grundzügen vollendet werde. Es wird daher von der philosophischen Honorenfacultät gewünscht

> eine vollständige Behandlung der Theorie der Abel'schen Functionen für $p = 3$, in Zusammenhang mit der algebraischen Theorie der ebenen Curven 4ter Ordnung.

Bearbeitungen dieser Aufgabe sind bis zum 31. August 1874 dem Decan der philosophischen Facultät zu Göttingen in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache einzureichen. Jede eingesandte Arbeit muss mit einem Motto und mit einem versiegelten, den Namen und die Adresse des Verfassers enthaltenden Couvert, welches dasselbe Motto trägt, versehen sein.

Der erste Preis wird mit 500 Thaler Gold in Friedrichsd'or, der zweite, oder das Accessit, mit 200 Thaler Gold in Friedrichsd'or honorirt.

Die Verleihung des Preises findet im Jahre 1875, am 11. März, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der Facultät Statt.

Gekrönte Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Summation der Reihe mit dem Gliede $\frac{p \sin pu}{h^2 + p^2}$.

Von P. du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

Es sei:

$$\frac{\pi}{2} f(u) = \Sigma \frac{p}{h^2 + p^2} \sin pu = \Sigma \sin pu \int_0^\infty e^{-h\varrho} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Durch Zerlegung findet man in bekannter Weise:

$$\int_0^\infty e^{-h\varrho} \sin p\varrho \, d\varrho = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-h\varrho}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho ,$$

$$= (-1)^p \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-h(\varrho + \pi)}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Daher:

$$\frac{\pi}{2} f(u + \pi) = \Sigma \sin pu \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-h(\varrho+\pi)}}{1 - e^{-2\pi h}} \sin p\varrho \, d\varrho ,$$

$$= \Sigma \sin pu \int_0^\pi \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} \sin p\varrho \, d\varrho .$$

Somit ergiebt sich:

$$\int_0^\pi \left(f(\varrho + \pi) - \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} \right) \sin p\varrho \, d\varrho = 0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Hieraus folgt nach Hrn. Liouville (Liouv. J. Bd. 1. S. 253), und wenn man noch die Bedingung erfüllt weiss, dass die Function $f(u + \pi)$ im Integrationsintervall ihr Zeichen nicht unendlich oft wechselt:

$$f(\varrho + \pi) = \frac{e^{-h\varrho} - e^{h\varrho}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}}, \quad 0 < \varrho < \pi .$$

Nun ist $f(\varrho + \pi) = -f(\pi - \varrho) = -f(u)$, wo $\varrho = \pi - u$, daher:

$$f(u) = \frac{e^{h\pi} e^{-hu} - e^{-h\pi} e^{hu}}{e^{h\pi} - e^{-h\pi}} .$$

Jene Bedingung lässt sich verificiren, wenn man dem Gliede der Reihe die Form $\frac{p^2}{h^2+p^2}\frac{\sin pu}{p}$ giebt und darauf den zweiten Mittelwerthsatz anwendet, ausserdem kann man auch rückwärts $f(u)$ wieder in eine Sinusreihe entwickeln.

Es zeigt dies Beispiel, wie man die Fourier'sche Reihe benutzen kann, um, statt zur Function die Entwickelungscoefficienten zu finden, aus den gegebenen Coefficienten die Function herzustellen.

Freiburg i. Br., April 1872.

Note über die Gleichung der auf einer Ebene abbildbaren Flächen.

Von A. Brill in Darmstadt.

Herr Clebsch, welcher zuerst*) die auf einer Ebene eindeutig abbildbaren Flächen näher betrachtet und die Eigenschaften der Abbildung für das Studium der Flächen selbst fruchtbar gemacht hat, geht in seiner Darstellung von der Gleichung, bezw. gewissen geometrischen Eigenschaften der Fläche aus, und leitet hieraus die Form der Abbildungsfunctionen ab. Wenn es sich nun umgekehrt darum handelt, *von bekannten Abbildungsfunctionen auf die Gleichung der Fläche* in Cartesischen Coordinaten überzugehen, so bedarf man eines symmetrischen Verfahrens für die Elimination der Variabeln $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ (homogen) der Abbildungsfunctionen φ aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

wo:

$$\varphi_i = a_i \xi_1^m + b_i \xi_1^{m-1} \xi_2 + c_i \xi_1^{m-1} \xi_3 + d_i \xi_1^{m-2} \xi_2^2 + \cdots\cdots$$

ist. Ein solches Verfahren wollen wir im Folgenden kurz angeben.

Man eliminire aus den Gleichungen:

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 = 0$$

die Variabeln nach der bekannten Sylvester'schen Methode**).

Die Resultante R ist in Bezug auf die Coefficienten jeder der drei Gleichungen vom Grade m^2. Dieselbe stellt sich in Form einer Determinante dar, deren einzelne Elemente — bis auf diejenigen von $3 \cdot \frac{m(m-1)}{2}$ Reihen — aus dreigliedrigen Determinanten, wie $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, $\Sigma \pm a_1 b_2 d_3$, $\Sigma \pm b_1 c_2 d_3$, etc. bestehen, welche je aus 3 Vertikalreihen des unvollständigen Systems:

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \ldots\ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \ldots\ldots \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \ldots\ldots \end{matrix} \right\|$$

*) Diese Annalen, Bd. I., S. 253.

**) Siehe z. B. Salmon, Algebra der lin. Transf., deutsch v. Fiedler. § 52.

der Coefficienten von φ_1, φ_2 und φ_3 sich zusammensetzen. Auch jene $3\frac{m(m-1)}{2}$ Reihen lassen sich so zu je dreien anordnen, dass sich die Elemente zu dreigliedrigen Determinanten der oben angegebenen Form gruppiren.

Die Resultante R der 3 Formen $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ lässt sich somit immer als ganze homogene Function $m^{2\text{ten}}$ Grades der dreigliedrigen Determinanten des Systems (2) *der Coefficienten darstellen.*

Dass dies möglich sein musste, war a priori aus der Eigenschaft der Resultante, eine Combinante der 3 Formen*) zu sein, einzusehn.

Ich behaupte nun, dass man *die Gleichung der durch die Functionen* (1) *auf die Ebene abgebildeten Fläche, in den homogenen Coordinaten $x_1 \ldots x_4$ geschrieben*, erhält, wenn man in der Gleichung:

$$R = 0$$

jede einzelne dreigliedrige Determinante des Systems (2), aus welchen sich R zusammensetzt, dadurch in eine viergliedrige verwandelt, dass man die drei Verticalreihen durch Zufügung je des entsprechenden Coefficienten von φ_4 vervollständigt, und als vierte Verticalreihe die Elemente: x_1, x_2, x_3, x_4 zufügt, so dass z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{in:} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

verwandelt wird. Man erkennt hieraus unmittelbar, dass *der Grad der Fläche* im Allgemeinen (vgl. diese Ann. IV, S. 510) $= m^2$ ist.

Bezüglich des Beweises möge die Bemerkung genügen, dass, wenn man statt der 4 Gleichungen:

$$\varrho \,.\, x_i = \varphi_i\,,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, 3 lineare Combinationen derselben nimmt, deren jede die Eigenschaft hat, dass für sie die linke Seite verschwindet, und für diese die Resultante bildet, dieselbe leicht auf die oben angegebene Form gebracht werden kann.

Als Beispiel möge die vielbehandelte Steiner'sche Fläche dienen. Für diese sind nach Herrn Weierstrass die φ allgemeine quadratische Formen:

$$\varphi_i = a_i\,\xi_1^2 + b_i\,\xi_2^2 + c_i\,\xi_3^2 + 2f_i\,\xi_2\,\xi_3 + 2g_i\,\xi_3\,\xi_1 + 2h_i\,\xi_1\,\xi_2$$
$$i = 1, \ldots 4.$$

Man bildet nach Herrn Hesse die Resultante der 3 Functionen $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$, indem man zu denselben noch die 3 ersten partiellen Differential-

*) Salmon, a. a. O. § 157. Den allgemeinen Beweis dieses Satzes hat Herr Gordan gegeben, diese Ann. Bd. V, S. 116.

quotienten der Jacobi'schen Determinante zufügt, und die Determinante der Coefficienten bildet. Diese lässt sich durch Combination der Reihen noch etwas vereinfachen. Ersetzt man dann die dreigliedrigen Determinanten durch die entsprechenden viergliedrigen, so erhält man als *Gleichung der Steiner'schen Fläche* in den homogenen Coordinaten $x_1 \ldots x_4$:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & -4(aghx) & 2(abfx) & 0 & \frac{1}{2}(abcx) & (cahx) & (abgx)+2(ahfx) \\ 0 & 0 & -4(bhfx) & 2(bcgx) & (bchx)+2(bfgx) & \frac{1}{2}(bcax) & (abfx) \\ 0 & 2(cahx) & 0 & -4(cfgx) & (bcgx) & (cafx)+2(cghx) & \frac{1}{2}(cabx) \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 \\ x_4 & a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite wird für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, d. h. wenn die 4 Kegelschnitte $\varphi_i = 0$ einen Punkt gemeinsam haben, identisch Null. Ersetzt man dann die Determinante durch die eine nicht identisch verschwindende Unterdeterminante, welche in den x vom 3ten Grad ist, so repräsentirt dieselbe, gleich Null gesetzt, die Gleichung der windschiefen Fläche 3ter Ordnung, auf welche sich für diesen Fall die Steiner'sche Fläche reducirt.

Darmstadt, im Oct. 1871.

Ueber das vollständige Fünfeck und gewisse durch dasselbe bestimmte Kegelschnitte.

Von v. Drach in Marburg.

Die nachfolgenden Untersuchungen über das vollständige Fünfeck und einige damit in engster Verbindung stehende Kegelschnitte verdanken ihre Entstehung Betrachtungen über die Veränderungen, welche die vollständige Figur eines Pascal'schen Sechsecks erleidet, wenn eine seiner Ecken den durch die übrigen fünf bestimmten Kegelschnitt durchläuft; es mag daher der Theil jener Betrachtungen, welcher diese Veranlassung gab, auch hier den Ausgangspunkt bilden.

I.

Hat man ein Pascal'sches Sechseck 1 2 3 4 5 6 und lässt die Ecke 6 den durch die 5 übrigen fest bleibenden Ecken bestimmten Kegelschnitt durchlaufen, so drehen sich die 60 Pascal'schen Linien, welche zur vollständigen Figur des Sechsecks gehören, um gewisse feste Punkte, weil in jedem der 60 möglichen Sechsecke ein Paar den Punkt 6 nicht enthaltende Gegenseiten vorkommt. Die Anzahl dieser festen Punkte ist 15, indem die Pascal'schen Linien sich zu je 4 in 45 Punkten schneiden und auf jeder von ihnen 3 solcher Schnittpunkte, von denen dann einer fest bleibt, liegen; die festen Punkte sind die Schnittpunkte der durch die 5 als fest angenommenen Punkte 1 2 3 4 5 bestimmten Geraden, und bilden sie also mit ihnen die Figur eines vollständigen Fünfecks. Die Schnittpunkte der sich um diese 15 festen Punkte drehenden Pascal'schen Linien müssen offenbar Kegelschnitte beschreiben, weil die durch die den successiven Lagen von 6 zugehörigen Pascal'schen Linien erzeugten Strahlenbüschel projectivisch sind. Ehe wir diese Kegelschnitte näher betrachten, wollen wir für die 15 Punkte eine abkürzende einfache Bezeichnung einführen; es sollen nämlich beim Fünfeck 1 2 3 4 5 die Schnittpunkte der Diagonalen mit einem obern, die von einer Seite und einer Diagonale mit einem untern Index markirt und die Schnittpunkte der Seiten in Klammern

gesetzt werden, während in allen drei Fällen der Punkt die Ziffer erhält, welche in den durch ihn gehenden Geraden nicht enthalten ist.

Man weiss nun, dass sich bestimmte Pascal'sche Linien in den sogenannten Steiner'schen Punkten, deren Anzahl 20 ist, zu dreien schneiden und zwar sind dies solche, welche, wenn das Sechseck durch das Symbol $\binom{a\ c\ e}{b\ d\ f}$ bezeichnet ist, wo die geraden und die ungeraden Ecken in je einer Reihe stehen, zu den Sechsecken gehören, die aus diesem Symbol durch cyklische Vertauschung der Glieder einer Reihe hervorgehen, welche Beziehung z. B. bei folgenden Sechsecken stattfindet $\binom{1\ 3\ 5}{2\ 4\ 6}$, $\binom{3\ 5\ 1}{2\ 4\ 6}$, $\binom{5\ 1\ 3}{2\ 4\ 6}$. Der zu den Sechsecken $\binom{1\ 3\ 5}{4\ 2\ 6}$, $\binom{3\ 5\ 1}{4\ 2\ 6}$, $\binom{5\ 1\ 3}{4\ 2\ 6}$ gehörige Steiner'sche Punkt heisst dann der Gegenpunkt des ersteren. Untersuchen wir den Ort, welchen der erstere Punkt, den wir mit s kurz bezeichnen wollen, beschreibt, so ergiebt sich, wenn wir aus der obigen die andere Bezeichnung der Pascal'schen Linien, wobei die Gegenseiten untereinander geschrieben werden, einführen, nämlich $\left\{\begin{matrix}12 & 23 & 34\\ 45 & 56 & 61\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}32 & 25 & 54\\ 41 & 16 & 63\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}52 & 21 & 14\\ 43 & 36 & 65\end{matrix}\right\}$ sofort, dass die festen Punkte, um welche sich die Linien drehen, sind (3), 5_1, 1_1, und dieselben also dem Ortskegelschnitt angehören, während eine einfache Betrachtung zeigt, dass er auch durch die Punkte 2 und 4 hindurchgeht, eine Betrachtung, die ausserdem noch den Beweis liefert, dass eben solche Pascal'sche Linien, wie die 3 erwähnten sich in einem Punkt s schneiden müssen. Wie wir auf diese Weise für s den Ortskegelschnitt 1_1 2 (3) 4 5_1 gefunden haben, ergiebt sich für den Gegenpunkt (1) 2 3′ 4 (5).

Es wird hierdurch nahe gelegt für die Pascal'schen Linien und damit auch für die zugehörigen Sechsecke eine kürzere Bezeichnung einzuführen, welche darin besteht, dass wir z. B. für die obigen einfach der Reihe nach schreiben (3) 2 4, 5_1 2 4, 1_1 2 4 und 3′ 4 2, (5) 4 2, (1) 4 2, von der man zu der ersteren gelangt, indem man die auf die markirte Ziffer folgende Ambe mit ihrer letzten Ziffer unter die markirte nach Weglassung der Marke, die nur für die vorliegende Untersuchung von Bedeutung ist, schreibt, dann 6 anfügt und in der oberen Reihe die offenen Stellen mit den noch übrigen Ziffern aus der Reihe 1 2 3 4 5 so ausfüllt, wie die Ziffern im Cyclus 1 2 3 4 5 aufeinanderfolgen. Beim Uebergang von der ersten Bezeichnungsweise zu dieser kurzen hat man nur zu beachten, dass dann der gegebene Ausdruck erst so transformirt werden muss, dass unten die letzte Ziffer rechts 6 ist und oben die Reihenfolge dem Cyklus 1 2 3 4 5 entspricht, z. B. $\binom{5\ 3\ 1}{2\ 4\ 6} = \binom{1\ 3\ 5}{4\ 2\ 6}$.

Die Pascal'schen Linien gruppiren sich dann nach den festen Punkten, um welche sie sich drehen, geordnet wie folgt:

Tafel 1.

1′ 32	2′ 43	3′ 54	4′ 15	5′ 21
25	31	42	53	14
34	45	51	12	23
54	15	21	32	43
1_1 24	2_1 35	3_1 41	4_1 52	5_1 13
23	34	45	51	12
45	51	12	23	34
35	41	52	13	24
(1) 52	(2) 13	(3) 24	(4) 35	(5) 41
53	14	25	31	42
42	53	14	25	31
43	54	15	21	32

und es liefern einen Steiner'schen Punkt immer die drei, welche dieselbe Ambe haben, während die mit der permutirten Ambe behafteten durch den betreffenden Gegenpunkt gehen, sodass wir also für die Steiner'schen Punkte folgende Zusammenstellung erhalten:

Tafel 2.

3_1 . .	5_1 . .	(3) . .	2′ . .	4_1 . .	1_1 . .	(4) . .	5_1 . .	2_1 . .	1_1 . .
4′ 12	(2) 13	5′ 14	(3) 15	5′ 23	(3) 21	1′ 25	1′ 34	(4) 35	2′ 45
5_1 . .	4_1 . .	(2) . .	4′ . .	1_1 . .	5_1 . .	(3) . .	2_1 . .	1_1 . .	3_1 . .
3′ . .	(5) . .	3_1 . .	2_1 . .	4′ . .	(1) . .	4_1 . .	5′ . .	(2) . .	1′ . .
(4) 21	2′ 31	(5) 41	3′ 51	(5) 32	3′ 42	(1) 52	(1) 43	4′ 53	(2) 54
5′ . .	(4) . .	2_1 . .	4_1 . .	1′ . .	(5) . .	3_1 . .	2′ . .	(1) . .	3′ . .

aus der sich die 20 Ortskegelschnitte der Steiner'schen Punkte sogleich entnehmen lassen.

Fassen wir nun von diesen Kegelschnitten zwei zu einem Paar Gegenpunkte gehörige ins Auge z. B. wieder die beiden obigen 1_1 2 (3) 4 5_1 und (1) 2 3′ 4 (5), welche wir mit S und S_1 bezeichnen wollen, während der durch 1 2 3 4 5 gehende mit C bezeichnet werden mag, so liefert die auf jeden von ihnen angewandte Betrachtung, wodurch sie selbst oben als Orte Steiner'scher Punkte nachgewiesen wurden, den Beweis, *dass die Beziehung zwischen C, S und S_1 durchaus gegenseitig ist*, d. h. dass für S als Fundamentalkegelschnitt mit dem Fünfeck 1_1 2 (3) 4 5_1 die Orte für ein Paar Gegenpunkte C und S_1 sind, während für S_1 als durch die Punkte (1) 2 3′ 4 (5) gegeben C und S diese Rolle übernehmen. *Die drei Curven bilden also ein cyklisch abgeschlossenes System.*

Hierdurch wird dann unsere Aufmerksamkeit auf die Beziehungen zwischen solchen Dreiecken wie $1\,3\,5$, $1_1\,(3)\,5_1$, $(1)\,3'\,(5)$, deren unsere Figur im Ganzen 10 Systeme enthält, gelenkt; und fällt dabei sofort in die Augen, dass es drei Dreiecke sind, die auf zweierlei Art perspectivisch liegen mit den Punkten 2 und 4 als Projectionscentren. Aus einem in den Untersuchungen von Rosanes*) und Schröter**) über Dreiecke in perspectivischer Lage bewiesenen Satze wissen wir dann, dass je zwei von ihnen noch auf eine dritte Art perspectivisch sein müssen, und wir wollen daher zunächst diese Projectionscentra, welche für die Folge von besonderer Wichtigkeit sind, im Zusammenhang mit den übrigen Eigenschaften des Systems aufsuchen.

II.

Nehmen wir:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0 \quad , \quad E=0$$

als Gleichungen der Ecken 1 2 3 4 5 unseres Fünfecks an und lassen zwischen denselben, wie dies Clebsch bei seinen Untersuchungen über das ebene Fünfeck***), wo diese Ausdrücke die Seiten repräsentiren, gethan hat, die Relationen:

$$\begin{aligned} A+B+C+D+E&=0 \\ \alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D+\varepsilon E&=0 \end{aligned}$$

existiren, so stellen sich unsere 15 Punkte durch sehr einfache Gleichungen dar, deren Bildung aus den nachstehend angeführten, allein von uns in der Folge benutzten, ersehen werden kann; es ist:

$$\begin{aligned}
3' &\equiv (\delta-\gamma)\,D+(\alpha-\gamma)\,A \equiv (\varepsilon-\gamma)\,E+(\beta-\gamma)\,B=0, \\
1_1 &\equiv (\beta-\alpha)\,B+(\varepsilon-\alpha)\,E \equiv (\gamma-\alpha)\,C+(\delta-\alpha)\,D=0, \\
5_1 &\equiv (\alpha-\varepsilon)\,A+(\delta-\varepsilon)\,D \equiv (\beta-\varepsilon)\,B+(\gamma-\varepsilon)\,C=0, \\
(1) &\equiv (\beta-\alpha)\,B+(\gamma-\alpha)\,C \equiv (\delta-\alpha)\,D+(\varepsilon-\alpha)\,E=0, \\
(3) &\equiv (\delta-\gamma)\,D+(\varepsilon-\gamma)\,E \equiv (\alpha-\gamma)\,A+(\beta-\gamma)\,B=0, \\
(5) &\equiv (\alpha-\varepsilon)\,A+(\beta-\varepsilon)\,B \equiv (\gamma-\varepsilon)\,C+(\delta-\varepsilon)\,D=0.
\end{aligned}$$

Da die Ecken unserer Dreiecke bei den oben erwähnten beiden perspectivischen Lagen nach folgendem Schema entsprechen:

$$(\Theta) \qquad 2\begin{cases} 1 & 3 & 5 \\ (3) & 5_1 & 1_1 \\ (5) & (1) & 3' \end{cases} \quad , \quad 4\begin{cases} 1 & 3 & 5 \\ 5_1 & 1_1 & (3) \\ 3' & (5) & (1) \end{cases},$$

*) Math. Annalen Bd. II., p. 549.

**) Math. Annalen Bd. II., p. 553.

***) Math. Annalen Bd. IV., p. 476.

so sind die 3 für je zwei von ihnen noch vorhandenen Projectionscentra durch folgende Anordnungen der Ecken bedingt:

$$\left.\begin{matrix} 1_1\ (3)\ 5_1 \\ 1\ \ 3\ \ 5 \end{matrix}\right\} P_1 \quad , \quad \left.\begin{matrix} 1\ \ 3\ \ 5 \\ (1)\ 3'\ (5) \end{matrix}\right\} P_2 \quad , \quad \left.\begin{matrix} (1)\ 3'\ (5) \\ 1_1\ (3)\ 5_1 \end{matrix}\right\} P_3$$

und findet man für diese Punkte folgende Gleichungen:

$$P_1 \equiv l_2 l_1 m_2 n_1 A + m_2 m_1 n_2 l_1 C + n_2 n_1 l_2 m_1 E = 0,$$
$$P_2 \equiv l_2 l_1 m_1 n_2 A + m_2 m_1 n_1 l_2 C + n_2 n_1 l_1 m_2 E = 0,$$
$$P_3 \equiv l_2 l_1 (m_2 n_1 + m_1 n_2) A + m_2 m_1 (n_2 l_1 + n_1 l_2) C + n_2 n_1 (l_2 m_1 + l_1 m_2) E = 0,$$

wobei zur Abkürzung:

$$l_2 = \delta - \alpha \quad , \quad m_2 = \delta - \gamma \quad , \quad n_2 = \delta - \varepsilon ,$$
$$l_1 = \beta - \alpha \quad , \quad m_1 = \beta - \gamma \quad , \quad n_1 = \beta - \varepsilon$$

gesetzt sind. *Da $P_1 + P_2 \equiv P_3$ ist, so liegen diese 3 Projectionscentra auf einer Geraden p.*

Bilden wir im Hinblick auf den bekannten*) Satz, dass bei zwei Dreiecken, die drei von einem Punkt ausgehenden Geraden eingeschrieben sind, die Gegenseiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, für unsere Figur die Gleichungen:

$$\text{(I)}\ (\delta - \varepsilon)(\varepsilon - \beta)(\gamma - \alpha) E - (\delta - \gamma)(\gamma - \beta)(\alpha - \varepsilon) C = 0,$$
$$\text{(III)}\ (\delta - \gamma)(\gamma - \beta)(\alpha - \varepsilon) C - (\delta - \alpha)(\alpha - \beta)(\varepsilon - \gamma) A = 0,$$
$$\text{(V)}\ (\delta - \alpha)(\alpha - \beta)(\varepsilon - \gamma) A - (\delta - \varepsilon)(\varepsilon - \beta)(\gamma - \alpha) E = 0,$$

der Schnittpunkte von (3) 5_1 und 3′ (5), 5_1 1_1 und (5) (1), 1_1 (3) und (1) 3′, so ergiebt sich einerseits, weil die Summe der Gleichungen identisch verschwindet, der Beweis eben dieses Satzes und anderseits aus der Zusammensetzung der Gleichungen, dass auch die Seiten 3 5, 5 1, 1 3 der Reihe nach durch die Punkte I, III, V gehen, *also die gleichnamigen Seiten unserer 3 Dreiecke sich in Punkten schneiden, die auf einer Geraden g liegen;* eine Eigenschaft, die, wie wir später sehen werden, nicht umgekehrt die Figur eines vollständigen Fünfecks bedingt, während dies der Fall ist, wenn 2 Systeme von drei durch je einen Punkt gehenden Geraden gegeben sind.

In unserem System von Dreiecken finden wir noch eine andere schon von Hesse**) beim Pascal'schen Sechseck hervorgehobene Figur, von der folgender Satz gilt: „Wenn 3 Dreiecke dreien Geraden eingeschrieben sind, die von einem Punkte ausgehen, so bilden die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke wieder drei Dreiecke, welche drei Geraden eingeschrieben sind, die von einem andern Punkte aus-

*) Vergl. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie in der Ebene. p. 116.

**) Vergl. Hesse, Vorlesungen etc. p. 121.

gehen" und zwar ist derselbe, wie das oben aufgestellte Schema (Θ) lehrt, zweimal auf dieselbe anwendbar.

Für das Projectionscentrum 2 ergeben sich dann 3 Gerade l_1, l_3, l_5 als durch einen Punkt gehend, von denen l_1 folgende Schnittpunkte entsprechender Seiten unserer Dreiecke enthält:

$$\alpha_1 \equiv \{1\,3,\ (5)\,(1)\} \equiv (\alpha-\beta)(\varepsilon-\alpha)A + (\varepsilon-\beta)(\gamma-\alpha)C = 0,$$
$$\gamma_1 \equiv \{3\,5,\ (1)\,3'\} \equiv (\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)C + (\alpha-\beta)(\varepsilon-\gamma)E = 0,$$
$$\varepsilon_1 \equiv \{5\,1,\ 3'\,(5)\} \equiv (\varepsilon-\beta)(\gamma-\varepsilon)E + (\gamma-\beta)(\alpha-\varepsilon)A = 0,$$

was durch $(\gamma-\beta)\alpha_1 + (\varepsilon-\beta)\gamma_1 + (\alpha-\beta)\varepsilon_1 \equiv 0$ bestätigt wird, während auf l_3 folgende liegen:

$$\alpha_3 \equiv \{5\,1,\ 1_1\,(3)\} \equiv (\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)A + (\gamma-\beta)(\varepsilon-\alpha)E = 0,$$
$$\gamma_3 \equiv \{1\,3,\ (3)\,5_1\} \equiv (\gamma-\beta)(\varepsilon-\gamma)C + (\varepsilon-\beta)(\alpha-\gamma)A = 0,$$
$$\varepsilon_3 \equiv \{3\,5,\ 5_1\,1_1\} \equiv (\varepsilon-\beta)(\alpha-\varepsilon)E + (\alpha-\beta)(\gamma-\varepsilon)C = 0,$$

wobei $(\alpha-\beta)\gamma_3 + (\varepsilon-\beta)\varepsilon_3 + (\gamma-\beta)\alpha_3 \equiv 0$. Man erkennt dann weiter, da:

$$\alpha_1+\gamma_1+\varepsilon_1 \equiv \alpha_3+\gamma_3+\varepsilon_3 \equiv (\varepsilon-\alpha)(\alpha-\gamma)A+(\alpha-\gamma)(\gamma-\varepsilon)C+(\gamma-\varepsilon)(\varepsilon-\alpha)E$$

ist, dass:

$$J \equiv (\varepsilon-\alpha)(\alpha-\gamma)A + (\alpha-\gamma)(\gamma-\varepsilon)C + (\gamma-\varepsilon)(\varepsilon-\alpha)E = 0$$

den Schnittpunkt von l_1 und l_3 darstellt. Die auf der Geraden l_5 liegenden Punkte haben nicht so einfache Gleichungen; es ist:

$$\alpha_5 \equiv \{(1)\,3',\ 5_1\,1_1\} \equiv (\gamma-\varepsilon)\{(\varepsilon-\alpha)^2(\beta-\gamma)E - (\gamma-\alpha)^2(\beta-\varepsilon)C\}$$
$$+ \{(\varepsilon-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2 + (\beta-\alpha)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\alpha)(\gamma-\varepsilon)\}B = 0,$$
$$\gamma_5 \equiv \{3'\,(5),\ 1_1\,(3)\} \equiv (\varepsilon-\alpha)\{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)A - (\varepsilon-\gamma)^2(\beta-\alpha)E\}$$
$$+ \{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(\varepsilon-\gamma)(\varepsilon-\alpha)\}B = 0,$$
$$\varepsilon_5 \equiv \{(5)(1),\ (3)\,5_1\} \equiv (\alpha-\gamma)\{(\gamma-\varepsilon)^2(\beta-\alpha)C - (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)A\}$$
$$+ \{(\gamma-\varepsilon)^2(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\varepsilon)(\beta-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\gamma)\}B = 0$$

und beweist, da die Identität der Coefficienten von B, wenn dieselben in Determinantenform geschrieben werden, nach Auflösung der Klammern sofort erkannt wird, einerseits die Relation:

$$(\gamma-\varepsilon)(\beta-\alpha)\alpha_5 + (\varepsilon-\alpha)(\beta-\gamma)\gamma_5 + (\alpha-\gamma)(\beta-\varepsilon)\varepsilon_5 \equiv 0,$$

dass die Punkte auf der Geraden l_5 liegen, während anderseits aus:

$$\frac{\alpha_5-\gamma_5}{(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\beta)} \equiv \frac{\gamma_5-\varepsilon_5}{(\gamma-\varepsilon)(\alpha-\beta)} \equiv \frac{\varepsilon_5-\alpha_5}{(\varepsilon-\alpha)(\gamma-\beta)} \equiv J$$

folgt, dass diese Gerade durch den Schnitt von l_1 und l_3 geht. Ganz analog stellen sich die Gleichungen der auf den Geraden l_2, l_4, l_6 gelegenen Punkte dar, wobei dann die Gleichung:

$$\alpha_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2 \equiv \alpha_4 + \gamma_4 + \varepsilon_4 \equiv J$$

lehrt, dass ihr gemeinsamer Schnittpunkt mit dem der ersteren zusammenfällt; sie bilden, was hier beiläufig bemerkt werden mag, mit denselben eine Involution.

III.

Werden die mit einem solchen Dreiecksystem wie dem unsrigen in I. in Verbindung gebrachten Kegelschnitte, also etwa wieder 1 2 3 4 5, 1_1 2 (3) 4 5_1 und (1) 2 3′ 4 (5), als Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel mit den Centren 2 und 4 betrachtet, so ergiebt sich ein höchst einfacher Zusammenhang zwischen diesen Büscheln. Sind nämlich die Projectionsstrahlen unserer Dreiecke für jene beiden Centra analytisch ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$2(1\,(3)\,(5)) = U - \lambda_1 V = 0 \qquad 4(1\;3'\;5_1) = U - \mu_1 W = 0,$$
$$2(3\;5_1\;(1)) = U - \lambda_3 V = 0 \qquad 4(3\,(5)\,1_1) = U - \mu_3 W = 0,$$
$$2(5\;1_1\;3') = U - \lambda_5 V = 0 \qquad 4(5\,(1)\,(3)) = U - \mu_5 W = 0,$$

wo $U = 0$ die Gerade 24, $V = 0$ und $W = 0$ vor der Hand beliebige durch 2 resp. 4 gehende Gerade bezeichnen, während die Constanten λ und μ gegebene Werthe haben, so werden die Gleichungen:

$$U - \lambda V = 0 \quad , \quad U - \mu W = 0$$

sowohl den Kegelschnitt C als auch die beiden andern S und S_1 darstellen, je nachdem zwischen λ und μ eine lineare Relation angenommen wird, die folgenden Bedingungen genügt, nämlich, dass beim Kegelschnitt C die die ganze Projectivität festsetzenden drei Strahlenpaare erhalten werden für $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_3\mu_3$, $\lambda_5\mu_5$, während für S $\lambda_1\mu_5$, $\lambda_3\mu_1$, $\lambda_5\mu_3$ und für S_1 $\lambda_1\mu_3$, $\lambda_3\mu_5$, $\lambda_5\mu_1$ zusammengehören, also die drei vorkommenden Anordnungen durch cyklische Vertauschung der einen von den beiden Grössen λ und μ in einander übergehen.

Bilden wir die hierdurch bedingten Gleichungen für die projectivische Beziehung, wobei in den beiden letzten Fällen ν und ϱ, resp. σ und τ an Stelle von λ und μ geschrieben sind, nämlich:

$$a\,\lambda\mu + b\,\lambda + c\,\mu + d = 0,$$
$$a_1\nu\varrho + b_1\nu + c_1\varrho + d_1 = 0,$$
$$a_2\sigma\tau + b_2\sigma + c_2\tau + d_2 = 0,$$

so ergeben sich, wenn wir zur grössern Vereinfachung $\lambda_3 = \mu_3 = \infty$ annehmen, folgende Werthe für die die Projectivität fixirenden Constanten:

$$a = 0 \quad , b = \mu_5 - \mu_1 \;, c = \lambda_1 - \lambda_5 \;, d = \lambda_5\mu_1 - \lambda_1\mu_5,$$
$$a_1 = -1 \;, b_1 = \mu_1 \quad , c_1 = \lambda_5 \quad , d_1 = \lambda_1\mu_5 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_5\mu_5,$$
$$a_1 = 1 \quad , b_2 = -\mu_5 \;, c_2 = -\lambda_1 \;, d_2 = \lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_5\mu_1,$$

aus denen die Beziehungen:

$$a + a_1 + a_2 \equiv 0, \quad b + b_1 + b_2 \equiv 0, \quad c + c_1 + c_2 \equiv 0,$$
$$d + d_1 + d_2 \equiv 0,$$

zu entnehmen sind. Als Gleichungen unserer Kegelschnitte hat man hiernach

$$\begin{aligned} C &\equiv (\lambda_1 - \lambda_5) UV - (\lambda_1 \mu_5 - \lambda_5 \mu_1) VW - (\mu_1 - \mu_5) WU = 0, \\ S &\equiv - U^2 + \lambda_5 UV - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_5 \mu_5 - \lambda_1 \mu_5) VW + \mu_1 WU = 0, \\ S_1 &\equiv U^2 - \lambda_1 UV + (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_5 \mu_5 - \lambda_5 \mu_1) VW - \mu_5 WU = 0, \end{aligned}$$

wobei die Relation

$$C + S + S_1 \equiv 0$$

zeigt, dass dieselben ausser den auf $U = 0$ liegenden Punkten 2 und 4 noch zwei imaginäre Punkte gemein haben, als deren Verbindungslinie wir durch Fortschaffung des mit VW behafteten Gliedes aus 2 der vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned} U' \equiv (\lambda_1 \mu_5 - \lambda_5 \mu_1) U + (\mu_1 - \mu_5)(\lambda_1^2 + \lambda_5^2 - \lambda_1 \lambda_5) V \\ - (\lambda_1 - \lambda_5)(\mu_1^2 + \mu_5^2 - \mu_1 \mu_5) W = 0 \end{aligned}$$

erhalten.

Sollen nun je zwei unserer Kegelschnitte collinear so aufeinander bezogen werden, dass, wodurch dann die ganze Beziehung bedingt ist, die gleichnamigen Punkte entsprechende werden, so wird die Annahme dieser Beziehung zwischen C und S, und C und S_1 dieselbe für S und S_1 bedingen. Zu dieser Beziehung zwischen C und S müssen die Constanten der sie feststellenden Gleichung

$$e \lambda \nu + f \lambda + g \nu + h = 0$$

aus der angegebenen Bedingung, wonach zu den Werthen $\lambda = \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5$ die Werthe $\nu = \lambda_5 \lambda_1 \lambda_3$ gehören, bestimmt werden und erhält man dann:

$$e = -1, \quad f = \lambda_1, \quad g = \lambda_5, \quad h = \lambda_1 \lambda_5 - \lambda_1^2 - \lambda_2^5.$$

Bilden wir dann die Gleichung der Geraden, welche irgend zwei hiernach entsprechende Punkte von C und S verbindet, so ergiebt sich dafür der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} (*) \qquad & \lambda^2 (\mu_1 - \mu_5) \{\mu_5 W - \lambda_1 V\} \\ & + \lambda \{(\lambda_1 \mu_1 - 2 \lambda_1 \mu_5 + \lambda_5 \mu_5) U - (\mu_1 - \mu_5)(\lambda_1 \lambda_5 - \lambda_1^2 - \lambda_5^2) V \\ & + [(\mu_1 - \mu_5)(\lambda_1 \mu_1 - \lambda_5 \mu_1 + \lambda_5 \mu_5) + \mu_5 (\lambda_5 \mu_1 - \lambda_1 \mu_5)] W\} \\ & + (\lambda_1 \mu_5 - \lambda_5 \mu_1) \{\lambda_1 U - (\lambda_1 \mu_1 - \lambda_5 \mu_1 + \lambda_5 \mu_5) W\} = 0 \end{aligned}$$

und es zeigt derselbe, dass die Gerade immer durch einen festen Punkt, das oben mit P_1 bezeichnete Projectionscentrum der Dreiecke 1 3 5 und $1_1\,(3)\,5_1$ hindurchgeht. Denn man erhält für die Verbindungslinien entsprechender Ecken dieser Dreiecke folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \{5\,5_1\} &\equiv \mu_5 U - \lambda_5 (\mu_1 - \mu_5) V - \mu_1 \mu_5 W = 0, \\ \{3\,(3)\} &\equiv \lambda_1 V - \mu_5 W = 0, \\ \{1\,1_1\} &\equiv \lambda_1 U - \lambda_5 \lambda_1 V - (\lambda_1 - \lambda_5) \mu_1 W = 0, \end{aligned}$$

welche, wie die Identität

$$\lambda_5 \mu_1 \{3(3)\} \equiv \lambda_1 \{5 5_1\} - \mu_5 \{1 1_1\}$$

zeigt, durch einen Punkt, eben das Projectionscentrum P_1 gehen, dessen auf das Fundamentaldreieck $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ bezügliche Coordinaten daher sind:

$$U_1 : V_1 : W_1 \equiv \lambda_1 \mu_1 - \lambda_5 \mu_1 + \lambda_5 \mu_5 : \mu_5 : \lambda_1 .$$

Diese Coordinatenwerthe bringen aber die in der Gleichung (*) vorkommenden Parenthesen einzeln zum Verschwinden und beweisen damit, *dass die durch* (*) *dargestellte, zwei entsprechende Punkte von* C *und* S *verbindende Gerade immer durch* P_1 *geht.*

Es folgt dann weiter, dass bei den oben angegebenen analogen collinearen Beziehungen zwischen C und S_1 und S und S_1 die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch die früher mit P_2 und P_3 bezeichneten Projectionscentra gehen, deren Coordinaten wir der späteren Anwendungen wegen angeben müssen; sie sind:

$$U_2 : V_2 : W_2 \equiv \lambda_1 \mu_1 - \lambda_1 \mu_5 + \lambda_5 \mu_5 : \mu_1 : \lambda_5 ,$$
$$U_3 : V_3 : W_3 \equiv \mu_1 \lambda_5 - \mu_5 \lambda_1 : \mu_1 - \mu_5 : \lambda_5 - \lambda_1$$

und beweisen die Beziehungen:

$$U_2 - U_1 \equiv U_3, \quad V_2 - V_1 \equiv V_3, \quad W_2 - W_1 \equiv W_3$$

wieder, dass die drei Projectionscentra auf einer Geraden liegen.

Bezeichnen wir die auf diese Weise zusammengehörigen Punkte der Kegelschnitte mit λ, ν, σ, so trifft der zu ihrer Feststellung dienende Projectionsstrahl die beiden jedesmal in Betracht kommenden Kegelschnitte noch in zwei zu einander in derselben Beziehung stehenden Punkten, die wir bei den durch P_1 aufeinander bezogenen Kegelschnitten C und S mit λ' und ν' bezeichnen wollen und wobei dann offenbar λ und ν' sich gerade so zueinander verhalten, wie λ' und ν. Mittelst des Projectionscentrums P_2 gelangen wir nun von λ, indem wir von dem dabei auftretenden Punkte λ'' absehen, zu den Punkten σ und σ'', während λ' auf dieselbe Weise mit σ' und $(\sigma')''$ zu bezeichnende Punkte liefert, und sich dabei λ und σ verhalten, wie λ' und σ', während λ und σ'' dieselbe Beziehung zueinander haben, wie λ' und $(\sigma')''$. Demnach werden sich ν' und σ' verhalten, wie ν und σ, d. h. es wird die Gerade $\nu'\sigma'$ durch P_3 hindurchgehen, sodass es sich nur fragt, welche Eigenschaft der Geraden $\nu'\sigma''$ zukommt, indem dieselbe dann auch $\nu(\sigma')''$ hat. Es wird sich zeigen, dass diese Geraden immer durch einen festen Punkt gehen und dass die Punkte ν' und σ'' ein Paar Steiner'sche Gegenpunkte für das auf C gelegene Pascal'sche Sechseck 1 2 3 4 5 6 sind.

IV.

Zu den Werthen λ_1, ∞, λ_5, welche den Ecken unseres Dreiecks 1 3 5 zukommen und zu denen beziehungsweise μ_1, ∞, μ_5 gehören, finden wir folgende für ν' und σ'', sowie die zugehörigen ϱ' und τ''; es liefert

$$\lambda = \lambda_1;\quad \nu_1' = \frac{\lambda_1 M_{15}}{\lambda_5 \mu_1},\quad \varrho_1' = \frac{\mu_1 M_{15}}{N_{15}};$$

$$\sigma_1'' = \frac{\lambda_1 M_{51}}{N_{51}},\quad \tau_1'' = \frac{\mu_1 M_{51}}{\lambda_1 \mu_5};$$

$$\lambda = \infty;\quad \nu_3' = \frac{M_{15}}{\mu_5},\quad \varrho_3' = \frac{M_{15}}{\lambda_1};$$

$$\sigma_3'' = \frac{M_{51}}{\mu_1},\quad \tau_3'' = \frac{M_{51}}{\lambda_5};$$

$$\lambda = \lambda_5;\quad \nu_5' = \frac{\lambda_5 M_{15}}{R_{15}},\quad \varrho_5'' = \frac{\mu_5 M_{15}}{\lambda_5 \mu_1};$$

$$\sigma_5'' = \frac{\lambda_5 M_{51}}{\lambda_1 \mu_5},\quad \tau_5'' = \frac{\mu_5 M_{51}}{N_{51}};$$

wobei die Grössen M, N, R folgende Bedeutung haben:

$$M_{15} = \lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_5 + \lambda_5\mu_5,\qquad M_{51} = \lambda_1\mu_1 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_5\mu_5,$$
$$N_{15} = \lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_1 - \lambda_1\mu_5,\qquad N_{51} = \lambda_1\mu_1 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_1\mu_5,$$
$$R_{15} = \lambda_5\mu_5 + \lambda_5\mu_1 - \lambda_1\mu_5,\qquad R_{51} = \lambda_5\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + \lambda_1\mu_5.$$

Die durch die Punkte ν' und σ'' gebildeten Dreiecke, deren Ecken wir mit $n_1\, n_3\, n_5$, $s_1\, s_3\, s_5$ kurz bezeichnen wollen, haben Seiten mit nachstehenden Gleichungen:

$$n_1 n_3 \equiv \lambda_1(\mu_1 - \mu_5)\,U + \lambda_1 V - \mu_1 W = 0,$$
$$n_3 n_5 \equiv \mu_5(\lambda_5 - \lambda_1)\,U - \lambda_5 V + \mu_5 W = 0,$$
$$n_5 n_1 \equiv \{(\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5)\lambda_1\mu_5 + (\lambda_1\mu_5 + \lambda_5\mu_1)\lambda_5\mu_1 - (\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1)\lambda_1\mu_5\}\,U$$
$$- \lambda_1\lambda_5(\mu_5 - \mu_1)V - \mu_1\mu_5(\lambda_1 - \lambda_5)W = 0;$$
$$s_1 s_3 \equiv \mu_1(\lambda_5 - \lambda_1)\,U + \lambda_1 V - \mu_1 W = 0,$$
$$s_3 s_5 \equiv \lambda_5(\mu_1 - \mu_5)\,U - \lambda_5 V + \mu_5 W = 0,$$
$$s_5 s_1 = \{(\lambda_1\mu_1 - \lambda_5\mu_5)\lambda_5\mu_1 + (\lambda_1\mu_5 + \lambda_5\mu_1)\lambda_1\mu_5 + (\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1)\lambda_5\mu_1\}\,U$$
$$- \lambda_1\lambda_5(\mu_5 - \mu_1)V - \mu_1\mu_5(\lambda_1 - \lambda_5)W = 0.$$

Man erkennt dann, da die Seiten des Dreiecks 1 3 5 folgende Gleichungen haben:

$$\{13\} \equiv \lambda_1 V - \mu_1 W = 0;\quad \{35\} \equiv -\lambda_5 V + \mu_5 W = 0;$$
$$\{51\} \equiv (\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1)\,U - \lambda_5\lambda_1(\mu_5 - \mu_1)V - \mu_5\mu_1(\lambda_1 - \lambda_5)W = 0,$$

dass die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke sich auf der Geraden 2 4 schneiden, also ein System von Dreiecken bilden, welches eine Eigenschaft unseres ursprünglichen hat, ohne desshalb die andere, auf zweierlei Art perspectivisch zu sein, zu besitzen. Die drei neuen Dreiecke sind aber in Bezug auf die in Betracht kommenden Kegel-

schnitte vollkommen gleichartig und können wir deshalb behaupten, dass, sowie bei der durch die gleichnamigen Dreiecksecken zwischen C und S resp. S_1 festgesetzten projectivischen Beziehung die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch die Projectionscentren der jedesmaligen beiden Dreiecke gehen, nämlich $\lambda\nu'$ durch P_1, $\lambda\sigma''$ durch P_2, auch bei derselben Beziehung zwischen S und S_1 *die Geraden* $\nu'\sigma''$ *durch das Projectionscentrum* Π_3 *der Dreiecke* $n_1\, n_3\, n_5$ *und* $s_1\, s_3\, s_5$ *gehen muss.*

Als Coordinaten dieses Punktes Π_3 ergeben sich folgende:

$$U_3' : V_3' : W_3' = 2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5) - (\lambda_5\mu_1 + \lambda_1\mu_5) : \mu_1 + \mu_5 : \lambda_1 + \lambda_5$$

und lehren dieselben als von der Form $U_2 + U_1$, $V_2 + V_1$, $W_2 + W_1$, *dass der Punkt* Π_3 *mit den Punkten* $P_1\, P_2\, P_3$ *auf derselben Geraden* p *liegt und dem Punkte* P_3 *harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die Punkte* P_1 *und* P_2.

Wie wir eben das auf C gelegene Dreieck beibehielten und auf S und S_1 die neuen Dreiecke bildeten, welche zur collinearen Beziehung dieser Kegelschnitte durch Π_3 führten, so können selbstverständlich auch die auf S resp. S_1 liegenden alten Dreiecke beibehalten werden und zwei weitere Punkte Π_1 und Π_2 ermittelt werden, von denen der erste der vierte harmonische ist zu P_1 in Bezug auf P_2 und P_3, während der zweite harmonisch conjugirt ist zu P_2 in Bezug auf P_3 und P_1. Die drei Punkte P bilden daher mit den zugehörigen Π ein Punktsystem, welches aus der Theorie der binären Formen bekannt*) ist, indem, wenn die drei Punkte P durch eine Form 3ten Grades $f = 0$ repräsentirt sind, die Π durch die gewöhnlich mit Q bezeichnete Covariante 3ten Grades jener Form dargestellt werden und von dem man überdies weiss, dass die sechs Punkte eine Involution bilden, deren Doppelelemente durch die quadratische gewöhnlich mit Δ bezeichnete Covariante der Form bedingt werden.

Die Punkte Π_1, Π_2, Π_3 *sind die Pole der Dreiecke* $1_1\,(3)\,5_1$, $(1)\,3'(5)$, $1\,3\,5$ *in Bezug auf die Gerade* g, *auf der sich die entsprechenden Seiten dieser Dreiecke schneiden;* es wird wiederum wegen des völlig gleichen Verhaltens derselben genügen, dies für das Dreieck $1\,3\,5$ nachzuweisen. Den in II. mit (I), (III) und (V) bezeichneten Gleichungen gemäss sind die vierten harmonischen zu den Schnittpunkten der Seiten des Dreiecks mit g gegeben durch

$$(\delta - \varepsilon)(\varepsilon - \beta)(\gamma - \alpha)E + (\delta - \gamma)(\gamma - \beta)(\alpha - \varepsilon)C = 0,$$
$$(\delta - \gamma)(\gamma - \beta)(\alpha - \varepsilon)C + (\delta - \alpha)(\alpha - \beta)(\varepsilon - \gamma)A = 0,$$
$$(\delta - \alpha)(\alpha - \beta)(\varepsilon - \gamma)A + (\delta - \varepsilon)(\varepsilon - \beta)(\gamma - \alpha)E = 0,$$

sodass man sofort

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 39. p. 131 u. ff.

$$(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\varepsilon-\gamma)A+(\delta-\gamma)(\gamma-\beta)(\alpha-\varepsilon)C$$
$$+(\delta-\varepsilon)(\varepsilon-\beta)(\gamma-\alpha)E=0$$

als Gleichung des Pols erhält, eine Gleichung, die sich mit Berücksichtigung der den Grössen $l_2\, m_2 \ldots$ in II. ertheilten Werthe als $P_1 - P_2 = 0$, d. h. als die des Punktes Π_3 zu erkennen giebt.

Die Punkte Π *sind aber zugleich auch die Pole der Geraden* g *in Bezug auf die Kegelschnitte* C, S *und* S_1, und brauchen wir dies auch nur wieder für Π_3 und C nachzuweisen. Aus der oben gegebenen Gleichung von C finden wir für die Polare von Π_3 folgende Gleichung:

$$(\lambda_1\mu_5-\lambda_5\mu_1)U+(\mu_1-\mu_5)(\lambda_1^2+\lambda_5^2-\lambda_1\lambda_5)V$$
$$-(\lambda_1-\lambda_5)(\mu_1^2+\mu_5^2-\mu_1\mu_5)W=0,$$

die mit der die Verbindungslinie der imaginären Schnittpunkte unserer drei Kegelschnitte darstellenden $U'=0$ übereinstimmt und von der sich leicht ergiebt, dass sie durch den Schnittpunkt von

$$\{1\,3\}\equiv\lambda_1 V-\mu_1 W=0$$

und

$$\{(1)\,3'\}\equiv-\mu_1 U+\lambda_5(\mu_1-\mu_5)V+\mu_1\mu_5 W=0,$$

sowie den von

$$\{3\,5\}\equiv-\lambda_5 V+\mu_5 W=0$$

und

$$\{3'\,(5)\}\equiv-\lambda_5 U+\lambda_1\lambda_5 V-\mu_1(\lambda_1-\lambda_5)W=0$$

hindurchgeht, also mit der Geraden g identisch ist.

Die Punkte Π_3, Π_2, Π_1 sind demnach die vierten harmonischen zum Punkte $(g\,p)$ in Bezug auf die Schnittpunktpaare unserer Kegelschnitte C, S, S_1 mit der Geraden p.

Auch die Punkte P stehen in einer ebenso einfachen Beziehung zu den Kegelschnitten, *sie sind nämlich Pole der Geraden* 24, *aber* P_1 *in Bezug auf* S, P_2 *in Bezug auf* S_1, P_3 *in Bezug auf* C; denn von der Gleichung der Polare eines Punktes $u\,v\,w$ in Bezug auf den Kegelschnitt S

$$u(-2U+\lambda_5 V+\mu_1 W)+v(\lambda_5 U-(\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_5+\lambda_5\mu_5)W)$$
$$+w(\mu_1 U-(\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_5+\lambda_5\mu_5)V)=0$$

bleibt beim Einsetzen der Coordinaten

$$u:v:w=\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_5+\lambda_5\mu_5:\mu_1:\lambda_5$$

des Punktes P_1 nur das Glied mit U übrig.

In diesen Beziehungen erkennt man demnach die Bedingung, welche zwischen drei durch vier Punkte gehenden Kegelschnitten stattfinden muss, wenn dieselben ein System wie C, S und S_1 bilden können, sowie ferner, dass der Schnittpunkt von 24 und g der gemeinsame Pol der drei Kegelschnitte für die Gerade p ist und sei endlich noch beiläufig bemerkt, dass die von den Kegelschnitten auf p hervorgebrachte Involution, zu der auch die Punkte, worin g und 24 die

Gerade p treffen, gehören, dieselben Doppelpunkte hat, wie die von den Punkten P und Π gebildete, also sämmtliche Punkte nur eine involutorische Reihe bilden.

V.

Wir haben nun noch zu zeigen, dass irgend zwei Punkte ν' und σ'' ein Paar Steiner'sche Gegenpunkte für ein auf dem Kegelschnitt C gelegenes Sechseck 1 2 3 4 5 6, wo 6 den Punkt λ bezeichnen soll, sind, woraus folgt, dass die Punkte λ, ν', σ'' ein Tripel bilden, von dem ein Punkt die sechste Ecke eines auf einem der drei Kegelschnitte gelegenen Sechsecks ist, während die beiden anderen ein zugehöriges Paar Gegenpunkte sind. Hierzu genügt es, wenn wir, da wir wissen, dass für das auf C gelegene Sechseck 1 2 3 4 5 6 der Kegelschnitt S der geometrische Ort eines Steiner'schen Punktes ist, nachweisen, dass *eine* von den diesen Punkt bestimmenden Pascal'schen Linien $1_1\,2\,4$, $(3)\,2\,4$, $5_1\,2\,4$ durch den Punkt $\nu'\varrho'$ geht. Als Gleichung der Linie $1_1\,2\,4$ finden wir folgende:

$$\lambda U - \lambda\lambda_5 - \big(\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + (\mu_1 - \mu_5)\lambda\big)W = 0,$$

und geht dieselbe, da zu λ die Werthe

$$\nu' = \frac{\lambda(\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5)}{\lambda_5\mu_1 - (\lambda_1 - \lambda)\mu_5},$$

$$\varrho' = \frac{(\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5)\big(\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + (\mu_1 - \mu_5)\lambda\big)}{\lambda_5(\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1) + \lambda\lambda_1(\mu_1 - \mu_5)}$$

gehören, aus der Gleichung

$$\begin{gathered}\big\{\big(\lambda_5\mu_1 - (\lambda_1 - \lambda)\mu_5\big)U - \lambda(\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5)V\big\} \\ + k\,\big\{\big(\lambda_5(\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1) + \lambda\lambda_1(\mu_1 - \mu_5)\big)U \\ - (\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5)\big(\lambda_1\mu_5 - \lambda_5\mu_1 + \lambda(\mu_1 - \mu_5)\big)W\big\} = 0,\end{gathered}$$

welche für variabeles k alle durch $\nu'\varrho'$ gehenden Geraden darstellt, bei der Annahme $k = \frac{1}{\lambda_5}$ mit dem Factor $\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5$ behaftet hervor, womit also unsere Behauptung erwiesen ist, *dass nämlich die Punkte ν' und σ'' Steiner'sche Gegenpunkte für den Punkt λ sind.* Für $k = -\frac{\mu_5}{\lambda(\mu_1 - \mu_5)}$ liefert die vorige Gleichung die der Pascal'schen Linie $(3)\,2\,4$, nämlich

$$(\lambda_5\mu_1 - \lambda_1\mu_5)U - \lambda\lambda_1(\mu_1 - \mu_5)V - \lambda\mu_5(\mu_1 - \mu_5)W = 0,$$

aus der, sowie aus der obigen von $1_1\,2\,4$ zu entnehmen ist, dass sich diese Linien um die Punkte 1 resp. (3) drehen, während sich durch Elimination von λ aus denselben

$$S \equiv U^2 - \lambda_5 UV + (\lambda_1\mu_1 + \lambda_5\mu_5 - \lambda_1\mu_5)VW + \mu_1 UW = 0$$

ergiebt und damit auch der analytische Beweis geliefert wird, dass S

der geometrische Ort des Steiner'schen Punktes ist, worin sich $1_1\,2\,4$, $(3)\,2\,4$, $5_1\,2\,4$ schneiden.

Da bekanntlich*) jedes Paar Gegenpunkte ein Paar harmonischer Pole ist für den das Pascal'sche Sechseck enthaltenden Kegelschnitt, so folgt aus der eben bewiesenen Eigenschaft, *dass jede durch einen der Punkte* Π *gehende Gerade das System der drei Kegelschnitte in sechs Punkten schneidet, von denen das eine Paar zu jedem der beiden anderen harmonisch conjugirt ist*, und, wenn wir noch hinzunehmen, dass der Punkt Π der Pol der Geraden g in Bezug auf den einen Kegelschnitt ist, z. B. Π_3 für C, so erkennt man weiter, dass hier eine Involution stattfindet, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von C mit jener Geraden sind.

Damit die Verbindungslinie der zwei Gegenpunkte unseres auf C gelegenen Pascal'schen Sechsecks durch den Punkt Π_3 gehe, ist es nicht erforderlich, dass die Punkte 1 2 3 4 5 sämmtlich fest bleiben, sondern es genügt hierfür schon, dass die Punkte 1 3 5 dieselben bleiben. Um dies nachzuweisen, seien

$$\begin{aligned} A &= 0, \qquad C = 0, \qquad E = 0; \\ B &\equiv l_2 A + m_2 C + n_2 E = 0; \\ D &\equiv l_4 A + m_4 C + n_4 E = 0; \\ F &\equiv l_6 A + m_6 C + n_4 E = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Ecken unseres Sechsecks; die in II. für P_1 und P_2 aufgestellten Gleichungen werden dann auch bei der jetzigen Bedeutung der Grössen $l\,m\,n$ diese Punkte darstellen und wird somit die Gleichung des Punktes Π_3 folgende sein:

$$l_2 l_4 (m_4 n_2 - m_2 n_4) A + m_2 m_4 (n_4 l_2 - n_2 l_4) C + n_2 n_4 (l_4 m_2 - l_2 m_4) E = 0.$$

Analoge Gleichungen für die betreffenden durch die Fünfecke 3 4 5 6 1 und 5 6 1 2 3 bedingten Punkte Π sind hieraus sofort zu entnehmen und ist die Bedingung, dass diese Punkte mit Π_3 zusammenfallen, folgende:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} l_2 l_4 (m_2 n_4 - m_4 n_2), & l_4 l_6 (m_4 n_6 - m_6 n_4), & l_6 l_2 (m_6 n_2 - m_2 n_6) \\ m_2 m_4 (n_2 l_4 - n_4 l_2), & m_4 m_6 (n_4 l_6 - n_6 l_4), & m_6 m_2 (n_6 l_2 - n_2 l_6) \\ n_2 n_4 (l_2 m_4 - l_4 m_2), & n_4 n_6 (l_4 m_6 - l_6 m_4), & n_6 n_2 (l_6 m_2 - l_2 m_6) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante erweist sich aber als das Quadrat eines Ausdrucks δ, der für die verschiedenen aus den Punkten 1 2 3 4 5 6 möglichen Sechsecke unter verschiedenen Formen erscheint, indem z. B. für $1_1\,2\,4$, $(3)\,2\,4$, $5_1\,2\,4$

$$\delta = \begin{vmatrix} l_2 l_4, & m_2 l_4, & l_2 n_4 \\ l_6 n_2, & m_2 n_6, & n_2 n_6 \\ l_6 m_4, & m_4 m_6, & n_4 m_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_2 l_4, & m_2 m_4, & n_2 m_4 \\ l_2 l_6, & l_2 m_6, & n_2 l_6 \\ l_4 n_6, & n_4 m_6, & n_4 n_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_2 n_4, & n_2 m_4, & n_2 n_4 \\ l_2 m_6, & m_2 m_6, & m_2 n_6 \\ l_4 l_6, & m_4 l_6, & l_4 n_6 \end{vmatrix}$$

*) Vgl. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. Thl. p. 164.

ist und dessen Verschwinden bedingt, dass das Sechseck ein Pascal'sches ist. Durch diese Aequivalenz der Bedingungen $\Delta = 0$ und $\delta = 0$ ist also erwiesen, *dass der Punkt* Π_3 *derselbe bleibt, welche Lage* 2 4 6 *auf dem Kegelschnitt auch haben mögen, so lange nur die Punkte* 1 3 5 *sich nicht ändern.*

Es wurde dieses Resultat zuerst von Grossmann (Ueber eine neue Eigenschaft der Steiner'schen Gegenpunkte des Pascal'schen Sechsecks in Crelle's Journal Bd. 58. p. 174) angegeben; selbstverständlich liegt auch der durch das Dreieck 2 4 6 bestimmte Punkt Π auf der Verbindungslinie unserer Gegenpunkte; dass er dem ersteren harmonisch zugeordnet ist bezüglich dieser Gegenpunkte, sowie dass die beiden Punkte Π die sogenannten Pole der Dreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt sind, finden wir in einer durch die Grossmann'sche Untersuchung veranlassten Mittheilung von v. Staudt (Ueber die Steiner'schen Gegenpunkte, welche durch zwei in eine Curve 2ter Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind, Crelle's Journal Bd. 62. p. 142), wobei der Pol eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks definirt wird als der Punkt, worin sich die Geraden schneiden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Polen der Gegenseiten verbinden.

Marburg, Februar 1872.

Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung.

Von A. Clebsch.

In dieser Note will ich eine Methode angeben, mit deren Hülfe die niedrigste Abbildung einer Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene sofort durch rein geometrische Mittel geleistet werden kann, und zwar so, dass sogleich einem Punkte ein Punkt entspricht. Diese Methode ist folgende:

> *Man wähle aus den 27 Geraden der Fläche eine beliebige B und zwei andere A, C aus, welche die erstere aber nicht einander schneiden. Als Bildebene betrachte man eine beliebige durch B gelegte Ebene, und erzeuge das Bild durch einen Strahl, welcher A und C trifft, und also jedesmal einen Punkt der Oberfläche, sowie einen Punkt der Bildebene, dessen Bild, enthält.*

Sei $y = 0$ die Ebene AB, $z = 0$ die Ebene BC, sodann $x = 0$ eine durch A, $t = 0$ eine durch C gehende Ebene. Die Gleichung der Fläche ist dann

$$xz \, . \, P + yz \, . \, Q + yt \, . \, R = 0, \tag{1}$$

wo P, Q, R lineare Ausdrücke in x, y, z, t sind. Setzt man nun

$$\varkappa x = \lambda y, \quad \varkappa t = \mu z, \tag{2}$$

so geht (1) über in

$$\lambda P + \varkappa Q + \mu R = 0. \tag{3}$$

Die drei Gleichungen (2), (3) bestimmen x, y, z, t, die Coordinaten eines Punktes der Fläche, als rationale Functionen dritter Ordnung von $\varkappa$, λ, μ. Ich will nun zeigen, dass letztere die Coordinaten eines sehr einfach bestimmten Punktes der Bildebene, bezogen auf ein in dieser liegendes Coordinatendreieck, sind.

Durch A gehen die festen Ebenen $x = 0$, $y = 0$; die bewegliche Ebene $\varkappa x - \lambda y = 0$ hat einen Parameter $\frac{\lambda}{\varkappa}$, der bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss derselben in Bezug auf $x = 0$, $y = 0$ bedeutet. Die feste sowie die bewegliche Ebene treffe die Bildebene in Strahlen, von denen zwei ($\lambda = 0$ aus $x = 0$ und $\varkappa = 0$ aus $y = 0$) fest sind, während der dritte in Bezug auf beide ein Abstands-

verhältniss hat, dessen Werth von $\frac{\lambda}{\varkappa}$ sich nur um eine Constante unterscheidet. Ebenso gehen durch C die festen Ebenen $t=0$, $z=0$ und die bewegliche $\varkappa t - \mu z = 0$. Sie schneiden die Bildebene in den festen Geraden $\mu = 0$ (aus $t=0$) und $\varkappa = 0$ (aus $z=0$), von denen letztere der Voraussetzung nach mit der oben durch $\varkappa = 0$ bezeichneten Geraden zusammenfällt, und in einer beweglichen Geraden, deren Abstandsverhältniss bezüglich jener beiden bis auf einen constanten Factor den Werth $\frac{\mu}{\varkappa}$ hat. Die Gerade also, in der sich die Ebenen (2) schneiden, trifft die Bildebene in einem Punkte, dessen Abstände von den Linien $\varkappa=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$ sich bis auf constante Factoren wie $\varkappa$, λ, μ, verhalten. Daher kann man $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf dieses Dreieck nennen.

Der Strahl, in welchem die Ebenen (2) sich treffen, geht durch A und C und schneidet die Oberfläche in einem dritten Punkte, für welchen noch die Gleichung (3) stattfindet. Der Bildpunkt $\varkappa$, λ, μ entsteht also auf die im Satze angegebene Weise; und da die Abbildungsfunctionen vom dritten Grade sind, so hat man die niedrigste Abbildung vor sich.

Es ist leicht, die Abbildung genauer zu discutiren. Die Gerade B bildet sich durch sich selbst ab. Auf ihr liegen die Punkte a, c, in welchen sie von den Geraden A, C getroffen wird. Diese sind Fundamentalpunkte der Abbildung, und zwar stellen sie die Geraden dar, welche beziehungsweise mit CB und mit BA ein Dreieck bilden. Die andern vier Fundamentalpunkte findet man, indem man die Geraden sucht, welche A und C treffen und ganz auf der Fläche liegen. Multiplicirt man (3) mit $\varkappa$, und ersetzt dann $\varkappa x$ durch λy, $\varkappa t$ durch μz, so nimmt diese Gleichung die Form

$$\varphi y + \psi z = 0$$

an, wo φ, ψ Functionen zweiten Grades in $\varkappa$, λ, μ sind. Die Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bestimmen die vier Werthsysteme $\varkappa$, λ, μ, welche die vier fehlenden Fundamentalpunkte liefern. Die Geraden AC bilden sich als Kegelschnitte ab, welche durch diese vier Punkte und je einen der Punkte a, c gehen.

Man erkennt, dass jede Abbildung der Fläche in dieser Weise 15mal erzeugt werden kann, indem man die Verbindungslinie irgend zweier ihrer Fundamentalpunkte als Linie B betrachtet, als Linien A, C aber diejenigen, welche Kegelschnitten entsprechen, die nur einen ihrer Fundamentalpunkte und die vier übrigen enthalten. Da nun andererseits jede der 27 Geraden B auf $4 \,.\, 10$ Paare A, C führt, so erhält man als Gesammtzahl aller verschiedenen Abbildungen $\frac{27 \,.\, 40}{15} = 72$, was die bekannte Zahl ist.

Eine Schläfli'sche *Sechs* kann hiernach in folgender Weise definirt werden. Nehmen wir eine Gerade der Fläche B, und zwei andere A, C, welche sie, aber nicht einander schneiden. Sie bestimmen mit der ersteren zwei Dreiecke; die Geraden $A'C'$, welche diese ergänzen, zusammen mit den Geraden, welche sowohl A als C schneiden, bilden den Typus einer Schläfli'schen Sechs. Die zugeordnete Sechs besteht dann natürlich aus A, C und aus den vier Geraden, welche sowohl A' als C' schneiden.

Ich bemerke, dass die hier angegebene Methode auch die einfachste Abbildung einer *geradlinigen* Fläche dritter Ordnung liefert, indem man zur Geraden B die Doppellinie der Fläche, zu A, C irgend zwei Erzeugende nimmt. Ist nach $x = 0$, $t = 0$ die einfache Leitlinie, so ist die Gleichung der Fläche:

$$\alpha y^2 t + \beta yzx + \gamma yzt + \delta z^2 x = 0.$$

Setzt man wieder:

$$\varkappa x = \lambda y, \quad \varkappa t = \mu z,$$

so bleibt:

$$\alpha \mu y + \beta \lambda y + \gamma \mu z + \delta \lambda z = 0,$$

und die Abbildungsgleichungen der Fläche sind also:

$$\begin{aligned}\varrho x &= \lambda(\gamma\mu + \delta\lambda)\\ \varrho y &= \varkappa(\gamma\mu + \delta\lambda)\\ \varrho z &= -\varkappa(\alpha\mu + \beta\lambda)\\ \varrho t &= -\mu(\alpha\mu + \beta\lambda).\end{aligned}$$

Man erhält also die einfachste Abbildung, bei welcher den ebenen Schnitten Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkte entsprechen, der selbst das Bild der einfachen Leitlinie ist.*)

*) Ich ergreife diese Gelegenheit, um bezüglich meiner Abhandlung S. 1 dieses Bandes eine literarische Notiz nachzutragen, welche mir entgangen war. Hr. Armercante hat im 4. Bd. der Annali di Mat. die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$ allgemein auf die Ebene abgebildet, mit Hilfe einer Methode, welche der von mir benutzten durchaus analog ist. Die zuerst erhaltene Abbildung reducirt derselbe mit Hilfe Cremona'scher Transformationen auf möglichst niedrige; aber indem er auf besondere Lagen der Fundamentalpunkte keine Rücksicht nimmt, bei denen die von ihm eingeführten Transformationen illusorisch werden können, erhält er von den bei mir auftretenden Typen nur den in gewissem Sinne allgemeinsten, der auf Abbildungsfunctionen der Ordnung $\frac{n+1}{2}$ bez. $\frac{n+2}{2}$ führt.

Göttingen, den 5. März 1872.

Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von A. Clebsch.

I.

Wie aus den Arbeiten von Hesse seit langer Zeit bekannt ist, können die Punkte einer Curve dritter Ordnung auf drei verschiedene Arten in Punktepaare so geordnet werden, dass zwei Punktepaare (Polenpaare) desselben Systems Ecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen drittes Eckenpaar auf der Curve liegt, und abermals ein Paar desselben Systems ist. Neuerdings hat Hr. Schröter (p. 50 dieses Bandes) auf diese Eigenschaft der Curve dritter Ordnung eine Construction derselben gegründet. Sie leistet an Einfachheit das Aeusserste; von drei Polenpaaren ausgehend, erhält man beliebig viele weitere Punkte der Curve, und zwar jeden als Kreuzungspunkt zweier Geraden, ohne weiterer Hülfslinien zu bedürfen.

Die drei Polenpaare kann man beliebig in der Ebene annehmen. Ich werde hier zeigen, wie man durch die einfachsten analytischen Betrachtungen, auf Hesse's Ausgangspunkt gestützt, aus solchen drei beliebig gegebenen Punktepaaren, welche Polenpaare werden sollen, auf die Curve dritter Ordnung in bestimmter und eindeutiger Weise geführt wird.

Nach Hesse (Crelle's Journal Bd. 28) lässt sich eine Curve dritter Ordnung $f=0$ mit drei anderen Curven dritter Ordnung $\varphi=0$ so in Verbindung setzen, dass die Gleichung $f=0$ erhalten wird, indem man aus den Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\,y_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_1}\,y_2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial x_1}\,y_3&=0\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,y_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\,y_2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial x_2}\,y_3&=0\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3}\,y_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3}\,y_2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}\,y_3&=0
\end{aligned}$$

die x oder die y eliminirt. Nach Hesse bezeichnet man x, y als *Polenpaar*. Die Tangenten in x und y an $f=0$ schneiden sich auf $f=0$ in einem Punkte z; lässt man z sich bewegen, so beschreibt

das Paar x, y die Curve. Von z gehen vier Tangenten nach x, y, u, v an die Curve; das Paar nach u, v gehört derselben Erzeugung wie das Paar nach x, y an; die anderen Combinationen der vier Tangenten zu zwei Paaren liefern Polenpaare die beiden anderen Systeme, und durch continuirliche Bewegung der beiden anderen gleichberechtigten Erzeugungsarten der Curve. Nun sieht man leicht den Satz ein:

Durch drei Polenpaare desselben Systems ist eine Curve $f=0$ vollständig und eindeutig bestimmt, und zwar kann man diese Polenpaare beliebig annehmen.

Es sind nämlich durch drei Punktepaare x, y aus (1) neun Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der Coefficienten von φ gegeben, wodurch denn auch f gegeben ist. Um einzusehen, dass solche neun Gleichungen wirklich von einander unabhängig sind, kann man folgenden Weg einschlagen. Man wähle die drei Punkte y zu Ecken eines Coordinatendreiecks; durch die zugeordneten Punkte x', x'', x''' sind dann aus (1) folgende Gleichungen für φ gegeben:

$$(2) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi(x')}{\partial x_1'^2}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x')}{\partial x_1'\partial x_2'}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x')}{\partial x_1'\partial x_3'}=0\\
&\frac{\partial^2\varphi(x'')}{\partial x_1''\partial x_2''}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x'')}{\partial x_2''^2}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x'')}{\partial x_2''\partial x_3''}=0\\
&\frac{\partial^2\varphi(x''')}{\partial x_1'''\partial x_3'''}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x''')}{\partial x_2'''\partial x_3'''}=0, && \frac{\partial^2\varphi(x''')}{\partial x_3'''^2}=0.
\end{aligned}$$

Sind b_{111}, b_{112} etc. die Coefficienten von φ, so kommen b_{111}, b_{222}, b_{333} nur in den Diagonalgleichungen dieses Systems vor, werden also am Schluss einzeln bestimmt. Es ist dabei nur nöthig, dass x_1', x_2'', x_3''' von Null verschieden seien, d. h. dass niemals der einem y zugeordnete Punkt x auf der Verbindungslinie der beiden anderen y liege. Die übrigen b (abgesehen von b_{123}, durch welches alle anderen b sich ausdrücken) bestimmen sich dann paarweise aus zwei Gleichungen (2), z. B. b_{112} und b_{122} aus

$$\begin{aligned}
b_{112}x_1'+b_{122}x_2'+b_{123}x_3'&=0\\
b_{112}x_1''+b_{122}x_2''+b_{123}x_3''&=0.
\end{aligned}$$

Dabei muss $x_1'x_2''-x_2'x_1''$ von Null verschieden sein; es darf also die Verbindungslinie der zu zwei y gehörigen x nicht durch den dritten Punkt y gehen. Alle Bedingungen für die Ausführbarkeit der Operationen sind erfüllt, wenn man festsetzt, dass von den sechs Punkten der drei Paare niemals drei auf einer Geraden liegen sollen.

Geht man nun von drei gegebenen Paaren 1, 2, 3 aus, so kann man beliebig viele weitere Paare nach dem von Hesse gegebenen Satze construiren, dass die Verbindungslinien zweier Paare sich auf der Curve und zwar in einem neuen Paare schneiden. Man erhält also aus 1, 2 ein neues Paar 4, aus 1, 3 ein neues Paar 5, dann aus 4, 3 ein Paar 6, aus 5, 2 ein neues Paar 7 u. s. w. Und zwar ent-

steht, wie oben erwähnt, jeder neue Punkt durch das Ziehen von zwei Linien, ohne weitere Hülfslinien.

Projicirt man eine gegebene Curve dritter Ordnung so, dass sie von der unendlich fernen Geraden nur in *einem* reellen Punkte geschnitten wird, so besteht entweder aus einem sich nicht durchkreuzenden Zuge, oder es tritt zu letzterem noch ein Oval. Ist ein solches Oval vorhanden, so kann man die Curve mittelst der obigen Construction auf drei Arten erzeugen; bei zweien derselben durchläuft ein Punkt des Paares das Oval, der andere den unendlichen Zug. Bei der dritten Erzeugungsart bilden die Punkte des Ovals eine Schaar von Paaren, die Punkte des unendlichen Zuges eine andere. Fällt das Oval fort, so bleibt daher nur die letzte Erzeugung als einzig reelle bestehen, und eine solche Curve kann nur auf *eine* Art aus reellen Polenpaaren zusammengesetzt werden.

II.

Diesen Erzeugungsarten gegenüber kann man die Grassmann'sche (Crelle's Journal Bd. 36.) eine mechanische nennen. Man kann dieselbe so ausdrücken: Ein Punkt x bewegt sich so, dass seine Verbindungslinien mit festen Punkten a, b, c einzeln drei feste Gerade α, β, γ in drei Punkten schneiden, welche in einer Geraden liegen. Es ist leicht, einen Mechanismus herzustellen, welcher die Curve nach diesem Gesetze wirklich liefert. Von mehr Interesse aber ist die Frage, wie man auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung diejenigen Elemente finden kann, aus welchen sie vermöge des Grassmann'schen Mechanismus entsteht. Hiermit wird dann zugleich gezeigt, dass *jede* Curve dritter Ordnung auf solche Weise erzeugt werden kann.

Zunächst ist sofort ersichtlich, dass bei der Grassmann'schen Erzeugung die Curve durch folgende Punkte geht:

1. durch die Punkte a, b, c;
2. durch die Ebene a', b', c' des Dreiecks α, β, γ;
3. durch die Punkte a'', b'', c'', in welchen die Geraden α, β, γ beziehungsweise von den Geraden bc, ca, ab getroffen werden.

Diese neun Punkte bilden, wie ich zeigen werde, nicht das Schnittpunktsystem zweier Curven dritter Ordnung, und bestimmen daher vollständig die Curve. Wenn man daher auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung eine Configuration, wie die solcher neun Punkte, angeben kann, und man begründet auf dieselben eine Grassmann'sche Erzeugung einer Curve dritter Ordnung, so ist die entstehende immer dieselbe, von der man ausging, und man kann also wirklich alle Curven dritter Ordnung so erzeugen.

Die charakteristische und ausreichende Eigenschaft des erwähnten Punktsystems besteht nun darin, dass abc und $a'b'c'$ zwei Dreiecke

sind, deren Ecken auf der Curve liegen und deren Seiten sich entsprechend in den Punkten $a'' b'' c''$ der Curve schneiden. Sehen wir also die letzteren als beliebig auf der Curve gegeben an, so haben wir die Aufgabe zu lösen:

Es soll ein Dreieck $a\,b\,c$ gefunden werden, dessen Ecken auf der Curve dritter Ordnung liegen und dessen Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte $a'' b'' c''$ gehen.

Hat man zwei Dreiecke dieser Art gefunden, so begründen sie zusammen eine Grassmann'sche Erzeugung der Curve, und zwar auf doppelte Art; denn es ist noch gleichgültig, welches von den beiden Dreiecken man als das Dreieck $a\,b\,c$ und welches man als das Dreieck α, β, γ ansieht. Ich werde zeigen, dass man zu drei Punkten a'', b'', c'' immer vier Dreiecke finden kann; diese bilden sechs Paare, und man hat also den Satz:

Drei beliebig auf der Curve dritter Ordnung gegebene Punkte führen auf zwölf Arten, die Curve nach Grassmann'scher Methode zu erzeugen.

Die oben aufgestellte Aufgabe werde ich mit Hülfe der elliptischen Argumente lösen, deren Anwendung bezüglich der Curven dritter Ordnung ich im 63. Bande von Borchardt's Journal dargelegt habe. Es ist übrigens sehr leicht, die Resultate synthetisch zu beweisen.

Seien $a\,b\,c$, $a'' b'' c''$ zugleich die elliptischen Argumente der ebenso bezeichneten Punkte. Das Congruenzzeichen bedeute, dass der betreffenden Gleichung ganze elliptische Perioden hinzugefügt werden können. Die Bedingungen der Aufgabe sind dann ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$b + c + a'' \equiv 0$$
$$c + a + b'' \equiv 0$$
$$a + b + c'' \equiv 0.$$

Es folgt daraus:

$$a \equiv \frac{a'' - b'' - c''}{2} + \frac{P}{2},$$
$$(1) \qquad b \equiv \frac{b'' - c'' - a''}{2} + \frac{P}{2},$$
$$c \equiv \frac{c'' - a'' - b''}{2} + \frac{P}{2},$$

wo P eine elliptische Periode ist:

$$P = 2\,m\,K + 2\,n\,i\,K'.$$

Da ganze Vielfache von K und iK' den obigen Gleichungen beliebig hinzugefügt werden können, so hat man für m und n nur 0 oder 1 zu setzen und man erhält also, wie oben erwähnt, vier Lösungen.

Es giebt vier Dreiecke, deren Ecken auf der Curve dritter Ordnung liegen, und deren Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte gehen.

Eine zweite Lösung a', b', c' unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass P' an Stelle von P getreten ist. Man hat also

$$a + b + c + a' + b' + c' + a'' + b'' + c'' \equiv \frac{1}{2}(P - P'),$$

und nicht $\equiv 0$. Mithin bilden die neun Punkte, auf welche diese Grassmann'sche Erzeugung oben zurückgeführt wurde, wirklich nicht das Schnittpunktsystem der Curve dritter Ordnung mit einer anderen, und hieraus folgt, wie oben entwickelt, dass die Grassmann'sche Erzeugung auch wirklich immer wieder diese und keine andere Curve liefert.

Wenn die Punkte a'', b'', c'' in gerader Linie liegen, so ist $a'' + b'' + c'' \equiv 0$, und es giebt eine elliptische Periode Π, so dass

$$\frac{a'' + b'' + c''}{2} \equiv \frac{\Pi}{2}.$$

In Folge dessen gehen die Gleichungen (1) über in

$$a \equiv a'' + \frac{P - \Pi}{2}, \quad b \equiv b'' + \frac{P - \Pi}{2}, \quad c \equiv c'' + \frac{P - \Pi}{2}.$$

Von den vier oben gefundenen Lösungen wird demnach *eine* ($P = \Pi$) uneigentlich, indem das entsprechende Dreieck in die Verbindungslinie der drei gegebenen Punkte übergeht. Man erhält also eigentlich nur *drei* Lösungen, wie Herr Hesse im 28. Bande des Crelle'schen Journals gefunden hat; auf dieselben kann man *sechs* Grassmann'sche Erzeugungsarten begründen.

Göttingen, den 4. März 1872.

Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Im 17. Bande der Göttinger Abhandlungen habe ich eine bisher nicht untersuchte Fundamentalfrage der Invariantentheorie behandelt, und erlaube mir, die Resultate der Untersuchung an dieser Stelle kurz zu reproduciren.

Die neuere Algebra behandelt die Theorie der algebraischen Formen, d. h. ganzer Functionen, welche Reihen von n Veränderlichen in homogener Weise enthalten. Diese n Veränderlichen (etwa $x_1, x_2 \ldots x_n$) mögen die Coordinaten eines Punktes x in einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen genannt werden. Ersetzt man in einer homogenen Function f der x mit den Coefficienten a die x durch lineare Functionen der Coordinaten eines veränderlichen Punktes y, so mögen die neuen Coefficienten durch b bezeichnet werden. Ist endlich r die Determinante der linearen Transformation, so betrachtet man diejenigen ganzen Functionen der a und x, welche sich von denselben Functionen der b und y nur um eine Potenz von r unterscheiden, und nennt solche durch eine Gleichung:

$$\Pi(b, y) = r^{\lambda}\,\Pi(a, x) \tag{1}$$

charakteristische Function *Invariante* oder *Covariante*, jenachdem sie von den y, x frei ist oder nicht. Ich werde im Folgenden der Kürze wegen die Bezeichnung *Invarianten* auch für die letzteren in Anwendung bringen, so wie für alle ähnlichen, einer Gleichung (1) genügenden Bildungen verwickelteren Charakters, von denen sogleich die Rede sein wird.

Es ist kein Grund vorhanden, sich auf eine einzige Function zu beschränken, deren Coefficienten bei der Bildung einer Form Π benutzt werden sollen. Aber eben so wenig liegt ein Grund vor, warum man sich auf *eine* Reihe von Coordinaten beschränken soll. Es können die benutzten Grundformen selbst bereits mehr als eine Reihe von Punktcoordinaten enthalten; ausserdem können bei Bildung von Π neue Punkte in die Betrachtung hineingezogen werden; alle aber werden stets *derselben* linearen Transformation unterworfen.

In der Theorie der binären Formen zeigt es sich (vgl. Gordan, diese Annalen Bd. III., p. 360 und meine „Theorie der binären Formen", Leipzig 1872, § 14.), dass es genüge, Grundformen und Invarianten mit höchstens *einer* Reihe von Veränderlichen zu betrachten. Denn die aus Grundformen mit mehreren Reihen entspringenden Invarianten lassen sich immer durch solche ersetzen, die aus einem simultanen Systeme von Grundformen gebildet werden, deren jede nur *eine* Reihe enthält. Ebenso kann jede Invariante mit mehreren Reihen aus solchen mit nur einer Reihe und deren Polaren zusammengesetzt werden. Unter Polaren versteht man dabei die einfachen invarianten Bildungen, welche aus einer Form hervorgehen, wenn man Prozesse wie:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \quad z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots$$

in beliebiger Folge und beliebig oft auf dieselbe anwendet.

Es entsteht die Frage, ob ähnliche Fundamentalsätze für Formen höherer Mannigfaltigkeiten gelten. Um das Resultat, zu welchem ich für diese gelangt bin, ausdrücken zu können, muss ich einige Bemerkungen voranschicken.

Sofern die Veränderlichen $x, y \ldots$ in Bezug auf lineare Transformationen betrachtet werden, ist es von besonderer Wichtigkeit, wenn eine Anzahl von Reihen (k):

$$(1) \qquad \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ y_1 & y_2 \ldots y_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$$

nur in den Verbindungen vorkommen, welche entstehen, wenn man aus irgend k Vertikalreihen die Determinanten bildet. Solche Verbindungen sind in der Geometrie der Ebene für $k = 2$ die Liniencoordinaten, in der Geometrie des Raumes für $k = 2$ Liniencoordinaten, für $k = 3$ Ebenencoordinaten. Bei einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen treten $n - 1$ Classen dieser Art auf, und die gedachten Determinanten, welche durch $q_{i,h,\ldots}$ (k Indices) bezeichnet werden sollen, bezeichne ich als Veränderliche der entsprechenden Classe; dem Werthe $k = 1$ entsprechen die Coordinaten eines Punktes selbst.

Man kann die Classen von Gebilden, welchen diese Coordinaten angehören, und welche hier beziehungsweise durch k Punkte bestimmt sind, noch auf eine zweite, dualistisch entgegengesetzte Art erzeugen. Bezeichnen wir durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Coordinaten eines Gebildes, dessen Coordinaten aus $n - 1$ Reihen x zusammengesetzt sind, entsprechend einer Geraden in der Ebene, einer Ebene im Raum. Bezeichnen wir ferner durch u_x Ausdrücke wie $u_1 x_1 + u_2 x_2 \ldots + u_n x_n$. *Haben wir dann $n - k$ Reihen von u:*

$$(2) \qquad \begin{matrix} u_1 & , & u_2 \dots u_n \\ v_1 & , & v_2 \dots v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

und bestehen zwischen den Reihen (1) (2) *die* $k(n-k)$ *Gleichungen:*

$$\begin{matrix} u_x = 0 & , & u_y = 0, \dots \\ v_x = 0 & , & v_y = 0, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

so sind die aus den $u, v\,..$ *zusammengesetzten* $(n-k)$ *reihigen Determinanten* $p_{\varrho,\sigma,\dots}$ *den* q *einzeln in gewisser Folge proportional,* und zwar ist immer, wenn τ den Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$\tau q_{i,h\dots} = p_{\varrho,\sigma\dots},$$

sobald die Indices $i, h \dots, \varrho, \sigma \dots$ eine positive Permutation der Zahlen $1, 2 \dots n$ bilden. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist die doppelte Darstellungsweise, welche die Coordinaten einer Geraden im Raume zulassen.

Man kann also eine Classe von Veränderlichen gleichzeitig aus k Reihen x, wie aus $n-k$ Reihen u zusammensetzen. Ich bezeichne diese Classe von Veränderlichen als Classe $(k, n-k)$. Die Punkte gehören der Classe $(1, n-1)$, die Veränderlichen u der Classe $(n-1, 1)$ an. Die doppelte Ausdrucksweise der Veränderlichen einer Classe begründet die Art und Weise, in welcher das *Princip der Dualität* in einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen auftritt.

Die Veränderlichen p oder q, welche einem Grundgebilde der Classe $(k, n-k)$ angehören, sind nicht von einander unabhängig, wenn nicht k einen der Werthe 1 oder $n-1$ hat. In allen andern Fällen besteht zwischen diesen Coordinaten eine Anzahl von Beziehungen. Das einfachste Beispiel liefern die Coordinaten einer Geraden im Raume, zwischen denen die bekannte Gleichung:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

stattfindet.

Betrachten wir nun eine Form f, welche beliebig viele Reihen von Veränderlichen aus allen Classen enthält, so tritt zunächst hervor, dass wegen dieser Beziehungen die Gestalt der Form f, ohne dass ihr Wesen sich ändere, mannigfach abgeändert werden kann. Ich beweise nun zunächst, *dass man jeder Form* f *eine gewisse feste Normalform geben kann, und zwar auf eine einzige Weise.* Diese Normalform ist dadurch vollkommen definirt, dass f in derselben gewissen partiellen Differentialgleichungen genügt. Man erhält diese in folgender Weise. Es sei:

$$\Sigma C \,.\, p_{ih\dots} p_{i'h'\dots} p_{i''h''\dots} \dots \dots = 0$$

eine der homogenen Gleichungen, welche zwischen den Veränderlichen

p der betreffenden Classe besteht; die Function f genügt dann in der Normalform in Bezug auf jede in ihr auftretende Reihe von Veränderlichen den betreffenden Gleichungen:

$$(1) \qquad \Sigma C \cdot \frac{\partial^\varrho f}{\partial p_{ik..} \partial p_{i'k'..} \partial p_{i''k''...}} \cdots = 0.$$

Die *Normalform* einer Function f begründet die Einführung einer *symbolischen Bezeichnung,* welche ihr Wesen vollständig ausdrückt. Eine symbolische Bezeichnung setzt an Stelle einer gegebenen Form eine einfachere, zwischen deren Coefficienten genau dieselben *linearen* Beziehungen obwalten, wie zwischen denen der gegebenen Form; höhere Beziehungen sind dabei ganz gleichgültig. Eine symbolische Darstellung ist daher eine gegebene Form in der Normalform zu vertreten fähig, nur und sobald zwischen den symbolischen Coefficienten genau und ausschliesslich dieselben linearen Relationen an und für sich stattfinden, welche durch die Gleichungen (1) für die Normalform bedingt sind. Dies wird erfüllt durch folgende Annahmen:

1. Die symbolische Darstellung der Form f in der Normalform ist ein Produkt von ebensoviel Factoren, als f Reihen von Veränderlichen enthält.

2. Jeder symbolische Factor ist eine Potenz eines linearen Ausdrucks der Veränderlichen der betreffenden Reihe; der Exponent ist die Ordnung, zu welcher die Reihe in f auftritt.

3. Ein solcher linearer Ausdruck ist eine Determinante von n Reihen, zusammengesetzt aus den Reihen x, bez. u, welche die betreffende Reihe von Veränderlichen bilden, und der entsprechenden Zahl symbolischer Coefficienten. Jeder dieser Ausdrücke ist demnach einer doppelten symbolischen Darstellung fähig, jenachdem die betreffende Reihe von Veränderlichen aus Reihen x oder aus Reihen u zusammengesetzt wird.

Solche symbolische Darstellung habe ich im II. Bande dieser Annalen bezüglich der Liniencoordinaten im Raume angegeben, und dort sowie in Nr. 3. der Gött. Nachr. von 1872 Anwendungen davon gemacht.

Von dieser symbolischen Darstellung ausgehend, kann man nun den folgenden Fundamentalsatz beweisen:

Jede Form f, welche beliebig viele Reihen aller Classen enthält, kann aus Polaren solcher Formen φ zusammengesetzt werden, welche aus jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.

Unter dem Ausdruck Polare verstehe ich hier auch bezüglich der Veränderlichen irgend einer Classe (p, bez. p', p''...) Bildungen, welche durch wiederholte Anwendung der Operationen:

$$\Sigma p'_{ik..} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ik..}}, \quad \Sigma p''_{ik..} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ik...}}, \ldots$$

hervorgehen.

Die Formen φ, aus denen f dem Fundamentalsatze gemäss hervorgeht, nenne ich *das reducirte System der Form f.* Der Beweis des Fundamentalsatzes beruht darauf, dass man für zwei Reihen derselben Classe, welche in f vorkommen, das reducirte System bildet, und also f durch ein Formensystem ersetzt, welches gewisse einfachere Eigenschaften besitzt. Indem man dasselbe Verfahren auf jede Form des erhaltenen Systems anwendet, zeigt es sich, dass man sich einer Grenze nähert, in welcher jede Form des Systems höchstens eine Reihe jeder Classe enthält, und dass zugleich die Anzahl der Formen dieses reducirten Systems eine endliche ist.

Die Form f steht mit dem reducirten Systeme der φ in dem besondern Zusammenhange, dass sowohl alle φ Invarianten von f sind, als auch umgekehrt f eine simultane Invariante der φ. In Folge dessen ist überhaupt jede Invariante von f auch eine solche der φ. Man zieht also die Folgerung, dass alle Invarianten von Formen mit beliebig vielen Reihen aus simultanen Formen erzeugt werden können, deren jede höchstens *eine* Reihe jeder Classe enthält. Für die allgemeine Auffassung der Invariantentheorie entspringt hieraus eine Begrenzung des Gegenstandes, welche von höchster Wichtigkeit ist. *Um alle Bildungen, welche die Invariantentheorie innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen überhaupt zulässt, untersucht zu haben, genügt es, solche Grundformen zu betrachten, welche von jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.*

Die zu betrachtenden Grundformen innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen zerfallen daher in 2^{n-1} Classen, von denen die erste keine Reihe von Veränderlichen, die andere mehr oder weniger von solchen, die letzte alle enthalten. Bei den binären Formen erhält man ausser Constanten nur Functionen einer Reihe; bei ternären Formen ergeben sich Grundformen, deren vier Classen genau den vier in der ternären Formentheorie üblichen Bezeichnungen der Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen entsprechen. Für quaternäre Formen erhält man 8 Classen, von denen die meisten noch niemals betrachtet sind, welche sich aber hier als nothwendig und unumgänglich erweisen.

Noch wichtiger darf man wohl das Resultat nennen, welches hierdurch für die Begriffsbestimmung der Invarianten an sich gewonnen ist. Als Aufgabe der Invariantentheorie darf man es in einem gewissen Sinne bezeichnen, alle Invarianten einer Form oder eines Formensystems zu finden, durch welche, und durch deren Polaren, alle Invarianten dieser Form oder dieses Formensystems als ganze Functionen darstellbar sind. Durch den obigem Satz ist nun gezeigt, dass Invarianten mit mehreren Reihen derselben Classe sich immer auf solche zurückführen lassen, welche aus jeder Classe höchstens eine

Reihe enthalten. *Daher können wir nunmehr die Betrachtung der Invarianten einer Form oder eines Formensystems von vorn herein auf solche beschränken, welche aus jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.* Andererseits aber erkennt man auch die Nothwendigkeit diese 2^{n-1} Classen von Invarianten in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Für ternäre Formen ist dies längst geschehen, wenn auch nicht mit dem principiellen Bewusstsein, dass damit alles umfasst sei. Aber anders bei den quaternären Formen; und die relative Unvollkommenheit ihrer Theorie darf wohl wesentlich durch diesen Umstand erklärt werden.

Man kann die Reduction, welche in der Einführung des reducirten Systems liegt, noch einen Schritt weiter führen. Bezeichnen wir als *conjugirte Reihen* in einer Form des reducirten Systems solche, welche den Classen $(k, n-k)$ und $(n-k, k)$ angehören, und bezeichnen wir die Veränderlichen dieser Reihen durch p und q, so können wir noch jede Form des reducirten Systems auf eine Anzahl von solchen zurückführen, welche in Bezug auf jedes Paar conjugirter Reihen die Gleichung:

$$0 = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_{ik\ldots}\, \partial q_{ik\ldots}} \tag{2}$$

befriedigen. Das System, welches auf diese Weise entsteht, nenne ich das *eigentlich reducirte.* Es folgt wie im Vorigen, dass man sich in der Theorie der algebraischen Form insbesondere auf die Untersuchung solcher Formen und Invarianten beschränken darf, welche aus jeder Classe nur eine Reihe enthalten, und welche überdies die Gleichungen (2) befriedigen.

Es entsteht hier nun eine Frage, welche ich in Bezug auf ternäre Formen beantwortet habe; in wie weit nämlich, wenn man die Coefficienten von f als von einander unabhängig voraussetzt, auch die Coefficienten der Formen des eigentlich reducirten Systems von einander unabhängig seien, abgesehen natürlich von den durch (2) ausgesprochenen linearen Bedingungen. Für ternäre Formen habe ich bewiesen, dass in der That die Coefficienten des eigentlich reducirten Systems übrigens von einander unabhängig sind. Bei ternären Formen ist also die Theorie einer Form f mit beliebig vielen Reihen von Punkt- und Liniencoordinaten nicht nur individuell, sondern auch generell durch die eines mit entsprechenden Ordnungszahlen übrigens beliebig gebildeten simultanen Systems ersetzbar, dessen Formen sämmtlich höchstens eine Reihe von Punkt- und Liniencoordinaten enthalten und in Bezug auf dieselben die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial u_3} = 0 \tag{3}$$

befriedigen. Man bildet dies System auf folgende Art.

1. Enthält f nur eine Reihe von x und eine Reihe von u, so bildet man die Formen:

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial u_3}$$
$$\delta^2 f = \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_3 \partial u_3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und bestimmt sodann die Zahlen $\alpha, \beta \ldots$ so, dass die Formen:

$$\varphi = f + \alpha u_x \delta f + \beta u_x^2 \delta^2 f \ldots$$
$$\varphi_1 = \delta f + \alpha' u_x \delta^2 f + \beta' u_x^2 \delta^3 f \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

sämmtlich der Gleichung (3) genügen. Die $\alpha, \beta \ldots$ sind hierdurch völlig und eindeutig bestimmt (siehe Gordan, diese Annalen Bd. V., p. 103). Die Formen φ bilden das eigentlich reducirte System.

2. Enthält f nur zwei gleichartige Reihen, etwa x und y, so kann man symbolisch setzen:

$$f = a_x^m \, b_y^n.$$

Die Formen des eigentlich reducirten Systems sind dann:

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (a b u), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (a b u)^2, \text{ etc.}$$

3. Enthält f mehr als zwei Reihen, so sind unter diesen mindestens zwei gleichartig. In Bezug auf diese ersetzt man f durch dieselben Formen wie unter 2. Die so entstandenen Formen behandelt man in gleicher Weise bezüglich irgend zweier in ihnen auftretender gleichartiger Reihen weiter, und gelangt so endlich zu einem eigentlich reducirten Systeme. Aus demselben fallen nur verschiedene Formen fort, weil die Formen φ unter 2. schon die besondere Eigenschaft haben, der Gleichung (3) in Bezug auf die Reihen x, u zu genügen. Die Fortsetzung der hier zu leistenden Operationen führt daher auf die folgende Aufgabe, durch deren Lösung alles erledigt ist:

Eine Form f enthält drei Reihen x, y, u, und genügt in Bezug auf x und u der Gleichung (3). *Man soll das eigentlich reducirte System von f angeben.*

Es sei symbolisch:

$$f = a_x^m \, b_y^n \, u_\alpha^p;$$

der Umstand, dass f der Gleichung (3) genügt, wird dadurch ausgedrückt, dass alle mit dem symbolischen Factor a_α behafteten Glieder ausgelassen werden können. Ein reducirtes System von f ist:

$$(4)\ \varphi_0 = a_x^m b_x^n u_\alpha^p, \ \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} u_\alpha^p (a b u), \ \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} u_\alpha^p (a b u)^2 \ldots$$

Man erhält das eigentlich reducirte, wenn man jede dieser Formen wie oben unter 1. behandelt. Dabei aber ist zu bemerken, dass:

$$\delta^{\varkappa}\,\varphi_{\lambda}=\delta^{\varkappa}\left\{a_x^{m-\lambda}\,b_x^{n-\lambda}\,u_\alpha^{p}\,(a\,b\,u)^{\lambda}\right\}$$

verschwindet, sobald $\varkappa$ grösser als eine der Zahlen $n-\lambda$ oder p wird, wodurch die Anzahl der dem eigentlich reducirten Systeme angehörigen Formen sich vermindert.

Als Anwendung dieser Principien gebe ich die Reduction einer Form f, welche drei Reihen x, y, u, jede quadratisch und in allgemeiner Weise enthält. Es sei symbolisch:

$$f=a_x^2\,b_y^2\,u_\alpha^2.$$

Nach 2. erhält man in Bezug auf die Reihen x, y das eigentlich reducirte System:

$$\varphi=a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2,\quad \psi=a_x b_x u_\alpha^2(a\,b\,v),\quad \chi=u_\alpha^2(a\,b\,v)^2.$$

Von diesen Formen gehört φ schon dem (nicht eigentlich) reducirten Systeme an; χ giebt nach 2. die Formen:

$$\varphi_1=u_\alpha^2(a\,b\,u)^2,\quad \varphi_2=u_\alpha(a\,b\,u)\,(a_x b_\alpha-b_x a_\alpha),\quad \varphi_3=(a_x b_\alpha-b_x a_\alpha)^2.$$

Endlich genügt die Form ψ in Bezug auf die Reihen x, v der Gleichung (3); ihr reducirtes System ist also nach (4):

$$\varphi_4=a_x b_x u_\alpha^2(a\,b\,u),\quad \varphi_5=a_x b_x u_\alpha(a_\alpha b_x-b_\alpha a_x).$$

Das reducirte System von f besteht also aus den folgenden Formen mit den beigesetzten Ordnungen und Classen:

Form.	Ordnung.	Classe
φ	4	2
φ_1	0	4
φ_2	1	2
φ_3	2	0
φ_4	2	3
φ_5	3	1

Wenn die Coefficienten von f von einander unabhängig sind, so sind auch die Coefficienten dieser Formen von einander unabhängig, nur dass φ_2 der Gleichung $\delta\varphi_2=0$ genügt. Bei der Bildung des eigentlich reducirten Systems, dessen Formen dann sämmtlich der Gleichung $\delta\varphi=0$ genügen, bleiben φ_1, φ_2, φ_3 ungeändert. Dagegen wird φ durch drei Formen φ' (Ordnung 4, Classe 2), φ'' (Ordnung 3, Classe 1), φ''' (Ordnung 2, Classe 0), φ_4 durch drei Formen φ_4' (Ordnung 2, Classe 3), φ_4'' (Ordnung 1, Classe 2), φ_4''' (Ordnung 0, Classe 1), endlich φ_5 durch zwei Formen φ_5' (Ordnung 3, Classe 1) und φ_5'' (Ordnung 2, Classe 0) ersetzt. Die Zahl der von einander unabhängigen Coefficienten dieser Formen ist in der That 216, gleich der Zahl der Coefficienten von f.

Göttingen, den 8. März 1872.

Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe.

Von A. Clebsch in Göttingen.

In einem frühern Aufsatze (Annalen Bd. II., p. 1) habe ich bewiesen, dass die Gleichung eines Complexes jedesmal in einer und nur in einer Weise in eine Form gebracht werden kann, welche der symbolischen Darstellung

$$(abxy)^n = 0 \text{ oder } (u_a v_b - v_a u_b)^n = 0$$

oder der gleichbedeutenden Darstellung

$$(\alpha\beta uv)^n = 0 \text{ oder } (\alpha_x\beta_y - \beta_x\alpha_y)^n = 0$$

fähig ist.

Betrachtet man in diesen Formeln x und u als constant, y und v als veränderlich, so stellen sie den Complexkegel des Punktes x, beziehungsweise die Complexcurve der Ebene u dar.

Um die Gleichungen der zu einer Geraden y, z oder u, v gehörigen Complexfläche zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Die Complexfläche ist der Ort der Durchschnitte unendlich naher Complexkegel, welche ihre Spitzen auf der Geraden haben. Ist $y + \lambda z$ irgend ein Punkt der Geraden y, z, so ist sein Complexkegel

$$((abxy) + \lambda(abxz))^n = 0,$$

und man erhält den Ort der Durchschnitte nächster Complexkegel, indem man die Discriminante dieser Gleichung nach λ gleich Null setzt. Nun ist die Discriminante, nach λ genommen, für die Gleichung

$$(p_y + \lambda p_z)^n$$

nichts anderes als die Gleichung der Fläche $p_y^n = 0$ in Liniencoordinaten; um sie zu erhalten, bildet man zunächst die Discriminante einer binären Form n^{ten} Grades in ihrer symbolischen Form; sie sei, indem p, p'... die vorkommenden Symbole, die C aber numerische Constanten bedeuten:

$$\Sigma C \Pi (pp').$$

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1872. Nr. 3.

Sodann ersetzt man die symbolischen Determinanten (pp') durch die Determinanten $p_y p'_z - p_z p'_y$. Die fragliche Gleichung ist also

$$\Sigma C \Pi (p_y p'_z - p_z p'_y) = 0.$$

In dieser bleibt nur noch p_y durch $(abxy)$ etc. zu ersetzen. Demnach wird die *Gleichung der zu der Geraden y, z gehörigen Complexfläche* in Punktcoordinaten:

$$(1) \qquad \Sigma C \Pi [(abxy)(a'b'xz) - (abxz)(a'b'xy)] = 0 \text{ *)}.$$

Die Zahl der symbolischen Reihenpaare ab, $a'b'$... ist, wie der Grad der Discriminante einer binären Form n^{ter} Ordnung, gleich $2(n-1)$, während jedes Reihenpaar $n$mal auftritt. Die Gleichung (1) ist also von der Ordnung $2n(n-1)$ in den x, und dies liefert den von Plücker gegebenen Satz:

Die Complexflächen eines Complexes n^{ter} Ordnung sind von der Ordnung $2n(n-1)$.

Die Coordinaten eines Punktes y der gegebenen Geraden kommen nur in je $n(n-1)$ Determinantenfactoren vor, und alle diese Factoren verschwinden, wenn man die y den x gleich setzt. Dies giebt also der Satz Plückers:

Die gegebene Gerade ist $n(n-1)$ fache Gerade ihrer Complexfläche.

Denken wir uns aber x gegeben, während y und z sich bewegen können, so ergiebt sich aus (1) sofort folgender Satz:

Die Linien, deren Complexflächen durch einen gegebenen Punkt x des Raumes gehen, bilden einen Complex $n(n-1)^{ten}$ Grades,

nämlich den Tangentencomplex des Complexkegels von x.

Ersetzen wir die sämmtlichen soeben angestellten Betrachtungen

---

*) Nach einer Bemerkung von Hrn. Klein giebt diese Gleichung zugleich die Brennfläche der Congruenz, welche ein Complex n^{ten} Grades mit einem linearen gemein hat, sobald man nur unter y, z nicht mehr die Coordinaten von Punkten, sondern die symbolischen Coefficienten des linearen Complexes versteht. Dies gestattet eine interessante Anwendung auf die Kummer'sche Fläche, da dieselbe Brennfläche der Congruenz ist, welche ein Complex zweiten Grades mit einem linearen Complexe gemein hat. Für sie ergiebt sich nämlich die symbolische Gleichungsform:

$$[(abxA)(a'b'xB) - (abxB)(a'b'xA)]^2 = 0,$$

wo a, b und a', b' symbolische Coefficienten des Complexes zweiten Grades, A, B solche des linearen Complexes sind. Und zwar ergiebt sich diese Form auf 6 verschiedene Arten, da die Kummer'sche Fläche immer gleichzeitig für 6 verschiedene derartige Congruenzen Brennfläche ist.

durch ihre dualistischen Gegensätze, so erhalten wir als Gleichung der zu der Geraden v, w gehörigen Complexfläche in Ebenencoordinaten:

$$(2) \qquad \Sigma C \Pi [(\alpha \beta u v)(\alpha' \beta' u w) - (\alpha \beta u w)(\alpha' \beta' u v)] = 0.$$

Dies giebt zunächst die Sätze Plückers:

Die Complexflächen eines Complexes n^{ten} Grades sind von der Classe $2n(n-1)$;

Die gegebene Gerade ist Axe eines $n(n-1)$ fach berührenden Büschels von Tangentenebenen für ihre Complexfläche;

sodann aber den Satz:

Die Linien, deren Complexflächen eine gegebene Ebene berühren, bilden einen Complex $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades,

nämlich den Complex der Geraden, welche die Complexcurve von u schneiden.

Für $n = 2$ sind die Gleichungen (1), (2) in der angeführten Note bereits gegeben. Für $n = 3$ hat man nach der bekannten Bildung der Discriminante einer binären cubischen Form als Gleichung der Complexfläche in Punktcoordinaten:

$$\begin{aligned} &[(a b x y)(a' b' x z) - (a' b' x z)(a b x y)]^2 \\ &. [(a'' b'' x y)(a''' b''' x z) - (a'' b'' x z)(a''' b''' x y)]^2 \\ &. [(a b x y)(a'' b'' x z) - (a b x z)(a'' b'' x y)] \\ &. [(a' b' x y)(a''' b''' x z) - (a' b' x z)(a''' b''' x y)] = 0. \end{aligned}$$

Für $n = 4$ aber nimmt die Gleichung die Form an

$$I^3 - 6J^2 = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} I &= [(a b x y) \cdot (a' b' x z) - (a b x z)(a' b' x y)]^4 \\ J &= [(a b x y)(a' b' x z) - (a b x z)(a' b' x y)]^2 \\ &. [(a\, b x y)(a'' b'' x z) - (a\, b\, x z)(a'' b'' x y)]^2 \\ &. [(a' b' x y)(a'' b'' x z) - (a' b' x z)(a'' b'' x y)]^2. \end{aligned}$$

Da in der Theorie binärer Formen $I = 0$ anzeigt, dass vier Elemente äquianharmonisch, $J = 0$, dass sie harmonisch liegen, so ist $I = 0$ die Gleichung der Fläche, deren Punkte Complexkegel haben, welche von der Geraden y, z in äquianharmonischen Punkten geschnitten werden, und $J = 0$ die Gleichung der Fläche, bei welcher entsprechend ein harmonischer Schnitt eintritt. Man hat also folgende Sätze:

Die Punkte, deren Complexkegel bezüglich eines Complexes 4ten Grades von einer gegebenen Geraden y, z äquianharmonisch bez. harmonisch getroffen werden, bilden eine Fläche 8ter, bez. 12ter Ordnung, welche die Gerade y, z zur 4fachen, bez. 6fachen Geraden hat. Die Geraden, welche den Complexkegel eines gegebenen Punktes x bezüglich eines Complexes 4ten Grades äqui-

anharmonisch, bez. harmonisch schneiden, bilden Complexe 4ten, *bez.* 6ten *Grades.*

Ebenso, indem man diese Sätze dualistisch überträgt:

Die Ebenen, an deren Complexcurven bezüglich eines Complexes 4ten *Grades von einer gegebenen Geraden aus äquianharmonische, bez. harmonische Büschel von Tangentenebenen gehen, umhüllen eine Fläche* 8ter, *bez.* 12ter *Classe, für welche die durch jene Gerade gehenden Ebenen ein Büschel 4fach, bez. 6fach berührender Tangentenebenen sind.*

Die Geraden, von welchen an die Complexcurve einer Ebene u *bezüglich eines Complexes* 4ten *Grades äquianharmonische, bez. harmonische Tangentenebenen gehen, bilden Complexe* 4ten, *bez.* 6ten *Grades.*

Man kann diese Sätze als besondere Fälle der folgenden betrachten:

Die Punkte, deren Complexkegel bezüglich eines Complexes n^{ten} *Grades von einer gegebenen Geraden in einem Punktsystem geschnitten werden, für welches eine Invariante* k^{ten} *Grades verschwindet, bilden eine Fläche der Ordnung* kn, *welche jene Gerade zur* $\frac{kn}{2}$-*fachen Geraden hat.*

Die Geraden, welche den Complexkegel eines gegebenen Punktes x *bezüglich eines Complexes* n^{ten} *Grades in einem Punktsysteme schneiden, für welches eine Invariante* k^{ten} *Grades verschwindet, bilden einen Complex* $\frac{kn}{2}^{\text{ten}}$ *Grades.*

Die Ebenen, an deren Complexcurven bezüglich eines Complexes n^{ten} *Grades von einer gegebenen Geraden ein Büschel von Tangentenebenen geht, für welche eine Invariante* k^{ten} *Grades verschwindet, umhüllen eine Fläche* kn^{ten} *Grades, welche das Büschel der durch jene Gerade gehenden Ebenen zu* $\frac{kn}{2}$ *fachen Tangentenebenen hat.*

Die Geraden, von welchen an die Complexcurve einer Ebene u *bezüglich eines Complexes* n^{ten} *Grades ein Büschel von Tangentenebenen geht, für welches eine Invariante* k^{ten} *Grades verschwindet, bilden einen Complex* $\frac{kn}{2}^{\text{ten}}$ *Grades.*

Die Singularitätenfläche eines Complexes n^{ten} Grades*) entsteht auf doppelte Weise. Entweder entsteht sie als Ort derjenigen Punkte, deren Complexkegel eine Doppelkante hat, oder als Ort derjenigen

---

*) Der Begriff einer solchen, welchen Plücker für Complexe 2ten Grades aufgestellt hatte, gab für allgemeine Complexe zuerst Pasch (Habilitationsschrift, Giessen 1870).

Ebenen, deren Complexcurve eine Doppeltangente hat. Für Complexe 2ten Grades ist die Singularitätenfläche in Punkt- und Ebenencoordinaten in meinem angeführten Aufsatze gegeben. Für ein beliebiges n erhält man die Singularitätenfläche auf folgende Weise.

Bezeichnen wir eine Curve n^{ter} Ordnung symbolisch durch

$$\gamma_x^n = \gamma'^n_x \cdots = 0;$$

ihre Discriminante (welche, gleich Null gesetzt, die Bedingung des Doppelpunkts liefert) sei in symbolischer Form durch

$$\Delta = \Sigma C \,.\, \Pi(\gamma\gamma'\gamma'')$$

dargestellt. Der Grad der Discriminante ist $3(n-2)^2$; daher ist ebenso gross die Zahl der in Δ auftretenden Symbolreihen, und die Zahl symbolischer Determinantenfactoren in jedem Terme von Δ ist $n(n-1)^2$.

Man erhält hieraus die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung

$$f = \gamma_x^n = \gamma'^n_x \cdots = 0$$

in Ebenencoordinaten in der Form

$$F = \Sigma C \,.\, \Pi(\gamma\gamma'\gamma'' u)$$

dargestellt; sie ist in den u vom Grade $n(n-1)^2$, also von der Classe $n(n-1)^2$.

Ist aber $f = 0$ ein Kegel, so geht $F = 0$ in eine Constante M über, multiplicirt mit der Gleichung der Spitze, erhoben zur Potenz $n(n-1)^2$, also hat man, wenn x diese Spitze ist,

$$F = M \,.\, u_x^{n(n-1)^2}.$$

Es ist leicht, dies an dem Complexkegel eines Complexes n^{ten} Grades zu verfolgen. Die Gleichung desselben ist

$$(\alpha_x\beta_y - \beta_x\alpha_y)^n = 0$$

wo die y die laufenden Coördinaten sind. Setzt man dies gleich γ_y^n, so ist

$$\gamma_i = \alpha_x\beta_i - \beta_x\alpha_i, \quad \gamma_x = 0.$$

Daher wird

$$\begin{aligned}(\gamma, \gamma', \gamma'', u) &= (\alpha_x\beta - \beta_x\alpha, \gamma', \gamma'', u)\\ &= \alpha_x(\beta, \gamma', \gamma'', u) - \beta_x(\alpha, \gamma', \gamma'', u),\end{aligned}$$

oder, nach bekannten Sätzen:

$$= \gamma''_x(\alpha, \beta, \gamma', u) - \gamma'_x(\alpha, \beta, \gamma'', u) - u_x(\alpha, \beta, \gamma', \gamma''),$$

oder endlich, da $\gamma'_x = 0$, $\gamma''_x = 0$:

$$= -(\alpha, \beta, \gamma', \gamma'') \,.\, u_x.$$

Der Factor von u_x ist nur scheinbar unsymmetrisch in Bezug auf die drei in ihm vorkommenden Symbolpaare; ich werde ihn, um die

Unsymmetrie des Ausdrucks zu vermeiden, durch [0, 1, 2] bezeichnen, so dass

$$[0, 1, 2] = -(\alpha, \beta, \alpha'_x\beta' - \beta'_x\alpha', \alpha''_x\beta'' - \beta''_x\alpha'')$$

ist, und bis aufs Vorzeichen gleich den Ausdrücken, welche durch Vertauschung der Symbolpaare aus diesem hervorgehen.

Es wird sonach für den Complexkegel

$$F = u_x^{n(n-1)^2} \,.\, \Sigma C \,.\, \Pi[0, 1, 2] = M \,.\, u_x^{n(n-1)^2},$$

wo

$$M = \Sigma C \Pi [0, 1, 2].$$

Wenn nun eine Ebene den Kegel einer Curve mit Doppelpunkt schneiden kann, ohne durch die Spitze zu gehen, so muss er eine Doppelseite besitzen, so dass eben dieses für *jede* Ebene eintritt. Es muss dann also F verschwinden, ohne dass $u_x = 0$, d. h. es muss $M = 0$ sein.

Es ist also $M = 0$ die Gleichung der Singularitätenflächen in Punktcoordinaten, und ganz ebenso wird ihre Gleichung in Ebenencoordinaten gebildet. Da jeder Factor der symbolischen Produkte in M vom 2ten Grade in den x ist, so ist M überhaupt in den x vom Grade $2n(n-1)^2$, und man hat also den Satz:

Die Singularitätenfläche eines Complexes n^{ter} Ordnung ist von der Ordnung und Classe $2n(n-1)^2$.

Wenden wir das Obige auf Complexe 3ten Grades an, und erwägen wir, dass die Doppelpunktsbedingung einer Curve 3ter Ordnung von der Form $T^2 - S^3 = 0$ ist, so sehen wir, dass die Singularitätenfläche, welche hier von der 24ten Ordnung und Classe ist, in Punktcoordinaten durch eine Gleichung der Form $T^2 - S^3 = 0$, und ebenso in Ebenencoordinaten durch eine Gleichung $\mathrm{T}^2 - \Sigma^3 = 0$ dargestellt wird. Die Fläche besitzt also eine Rückkehrcurve 96ter Ordnung, welche der Schnitt der Flächen 12ter und 8ter Ordnung $T = 0$, $S = 0$ ist, und in welcher die Tangentenebenen die Fläche $T = 0$ berühren; und sie besitzt eine parabolische Curve, deren Tangentenebenen eine abwickelbare Fläche 96ter Classe bilden, welche die gemeinsame Developpable der Flächen 12ter und 8ter Classe $\mathrm{T} = 0$, $\Sigma = 0$ ist, und deren Punkte zugleich der Fläche $\mathrm{T} = 0$ angehören.

Indem man es versucht, die hier auftretenden Flächen $S = 0$, $T = 0$, $\Sigma = 0$, $\mathrm{T} = 0$ unabhängig von der obigen Betrachtung an und für sich zu definiren, bemerkt man, dass die eben ausgeführte Aufsuchung der Singularitätenfläche nur eine besondere Anwendung einer allgemeinen Methode ist, welche zu einer Classe covarianter Flächen eines Complexes n^{ten} Grades führt.

Stellen wir die Bedingung auf, unter welcher eine Curve n^{ter} Ord-

nung eine gewisse Invarianteneigenschaft besitzt, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\Sigma C \,.\, \Pi(\gamma \gamma' \gamma'') = 0.$$

Die Anzahl der darin vorkommenden symbolischen Reihen sei k, so dass die fragliche Invariante vom k^{ten} Grade ist. Die Ebenen, welche eine Fläche n^{ter} Ordnung in Curven mit der betreffenden Invarianteneigenschaft schneiden, sind durch die Gleichung

$$\Sigma C \,.\, \Pi(\gamma \gamma' \gamma'' u) = 0$$

gegeben, und dieselben umhüllen daher eine Fläche $\frac{kn}{3}^{\text{ter}}$ Classe. Ist aber die Fläche n^{ter} Ordnung ein Kegel, so nimmt diese Gleichung die Form

$$M \,.\, u_x^{\frac{kn}{3}} = 0$$

an, wo die x die Coordinaten der Kegelspitze sind. Indem wir dies auf die Complexkegel eines Complexes n^{ten} Grades anwenden, zeigt es sich, wie oben, dass diejenigen Complexkegel, deren ebene Schnitte die fragliche Invarianteneigenschaft besitzen, durch die Gleichung

$$M = \Sigma C \,.\, \Pi[0,\ 1,\ 2] = 0$$

gegeben sind. Die Gleichung ist vom Grade $\frac{2kn}{3}$ in den x; und man hat also den Satz:

Die Spitzen aller Complexkegel eines Complexes n^{ten} Grades, deren ebene Schnitte eine Invarianteneigenschaft besitzen, welche durch das Verschwinden einer Invariante k^{ten} Grades einer Curve n^{ter} Ordnung gegeben wird, bilden eine Fläche von der Ordnung $\frac{2kn}{3}$.

Diesem Satze entspricht dualistisch der folgende:

Die Ebenen, deren Complexcurven in Bezug auf einen Complex n^{ten} Grades eine Invarianteneigenschaft besitzen, welche durch das Verschwinden einer Invariante k^{ten} Grades einer Curve n^{ter} Classe gegeben wird, umhüllen eine Fläche $\frac{2kn}{3}^{\text{ter}}$ Classe.

Man erhält hieraus sofort die Definitionen der gedachten vier Flächen, welche bei den Complexen 3ten Grades auftreten, indem man die durch die Gleichungen $S = 0$ bez. $T = 0$ ausgedrückten Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung und Classe einführt.

Göttingen, den 24. Januar 1872.

Ueber die Wendepunktdreiseite einer Curve dritter Ordnung.

Von GUNDELFINGER in TÜBINGEN.

Das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ kommt bekanntlich darauf hinaus, in den drei Gleichungen

$$x_i = x_i^{(k)} X_1 + x_i^{(2)} X_2 + x_i^{(3)} X_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

die 9 Substitutionscoefficienten $x_i^{(k)}$ so zu bestimmen, dass f die Form annimmt:

$$f = a(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) + 6b X_1 X_2 X_3.$$

In Band II. dieser Annalen S. 382 ff. löst Prof. Clebsch diese Aufgabe, indem er die linearen Ausdrücke X_i durch Covarianten ausdrückt und somit die „inversen" Substitutionscoefficientenendgiltig berechnet. Die *directe* Berechnung der $x_i^{(k)}$ kann man nach der allgemeinen Theorie des Herrn Aronhold am besten vermittelst Contravarianten an die Darstellung der Ausdrücke U_i anknüpfen, welche mit den Coordinaten u_i irgend einer Geraden durch folgende Relationen zusammenhängen:

$$U_i = x_1^{(i)} u_1 + x_2^{(i)} u_2 + x_3^{(i)} u_3 \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese beiden Auflösungsarten empfehlen sich besonders dann, wenn man die Substitutionscoefficienten selbst und nicht bloss deren Verhältnisse kennen, wenn man also das obige Transformationsproblem algebraisch *vollständig* durchführen will. Zur Bestimmung der Wendepunkte von $f = 0$ reicht es jedoch hin, die *Verhältnisse* der $x_i^{(k)}$ zu finden, indem man nur die Gleichungen der einzelnen Seiten:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

oder der einzelnen Scheitel

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

aufzustellen hat. In diesem Sinne möchte vielleicht vor den beiden vorhergehenden Methoden der Wendepunktbestimmung eine dritte den Vorzug verdienen, welche jede Seite und die ihr gegenüberliegende Ecke eines Wendepunktsdreiseits gleichzeitig vermittelst Zwischenformen finden lehrt und welche in den Resultaten meiner Abhandlung über die Ausartungen der Curven dritter Ordnung enthalten ist. Diese letztere Methode gestattet es auch, die Anzahl der reellen und imaginären Wendepunktsdreiseite *rein analytisch* abzuleiten*).

Die Zusammenstellung der Formeln, die sich auf die Bestimmung der U_i durch Contravarianten beziehen, sowie die Discussion, die sich an die dritte Auflösungsmethode knüpft, bilden den Inhalt der folgenden Mittheilung.

I.

Berechnung der Substitutionscoefficienten vermittelst zugehöriger Formen.

Bezeichnen wir nach Vorgang von Clebsch a^4+8ab^3 mit Γ und die Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(3)}$ mit r, so hat man für die zugehörigen Formen P_f und R_f folgende Beziehungen**)

$$r^{10} P_f = \Gamma^2 \left\{6a\, U_1 U_2 U_3 - 2b(U_1^3+U_2^3+U_3^3)\right\}$$

$$r^{12} R_f = \Gamma^2 \left\{-\tfrac{3}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial b} U_1 U_2 U_3 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial a}(U_1^3+U_2^3+U_3^3)\right\},$$

oder aufgelöst:

$$(1) \qquad 4\Gamma^3(U_1^3+U_2^3+U_3^3) = -r^{10}\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial b} P_f + 2ar^2 R_f\right\}$$

$$(2) \qquad 12\Gamma^3 U_1 U_2 U_3 = r^{10}\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial a} P_f - 2br^2 R_f\right\}.$$

Die Contravarianten sechster und neunter Classe

$$\Phi = 3RF + STS_f^2 - 2S^2 S_f T_f + TT_f^2$$

$$\Pi = \tfrac{1}{3}\,\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_3}$$

genügen den Relationen:

---

*) Bei der Ableitung, die in Durège's Werk: „Die ebenen Curven dritter Ordnung" gegeben ist, bleibt gerade der Hauptpunkt unbewiesen, dass nämlich wenigstens *ein* reelles syzygetisches Dreiseit existirt.

**) Die den Formen vorzusetzenden Zahlenfactoren sind dieselben, wie in meinem Aufsatze: „Zur Theorie der ternären cubischen Formen" (Band IV. dieser Annalen, S. 144 ff.).

(3) $r^{18}\Phi = \Gamma^4 \{2(U_1^3 + U_2^3 + U_3^3)^2 - 24(U_1^3 U_2^3 + U_2^3 U_3^3 + U_3^3 U_1^3)\}$

(4) $r^{15}\Pi = -8 \,.\, 18\Gamma^3 (U_1^3 - U_2^3)(U_2^3 - U_3^3)(U_3^3 - U_1^3)$.

Multiplicirt man die Gleichung (3) mit Γ^2, (4) mit $r^{21}R^2 = \Gamma^6$, erhebt (2) in den Cubus und setzt überdies

$$(5) \qquad \frac{12\Gamma^3}{r^{10}} U_1^3 = \xi \;,\quad \frac{12\Gamma^3 U_2^3}{r^{10}} = \eta \;,\quad \frac{12\Gamma^3}{r^{10}} U_3^3 = \zeta \,,$$

so gehen aus (1), (3), (2) und (4) beziehungsweise die Formeln hervor:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi + \eta + \zeta &= -6a(6b^2 P_f + r^2 R_f) \\ \xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta &= 3a^2(6b^2 P_f + r^2 R_f)^2 - 6\Gamma^2 r^{-2}\Phi \\ \xi\eta\zeta &= 8\{2(a^3 + 2b^3) P_f - b r^2 R_f\}^3 \\ (\xi - \eta)(\eta - \zeta)(\zeta - \xi) &= 24 r^9 R^2 \Pi . \end{aligned}$$

Dieses System zeigt, dass ξ, η, ζ die Wurzeln der cubischen Gleichung sind:

$$x^3 + 3a(12b^2 P_f + 2r^2 R_f)\, x^2 + 3\{(6b^2 P_f + r^2 R_f)^2 a^2 - 6\Gamma^2 r^{-2}\Phi\}\, x \\ - 8\{2(a^3 + 2b^3) P_f - b r^2 R_f\}^3 = 0.$$

Nennen wir die vollständigen Cuben

$$4(2(a^3 + 2b^3) P_f - b r^2 R_f)^3 - 5a^3(6b^2 P_f + r^2 R_f)^3 \\ - 6\Gamma^2 r^{-2} a\,\Phi(6b^2 P_f + r^2 R_f) + \tfrac{4}{3}\sqrt{-3}\, r^9 R^2 \Pi$$

und

$$4(2(a^3 + 2b^3) P_f - b r^2 R_f)^3 - 5a^3(6b^2 P_f + r^2 R_f)^3 \\ - 6\Gamma^2 r^{-2} a\,\Phi(6b^2 P_f + r^2 R_f) - \tfrac{4}{3}\sqrt{-3}\, r^9 R^2 \Pi$$

respective M^3 und N^3, so bekommt man durch Auflösung der cubischen Gleichung mit Rücksicht auf die letzte Formel des Systems (6) die Werthe von ξ, η, ζ und hieraus

$$(7) \qquad \begin{aligned} U_1^3 &= -\frac{1}{12Rr^2}\xi = -\frac{1}{12R}\left\{\frac{\mathsf{M}}{r^2} + \frac{\mathsf{N}}{r^2} - 2a(6b^2 r^{-2} P_f + R_f)\right\} \\ U_2^3 &= -\frac{1}{12Rr^2}\eta = -\frac{1}{12R}\left\{\frac{\varepsilon\mathsf{M}}{r^2} + \frac{\varepsilon^2\mathsf{N}}{r^2} - 2a(6b^2 r^{-2} P_f + R_f)\right\} \\ U_3^3 &= -\frac{1}{12Rr^2}\zeta = -\frac{1}{12R}\left\{\frac{\varepsilon^2\mathsf{M}}{r^2} + \frac{\varepsilon\mathsf{N}}{r^2} - 2a(6b^2 r^{-2} P_f + R_f)\right\}. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken bedeutet $\frac{\mathsf{M}}{r^2}$ irgend eine bestimmte der drei Cubikwurzeln aus $\frac{\mathsf{M}^3}{r^6}$, während der zugehörige Werth von $\frac{\mathsf{N}}{r^2}$ durch die Gleichung

$$(8) \qquad \frac{\mathsf{M}}{r^2} \cdot \frac{\mathsf{N}}{r^2} = 6\Gamma^2 r^{-6}\Phi + 3a^2(6b^2 r^{-2} P_f + R_f)^2$$

gegeben ist.

Was die Bestimmung von a, b und r anbelangt, so hat man hierzu bekanntlich die Gleichungen:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{64 b^3 (b^3 - a^3)}{(8 b^6 + 20 a^3 b^3 - a^6)^2}, \tag{9}$$

$$r^2 = \frac{S}{T} \cdot \frac{8 b^6 + 20 a^3 b^3 - a^6}{4 b (b^3 - a^3)}. \tag{10}$$

Eine der Grössen a und b kann beliebig angenommen werden. Setzt man z. B. $a = 1$, so kommen in den Formeln (7—10) nur noch Potenzen von b^3 vor; aus (9) ergeben sich dann vier Werthe für b^3, zu deren jedem die Gleichungen (7) ein System der U_i^3 liefern*).

II.

Ueber die Realität der Wendepunktsdreiseite.

Wir gebrauchen im Folgenden die allgemein angenommene Bezeichnungsweise:

$$G(\varkappa, \lambda) = G = \varkappa^4 - 6 S \varkappa^2 \lambda^2 + 8 T \varkappa \lambda^3 - 3 S^2 \lambda^4,$$

$$S(\varkappa, \lambda) = -\frac{1}{144} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa \partial \lambda} \right)^2 \right),$$

$$T(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial S(\varkappa \lambda)}{\partial \varkappa} - \frac{\partial G}{\partial \varkappa} \frac{\partial S(\varkappa \lambda)}{\partial \lambda} \right).$$

Für irgend eine Wurzel $\varkappa_i (i = 1, 2, 3, 4)$ der biquadratischen Gleichung

$$G(\varkappa, 1) = \varkappa^4 - 6 S \varkappa^2 + 8 T \varkappa - 3 S^2 = 0$$

stellt bekanntlich

$$\varkappa_i f - \Delta = 0$$

ein Wendepunktsdreiseit dar. Sind

$$X_1^{(i)} = 0 \qquad X_2^{(i)} = 0 \qquad X_3^{(i)} = 0$$

die Gleichungen der Seiten und

$$U_1^{(i)} = 0 \qquad U_2^{(i)} = 0 \qquad U_3^{(i)} = 0$$

---

*) Man könnte sich a, anstatt es der Einheit gleichzusetzen, auch so bestimmt denken, dass $r = 1$ wird. Aus den Relationen

$$S = 4 b (b^3 - a^3) \qquad T = 8 b^6 + 20 a^3 b^3 - a^6$$

folgt alsdann durch Elimination von a die Gleichung:

$$27 \cdot 16 b^6 - 9 \cdot 8 b^4 S - 16 T b^2 - S^2 = 0,$$

welche durch die Substitution $b^2 = \frac{1}{6} c$ übergeht in:

$$c^4 - 6 S c^2 - 8 T c - 3 S^2 = 0.$$

die Gleichungen der Scheitel derselben, so kann man nach Band IV. dieser Annalen Seite 567—569 leicht die Producte $X_1^{(i)} U_1^{(i)}$, $X_2^{(i)} U_2^{(i)}$, $X_3^{(i)} U_3^{(i)}$ (natürlich abgesehen von constanten Factoren) bestimmen. Es werden nämlich*):

$$4T(\varkappa_i, 1)\left\{6(\varkappa_i f - \Delta)\, T_{\varkappa_i f - \Delta} - 18S(\varkappa_i, 1)\, \Theta_{\varkappa_i f - \Delta}\, u_x \right.$$
$$\left. - 2T(\varkappa_i, 1)\, u_x^3 + \sqrt{-6T(\varkappa_i, 1)}\, B_{\varkappa_i f - \Delta}\right\} = M_i^3$$

und

$$4T(\varkappa_i, 1)\left\{6(\varkappa_i f - \Delta)\, T_{\varkappa_i f - \Delta} - 18S(\varkappa_i, 1)\, \Theta_{\varkappa_i f - \Delta}\, u_x \right.$$
$$\left. - 2T(\varkappa_i, 1)\, u_x^3 - \sqrt{-6T(\varkappa_i, 1)}\, B_{\varkappa_i f - \Delta}\right\} = N_i^3$$

gesetzt, die Gleichungen

$$(12) \qquad X_1^{(i)} U_1^{(i)} = 0, \quad X_2^{(i)} U_2^{(i)} = 0, \quad X_3^{(i)} U_3^{(i)} = 0$$

beziehungsweise dargestellt durch

$$(12^a) \qquad \begin{aligned} 4S(\varkappa_i, 1)\, u_x + M_i + N_i &= 0 \\ 4S(\varkappa_i, 1)\, u_x + \varepsilon M_i + \varepsilon^2 N_i &= 0 \\ 4S(\varkappa_i, 1)\, u_x + \varepsilon^2 M_i + \varepsilon N_i &= 0; \end{aligned}$$

darin sind M_i und N_i durch die Relation verknüpft:

$$(12^b) \qquad M_i N_i = 4\left\{S^2(\varkappa_i, 1)\, u_x^2 - 3T(\varkappa_i, 1)\, \Theta_{\varkappa_i f - \Delta}\right\}.$$

Die Gleichung $G(\varkappa, 1) = 0$ hat offenbar ein Paar reeller und ein Paar imaginärer Wurzeln, indem deren Discriminante gleich

$$-27 \cdot 16\,(S^3 - T^2)^2,$$

also negativ ist. Nennen wir $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die beiden reellen Wurzeln, so ist hauptsächlich zu entscheiden, welche Vorzeichen die Ausdrücke $T(\varkappa_1, 1)$, $T(\varkappa_2, 2)$ besitzen. Diese Entscheidung ergiebt sich sofort aus der Formel:

$$T(\varkappa_1, 1) \cdot T(\varkappa_2, 1) \cdot T(\varkappa_3, 1) \cdot T(\varkappa_4, 1) = -16^4 (S^3 - T^2)^6 \text{ **)}.$$

---

*) $T(\varkappa_i, 1)$ geht aus $T(\varkappa, \lambda)$ für $\varkappa = \varkappa_i$ und $\lambda = 1$, $T_{\varkappa_i f - \Delta}$ aus T_f hervor, wenn in letzterer Form die Coefficienten von $\varkappa_i f - \Delta$ an die Stelle derer von f treten, u. s. w.

**) Dieselbe ist eine unmittelbare Folge des fünften der schönen Sätze, die Gordan auf S. 169 ff. des IV. Bandes dieser Annalen mitgetheilt hat. Nach diesem Theoreme ist bis auf einen Zahlenfactor α das Product

$$T(\varkappa_1, 1) \cdot T(\varkappa_2, 1) \cdot T(\varkappa_3, 1) \cdot T(\varkappa_4, 1)$$

identisch mit $(S^3 - T^2)^6$; durch die specielle Annahme $G(\varkappa_1, 1) = \varkappa^4 - 8\varkappa$ findet man α gleich -16^4.

Da $T(\varkappa_3, 1) \cdot T(\varkappa_4, 1)$ als das Produkt zweier conjugirter complexer Zahlen stets positiv ist, so müssen $T(\varkappa_1, 1)$ und $T(\varkappa_2, 1)$ entgegengesetzte Zeichen haben. Nehmen wir $T(\varkappa_1, 1)$ als positiv und $T(\varkappa_2, 1)$ als negativ an, so enthalten — wofern die Grundform f reell — in (12^a) für $i = 1$ alle drei Gleichungen, für $i = 2$ jedoch nur eine derselben reelle Coefficienten. Man hat daher den bekannten Satz:

In einem der Wendepunktsdreiseite sind alle Ecken und Seiten, in einem anderen dagegen nur ein Scheitel und dessen gegenüberliegende Seite reell.

Da diese zwei syzygetischen Dreiseite sich gegenseitig in den neun Wendepunkten schneiden, so sind von den letztern nur drei, in gerader Linie liegende, reell; wie Plücker zuerst geometrisch bewiesen hat.

Für die complexen Wurzeln $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$ stellen die Gleichungen (12^a) offenbar nur imaginäre Geraden und Punkte dar. Uebrigens wird man, nachdem die Existenz des fundamentalen reellen syzygetischen Dreiseits erwiesen ist, aus diesem die drei übrigen am besten in der von Hesse (Crelle's Journal Bd. 28, S. 96) angegebenen Weise ableiten.

Tübingen, Mitte November 1871.

Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

Von A. Mayer in Leipzig.

Jede einzelne lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist äquivalent einem gewissen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. In ganz ähnlicher Weise besteht zwischen den Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die eine gemeinsame Lösung zulassen, und zwischen gewissen Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen ein leicht erkennbarer reciproker Zusammenhang, der übrigens in einzelnen Fällen, z. B. bei der Ampère'schen Integrationsmethode derjenigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ein Zwischenintegral besitzen, schon mehrfach bemerkt und benutzt worden ist.

In der That, wenn die $m-1$ simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(I)} \qquad A_1(f)=0\ ,\quad A_2(f)=0\ ,\quad \ldots A_{m-1}(f)=0,$$

in welchen allgemein:

$$A_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}+a^i_m\frac{\partial f}{\partial x_m}+\cdots a^i_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist und die Coefficienten a^i_k gegebene Functionen von $x_1,\ x_2 \ldots x_n$ sind, eine gemeinsame Lösung f besitzen, so ist diese Lösung zu gleicher Zeit und welche willkürlichen Functionen von $x_1,\ x_2 \ldots x_n$ man auch für $\lambda_1,\ \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}$ setzen mag, immer auch eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\lambda_1 A_1(f)+\lambda_2 A_2(f)+\cdots \lambda_{m-1}A_{m-1}(f)=0,$$

also, einer willkürlichen Constanten gleichgesetzt, ein Integral der $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_{m-1} : \quad dx_m : \cdots\cdots : dx_n$$
$$=\lambda_1 : \quad \lambda_2 : \cdots : \quad \lambda_{m-1} : \sum_{h=1}^{h=m-1}\lambda_h a^h_m \cdots : \sum_{h=1}^{h=m-1}\lambda_h a^h_n$$

und folglich auch ein Integral der $n - m + 1$ linearen totalen Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \, dx_h ,$$

$$k = m, \; m + 1, \; \ldots n,$$

die aus den vorhergehenden durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_{m-1}$ hervorgehen, und man sieht unmittelbar, dass umgekehrt, wenn die Gleichung (II) ein Integral $f =$ Const. besitzen, d. h. wenn es eine Function f von $x_1, x_2, \ldots x_n$ giebt, deren Differential durch die Gleichungen (II) allein identisch Null wird, diese Function eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (I) ist.

Die Aufgabe, eine gemeinsame Lösung der $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen (I) zu finden, ist demnach identisch mit der Aufgabe, ein Integral der $n - m + 1$ linearen totalen Differentialgleichungen (II) zu entdecken. Hiernach steht zu erwarten, dass jede Methode, die uns die Gleichungen (II) integriren lehrt, gleichzeitig auch den Keim in sich enthalten muss zu einer Integrationsmethode der Gleichungen (I). Dieser Gedanke gab die Veranlassung zu den folgenden Untersuchungen, deren Hauptzweck es ist, einen Weg ausfindig zu machen, auf dem man durch möglichst wenig Integrationen zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung mehrerer gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function gelangen könne.

Dabei konnte aber von vornherein eine sehr wesentliche Vereinfachung eingeführt werden. Da nämlich, wie Herr Clebsch gezeigt hat*), jedes System solcher partieller Differentialgleichungen, das überhaupt eine gemeinsame Lösung besitzt, sich zurückführen lässt auf ein Jacobi'sches System, d. h. im Besonderen auf ein System von der Form (I), in welchem zwischen den Operationen A die $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ Identitäten stattfinden:

$$\text{(III)} \qquad A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0,$$

so war es auch nur nöthig, solche Systeme totaler Differentialgleichungen in Betracht zu ziehen, deren Coefficienten die aus (III) folgenden Bedingungen erfüllen.

Diese Systeme besitzen die Eigenschaft, dass ihnen durch $n - m + 1$ Integrale Genüge geschieht, und es wird sich zunächst zeigen, dass ihre Integration zurückkommt auf die vollständige Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie dies, unter Voraussetzung eines Systemes

*) Crelle J. 65, p. 257.

totaler Differentialgleichungen, welches die angegebene Zahl von Integralen besitzt, schon früher von Herrn Natani bemerkt worden ist*). Durch eine Transformation der gegebenen Gleichungen aber, die derjenigen nachgebildet ist, mit Hilfe derer Herr P. du Bois-Reymond die durch eine Gleichung integrirbaren linearen totalen Differentialgleichungen auf je eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln zurückzuführen gelehrt hat**), kann man bewirken, dass schon die Integration des ersten jener $m-1$ Systeme zur vollständigen Integration der gegebenen Gleichungen genügt, womit gleichzeitig die vollständige Lösung des äquivalenten Jacobi'schen Systemes zurückgeführt ist auf die vollständige Integration eines einzigen Systems von $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Hieraus endlich wird sich, was für die Anwendungen ungleich wichtiger ist, ergeben, dass zur Ermittelung einer gemeinsamen Lösung des Jacobi'schen Systemes nur die Kenntniss eines einzigen Integrales jenes Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen nothwendig ist, wodurch z. B. die Anzahl der Integrale, deren man zur vollständigen Lösung einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bedarf, wenn man absieht vom ersten, gerade um die Hälfte reducirt wird gegen die Anzahl von Integralen, deren Kenntniss nach der vorzüglichsten der früheren Methoden, der Methode von Weiler-Clebsch***) erforderlich war.

§ 1.

Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität.

Zu den Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen, die im Folgenden ausschliesslich betrachtet werden sollen, gelangt man, wenn man $n-m+1$ beliebige, von einander unabhängige Functionen von n Variabeln $x_1\,x_2\,\ldots\,x_n$ willkürlichen Constanten gleichsetzt und die also entstehenden Gleichungen vollständig differentiirt. Durch Auflösung der derivirten Gleichungen nach $n-m+1$ von den n Differentialen erhält man $n-m+1$ simultane Differentialgleichungen von der Form:

$$(1)\qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h\, dx_h$$

$$k = m,\, m+1,\, \ldots\, n,$$

in denen die a_k^h gegebene Functionen aller n Variabeln sind und denen

*) Crelle J. 58, p. 303.
**) Crelle J. 70, p. 312.
***) Crelle J. 65, p. 263.

in Folge ihrer Entstehungsart dadurch genügt werden kann, dass man für $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ passende Functionen der unabhängigen Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ setzt, Functionen, die überdies noch $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthalten. Um mich kurz fassen zu können, will ich ein solches System linearer totaler Differentialgleichungen (1) ein *unbeschränkt integrables* nennen.

Wenn umgekehrt ein System linearer totaler Differentialgleichungen von der Form (1) vorliegt, so fragt es sich zunächst, unter welchen Bedingungen ist dasselbe unbeschränkt integrabel, und weiter, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, wie kann man dasselbe integriren?

Soll es $n - m + 1$ Functionen $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ geben, welche die gegebenen Gleichungen (1) identisch erfüllen, so muss, wenn h und i irgend zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots m-1$ bezeichnen, für diese Functionen

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_h} = a_k^h \quad , \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = a_k^i \,, \tag{2}$$

folglich, wenn man durch die Charakteristik d andeutet, dass bei der Differentiation $x_m \ldots x_n$ als solche Functionen von x_h und x_i anzusehen sind, für welche die Relationen (2) stattfinden,

$$\frac{d a_k^h}{d x_i} - \frac{d a_k^i}{d x_h} = 0$$

werden, oder es müssen diese Functionen den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0. \tag{3}$$

Führt man allgemein die Bezeichnung $A_i(f)$ ein für die Operation

$$A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \,, \tag{4}$$

so kann man die Gleichungen (3) kürzer also schreiben:

$$A_i\left(a_k^h\right) - A_h\left(a_k^i\right) = 0 \,. \tag{5}$$

Diesen Bedingungen, deren Anzahl

$$= (n - m + 1) \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

ist, muss demnach Genüge geschehen durch diejenigen Functionen $x_m \ldots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_{m-1}$, welche die Gleichungen (1) lösen. Wenn aber, wie hier angenommen wird, diese Functionen $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthalten sollen, so ist dies nicht anders möglich, als wenn diese Bedingungen schon an sich identisch sind.

Das identische Bestehen der Relationen (3) oder (5) ist hiernach jedenfalls nothwendig, wenn die Gleichungen (1) unbeschränkt integrabel

sein sollen. Dass dasselbe auch hinreichend ist, wird der folgende § zeigen, welcher lehrt, wie man unter Voraussetzung der Identitäten (3) $x_m \dots x_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_{m-1}$ und von $n - m + 1$ willkürlichen Constanten so bestimmen kann, dass den Gleichungen (1) identisch genügt wird.

Zuvor bemerke ich noch, dass, da nach (4):

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$$
$$= \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left\{A_i(a_\lambda^k) - A_k(a_\lambda^i)\right\} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

ist, die Identitäten (5) auch die folgenden nach sich ziehen:

$$A_i(A_k(f)) = A_k(A_i(f)), \tag{6}$$

die für jede beliebige Function f gelten, und umgekehrt die Bedingungen (5) ersetzen können.

§ 2.

Zurückführung des Systems (1), falls die Relationen (3) identisch stattfinden, auf $m - 1$ Systeme von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn es überhaupt $n - m + 1$ Functionen $x_m \dots x_n$ der unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_{m-1}$ giebt, welche die Gleichungen (1) erfüllen, so müssen dieselben zunächst den $n - m + 1$ Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_1} = a_m^1 \;,\quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = a_{m+1}^1 \,, \;\dots\; \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = a_n^1 \,. \tag{7}$$

Diese Gleichungen, in denen $x_2 \dots x_{m-1}$ nur wie Constante eingehen, bilden ein System von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x_m \dots x_n$ und x_1.

Sind daher:

$$\begin{gathered}\varphi_\lambda(x_1\, x_2 \dots x_{m-1}\, x_m \dots x_n) = c_\lambda \\ \lambda = m,\;\; m+1, \dots n\end{gathered} \tag{8}$$

$n - m + 1$ von einander unabhängige Integrale dieses Systems, so müssen die Lösungen $x_m \dots x_n$ der Gleichungen (1) enthalten sein in den Gleichungen (8), deren Integrationsconstanten c_λ nur von $x_2 \dots x_{m-1}$ abhängen dürfen.

Die Gleichungen (8), als vollständige Integralgleichungen des Systems (7), sind stets auflösbar nach $x_m \dots x_n$. Man kann diese Gleichungen daher benutzen, um durch dieselben $c_m \dots c_n$ an Stelle von $x_m \dots x_n$ als neue abhängige Variabeln einzuführen.

Aus (8) ergiebt sich durch vollständige Differentiation und Substitution der Gleichungen (1):

$$dc_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_h}\right) dx_h \,.$$

Hierin ist aber der Coefficient von dx_1 identisch Null, weil die Gleichungen (8) nach Voraussetzung Integrale des Systems (7) sind. Unter Einführung der Bezeichnung (4) bleibt daher nur:

$$(9) \qquad dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} A_h(\varphi_\lambda)\, dx_h \,.$$

Aus diesen $n - m + 1$ Gleichungen, in denen man rechter Hand für $x_m \ldots x_n$ die aus den Gleichungen (8) folgenden Werthe einzusetzen hat, sind demnach die neu eingeführten Grössen $c_m \ldots c_n$ zu bestimmen.

Sollen aber die Gleichungen (8) Integrale des Systems (7) bleiben, so müssen die c_λ unabhängig von x_1 werden; also darf x_1 in den Gleichungen (9) nicht vorkommen.

Dies ist in der That auch der Fall. Da nämlich nach (6)

$$A_1(A_h(f)) = A_h(A_1(f))$$

und $A_1(\varphi_\lambda) = 0$ ist, so ist auch

$$f = A_h(\varphi_\lambda)$$

eine Lösung der Gleichung $A_1(f) = 0$, oder $A_h(\varphi_\lambda) = \text{Const.}$ ein Integral des Systems (7); daher werden nach Substitution der Werthe von $x_m \ldots x_n$, die sich aus den Integralen (8) dieses Systems ergeben, die Ausdrücke $A_h(\varphi_\lambda)$ unabhängig von x_1.

Die Gleichungen (9) sind somit sämmtlich frei von x_1 *und können sich daher nicht ändern, wenn man in ihnen dieser Variabeln irgend welchen Werth beilegt.*

Das gegebene System (1) ist nunmehr zurückgeführt auf das System (9), welches nur noch $m - 2$ unabhängige Variabeln enthält. Dies letztere System lässt sich im Allgemeinen, d. h. solange man über das System Integrale der Gleichungen (7), durch welches die c_λ als Integrationsconstanten eingeführt werden, nichts Näheres festsetzt, offenbar erst aufstellen, nachdem man diese Integrale gefunden hat. Nimmt man aber für die c_λ ein bestimmtes System Integrationsconstanten der Gleichungen (7), nämlich die Anfangswerthe der abhängigen Variabeln, so erhält man den grossen Vortheil, die Gleichungen (9) vor aller Integration bilden zu können.

Man kann dies direct aus dem System (9) erkennen, es zeigt sich aber noch klarer, wenn man ausgeht von einem andern, den Gleichungen (9) äquivalenten Systeme.

Bezeichnet man durch:

$$(10) \qquad x_k = \psi_k(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, c_m \ldots c_n)$$

die Auflösungen der Integrale (8) nach $x_m \ldots x_n$ oder die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7), und führt direct durch

(10) die c_λ als neue abhängige Variable in die Gleichungen (1) ein, so erhält man jetzt zur Bestimmung der c_λ die Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\lambda} dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right) dx_h$$

in denen durch die Substitutionen (10) auch die a_k^h auszudrücken sind in $x_1\, x_2 \dots x_{m-1}\, c_m \dots c_n$, und bei deren Aufstellung benutzt worden ist, dass durch diese Substitutionen identisch

$$a_k^h - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} = 0$$

wird.

Wenn man diese $n - m + 1$ Gleichungen nach $dc_m \dots dc_n$ auflöst, so muss man wiederum zu den Gleichungen (9) gelangen. Man kann daher die letzteren ersetzen durch die Gleichungen (11). Und da nach dem Vorhergehenden die Gleichungen (9) frei von x_1 sind, so ist es gestattet, *auch vor der Auflösung direct in den Gleichungen* (11) *der Variabeln x_1 irgend einen beliebigen Werth beizulegen*, für den diese Gleichungen noch auflösbar bleiben.

Dies vorausgeschickt seien nun

$$(12) \qquad x_k = \chi_k (x_1\, x_2 \dots x_{m-1}\, x_m^0 \dots x_n^0)$$

die vollständigen Lösungen der Gleichungen (7), ausgedrückt in x_1 und den Werthen $x_m^0 \dots x_n^0$ der abhängigen Variabeln $x_m \dots x_n$, welche dem constanten Anfangswerthe $x_1{}^0$ von x_1 angehören. — Dieser Anfangswerth $x_1{}^0$ kann beliebig gewählt werden, nur darf für denselben, damit die zugehörigen Werthe der abhängigen Variabeln willkürlich bleiben, keine der Grössen a_k^h unendlich oder unbestimmt werden. — Die Ausdrücke χ_k, indem sie die Werthe sind, die sich durch Auflösung der aus den Integralen (8) folgenden Gleichungen

$$\varphi_\lambda(x_1\, x_2 \dots x_{m-1}\, x_m \dots x_n) = \varphi_\lambda(x_1{}^0\, x_2 \dots x_{m-1}\, x_m^0 \dots x_n^0)$$

für die Variabeln x_k ergeben, haben dann die Eigenschaft, für $x_1 = x_1{}^0$ sich auf x_k^0 zu reduciren.

Setzt man daher in dem Systeme

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda^0} dx_\lambda^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \chi_k}{\partial x_h}\right) dx_h\,,$$

welches sich aus (1) ergiebt, wenn man durch die Substitutionen (12) die Anfangswerthe $x_m^0 \dots x_n^0$ an Stelle von $x_m \dots x_n$ als neue Variable einführt, und in welchem nach dem Vorhergehenden x_1 einen beliebigen Werth erhalten darf, $x_1 = x_1{}^0$, so reducirt sich dasselbe auf:

$$(13) \qquad dx_k^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} a_k^{h0}\, dx_h,$$

worin allgemein a_k^{h0} den Werth bezeichnet, den a_k^h durch die Substitutionen

$$x_1 = x_1^0 \quad , \quad x_m = x_m^0 , \; \ldots \; x_n = x_n^0$$

annimmt.

Aus diesen $n - m + 1$ Gleichungen (13), die, wie man sieht, vor jeder Integration des Systems (7) aufgestellt werden können, sind also die Anfangswerthe als Functionen von $x_2 \ldots x_{m-1}$ zu bestimmen.

Die Gleichungen (13) aber bilden ein ganz ebensolches System wie die gegebenen Gleichungen (1), nur mit einer unabhängigen Variabeln x_1 weniger. Denn da nach Voraussetzung identisch:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0$$

ist, so hat man auch identisch:

$$\frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^{i0}}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^{i0} \frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_\lambda^0} - a_\lambda^{h0} \frac{\partial a_k^{i0}}{\partial x_\lambda^0} \right) = 0,$$

also erfüllt auch das System (13) die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität. Man kann dieses System daher genau so weiter behandeln, wie vorher das gegebene, nämlich durch Integration eines zweiten Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung dasselbe zurückführen auf ein unbeschränkt integrables System mit nur noch $m - 3$ unabhängigen Variabeln u. s. f., so dass man schliesslich nach Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen jedes unabhängig von den andern aufgestellt und behandelt werden kann, zur vollständigen Integration des gegebenen Systems (1) gelangen und durch ein recurrirendes System von Formeln $x_m \ldots x_n$ ausgedrückt in $x_1 \, x_2 \ldots x_{m-1}$ und den $n - m + 1$ willkürlichen Constanten des letzten jener $m - 1$ Systeme erhalten wird.

§ 3.

Zurückführung des unbeschränkt integrablen Systems (1) auf ein einziges System von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Durch die im vorigen § angegebene Methode wird die Integration des gegebenen, unbeschränkt integrablen Systems (1) zurückgeführt auf die Integration von $m - 1$ Systemen von je $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn aber der besondere Fall eintreten sollte, dass man die Constante x_1^0 so wählen könnte, dass für $x_1 = x_1^0$ sämmtliche $(m - 2)(n - m + 1)$ Grössen:

$$a_k^2 \quad a_k^3 \ldots a_k^{m-1}$$

den Werth Null erhielten, so würden die Gleichungen (13), auf welche durch Integration der Gleichungen (7) das gegebene System (1) zurückgeführt ist, sich auf

$$dx_k^0 = 0$$

reduciren und daher sofort ergeben

$$x_m^0 = \text{Const.} \quad , \quad x_{m+1}^0 = \text{Const.}, \ldots x_n^0 = \text{Const.}$$

Es würden uns dann also schon unmittelbar die vollständigen Lösungen des ersten jener $n - m + 1$ Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, ausgedrückt in x_1 und den Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $x_1 = x_1^0$, sobald darin diese Anfangswerthe als willkürliche, von $x_2 \ldots x_{m-1}$ unabhängige Constanten angesehen werden, die vollständigen Lösungen des Systems (1) ergeben.

Dieser scheinbar sehr besondere Fall lässt sich nun stets durch eine passende Transformation der Gleichungen (1) herbeiführen.

Führt man an Stelle von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ $m - 1$ andere Grössen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ durch $m - 1$ beliebige, von einander unabhängige Gleichungen

$$x_h = x_h(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}) \tag{14}$$

als neue Variable ein, so verwandeln sich die Gleichungen (1) in:

$$dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i\, d\alpha_i, \tag{15}$$

worin:

$$b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}. \tag{16}$$

Zu gleicher Zeit erhält man, wenn man in einer beliebigen Function f von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ die Substitutionen (14) macht:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

folglich:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \tag{17}$$

Da wir aus dem Vorhergehenden wissen, dass das ursprüngliche System (1) ein unbeschränkt integrables ist, sobald die Identitäten (3) bestehen, so folgt unmittelbar, dass unter dieser Voraussetzung auch das transformirte System (15) dieselbe Eigenschaft besitzt und daher zwischen den Coefficienten b_k^i desselben die Relationen identisch stattfinden müssen:

$$\frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \right) = 0, \tag{18}$$

in denen $k = m, m+1, \ldots n$ und ϱ und σ irgend zwei der Zahlen $1, 2, \ldots m-1$ sind, und die, wenn wir allgemein

$$(19) \qquad B_\varrho(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varrho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

setzen, die folgenden nach sich ziehen:

$$(20) \qquad B_\varrho\big(B_\sigma(f)\big) = B_\sigma\big(B_\varrho(f)\big).$$

Dies lässt sich auch leicht durch die Rechnung verificiren.

Man hat nämlich nach (16):

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right)$$

und:

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} \right) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} a_\lambda^\mu \left(\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\varrho} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma} \right).$$

Bildet man hiermit die linke Seite der Gleichung (18) und vertauscht in den negativen Gliedern die beiden Summationsindices h und μ, so erhält man:

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\varrho} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial \alpha_\sigma} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(b_\lambda^\varrho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\varrho} \left\{ \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_\lambda} \right) \right\},$$

welche Formel direct nachweist, dass von den beiden Systemen identischer Relationen (3) und (18) das eine stets das andere nach sich zieht.

Man kann somit zur Integration des aus dem gegebenen unbeschränkt integrablen System (1) durch die Substitutionen (14) hervorgegangenen Systems (15) genau dieselbe Methode benutzen, die im vorigen § für die Integration von (1) gewonnen wurde.

Nach dieser werden wir zuerst die $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(21) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1 \;, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1 \,, \; \ldots \; \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1$$

vollständig zu integriren und die Integrationsconstanten auszudrücken haben durch die Werthe $x_m^0 \ldots x_n^0$ der Variabeln $x_m \ldots x_n$, welche dem constanten Anfangswerth $\alpha_1{}^0$ von α_1 entsprechen. Die also er-

haltenen vollständigen Lösungen der Gleichungen (21) geben uns dann zugleich auch die vollständigen Lösungen des Systems (15), wenn wir in ihnen für $x_m^0 \dots x_n^0$ diejenigen Functionen von $\alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ setzen, die sich durch vollständige Integration des Systems ergeben:

$$(22) \qquad dx_k^0 = \sum_{i=2}^{i=m-1} b_k^{i0}\, d\alpha_i\,,$$

dessen Coefficienten b_k^{i0} aus den Coefficienten

$$b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

der Gleichungen (15) durch die Annahmen:

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 \quad , \quad x_m = x_m^0\,, \; \dots\,, \; x_n = x_n^0$$

hervorgehen.

Nun aber steht uns die Wahl der Substitutionen (14) vollkommen frei und es erhellt leicht, dass wir dieselben immer so einrichten können, dass sämmtliche Coefficienten b_k^{i0} der Gleichungen (22) verschwinden. In der That brauchen wir zu dem Ende die Substitutionen (14) nur von der Form zu nehmen:

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h\,,$$

worin α_1^0 und die x_h^0 Constante, dagegen $f_1 f_2 \dots f_{m-1}$ beliebige $m-1$ Functionen von $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ sind, die nur selbstverständlich stets so gewählt werden müssen, dass die Gleichungen (23) unabhängig von einander in Bezug auf $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ werden.

Hierdurch wird:

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right)$$

und für $i > 1$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}\,.$$

Wenn wir daher der Grösse α_1^0 irgend einen solchen constanten Werth beilegen, dass keine der $m-1$ Functionen f_h unendlich oder unbestimmt wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, wenn wir überdies die Constanten

$$x_1^0\, x_2^0 \dots x_{m-1}^0$$

so annehmen, dass für:

$$x_1 = x_1^0 \quad , \quad x_2 = x_2^0\,, \; \dots \; x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

sämmtliche a_k^h endlich und bestimmt bleiben, so wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ jedes $b_k^i = 0$, in welchem $i > 1$ ist, während die Grössen b_k^1 für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ endliche und bestimmte Werthe behalten.

Bei dieser Wahl der Substitutionen (14) sind daher die vollständigen Lösungen der $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

(21), ausgedrückt in α_1 und den Anfangswerthen von $x_m \dots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, wenn man in denselben diese Anfangswerthe als willkürliche, von $\alpha_2\,\alpha_3 \dots \alpha_{m-1}$ unabhängige Constanten betrachtet, zugleich auch die Lösungen des Systems totaler Differentialgleichungen (15) dar. Aus diesen erhält man aber die Lösungen des gegebenen Systems (1), wenn man für $\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ die aus den Substitutionen (23) folgenden Werthe einsetzt.

Die Integration des gegebenen Systems von $n - m$ linearen totalen Differentialgleichungen:

$$dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \, dx_h \tag{1}$$

$$k = m,\ m+1, \dots n$$

lässt sich somit in der Voraussetzung, dass zwischen den Coefficienten desselben die identischen Relationen bestehen:

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0$$

in folgender Weise zurückführen auf die Integration eines einzigen Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

Man führt an Stelle von $x_1\,x_2 \dots x_{m-1}$ durch die, unter den vorhin angegebenen Beschränkungen willkürlich gewählten Substitutionen

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h \tag{23}$$

die Grössen $\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{m-1}$ als neue unabhängige Variable ein. Hierdurch geht das gegebene System (1) *über in das folgende:*

$$dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i \, d\alpha_i\,, \tag{15}$$

aus dessen Coefficienten

$$\left\{ \begin{aligned} b_k^1 &= \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right) \\ b_k^i &= (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1 \end{aligned} \right. \tag{24}$$

$x_1\,x_2 \dots x_{m-1}$ durch die Substitutionen (23) *zu eliminiren sind. Hat man dann die aus* (15) *folgenden $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1\,, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1\,, \ \dots \ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1 \tag{25}$$

vollständig integrirt und die Integrationsconstanten ausgedrückt durch die Anfangswerthe $x_m^0 \dots x_n^0$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, so sind die so erhaltenen Gleichungen zwischen

$$\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\,x_m \dots x_n$$

und den willkürlichen Constanten $x_m^0 \ldots x_n^0$ *die vollständigen Integralgleichungen sowohl der gewöhnlichen Differentialgleichungen* (25) *als auch der totalen Differentialgleichungen* (15) *und man braucht daher nur aus diesen Gleichungen* $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ *mit Hilfe der Formeln* (23) *zu eliminiren, um die vollständigen Integralgleichungen des gegebenen Systems* (1) *zu erhalten.*

Die einfachste Art, den an die Substitutionen (23) gestellten Forderungen in allen Fällen zu genügen, ist die, dass man

$$x_1 = \alpha_1$$

und für $h = 2, 3, \ldots m-1$

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, \alpha_h$$

setzt, worin die Constanten $\alpha_1^0\, x_2^0 \ldots x_{m-1}^0$ nur so zu wählen sind, dass für

$$x_1 = \alpha_1^0 \quad , \quad x_2 = x_2^0, \ldots x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

keine der Grössen a_k^h unendlich oder unbestimmt wird. Man erhält dann:

$$b_k^1 = a_k^1 + \alpha_2\, a_k^2 + \cdots \alpha_{m-1}\, a_k^{m-1}$$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, a_k^i \quad , \quad i > 1 \, .$$

Bei der Ableitung des vorstehenden Satzes ist kein Gebrauch gemacht worden von der Aequivalenz der unbeschränkt integrablen Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und der Jacobi'schen Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen in der bestimmten Absicht, die Integration der letzteren lediglich aus der Untersuchung der ersteren zu schöpfen. Will man aber die bekannten Eigenschaften der Jacobi'schen Systeme zu Hilfe nehmen, so kann man sich von der Zurückführbarkeit des unbeschränkt integrablen Systems (1) auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (25) auch noch auf anderem kürzeren Wege ganz ohne Rechnung überzeugen. Um den Gang der Untersuchung nicht aufzuhalten, lasse ich diese zweite Ableitung des obigen Satzes, die sich noch mehr als die vorhergehende der Schlussweise anschliesst, durch welche Herr P. du Bois-Reymond diese Zurückführbarkeit für den speciellen Fall einer einzelnen linearen totalen Differentialgleichung nachgewiesen hat, erst am Schlusse (§ 7.) folgen.

§ 4.

Integration des Jacobi'schen Systemes $A_h(f) = 0$.

Nach dem vorigen § sind die vollständigen Integralgleichungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25), ausgedrückt in α_1 und den constanten Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ gleichzeitig

auch die vollständigen Integralgleichungen des Systems totaler Differentialgleichungen (15), das aus dem gegebenen (1) durch die Substitutionen (23) hervorgeht.

Die vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen aber die Eigenschaft, dass sie auflösbar sein müssen, sowohl nach den abhängigen Variabeln als auch nach den Anfangswerthen derselben. Man kann daher die vollständigen Integralgleichungen des Systems (25) benutzen, einmal, um aus ihnen $x_m \dots x_n$, das andere Mal, um $x_m^0 \dots x_n^0$ zu bestimmen. Es seien:

$$x_k = \psi_k(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\, x_m^0 \dots x_n^0) \tag{26}$$

und:

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}\, x_m \dots x_n) \tag{27}$$

die also erhaltenen Werthe der x_k und der x_k^0. Durch die Substitutionen (26) müssen dann die Gleichungen (27) identisch erfüllt werden, müssen folglich die Ausdrücke

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h}$$

identisch verschwinden. Da aber nach dem Vorhergehenden diese Substitutionen zugleich dem Systeme (15) oder den Gleichungen:

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h} = b_\lambda^h$$

genügen, so muss dasselbe auch von den Ausdrücken gelten:

$$B_h(\chi_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda},$$

wie auch direct daraus hervorgeht, dass die Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ durch die Substitutionen (26) unabhängig von α_1 werden müssen, weil bei unseren Annahmen $B_1(\chi_k) = 0$ und damit wegen

$$B_1(B_h(f)) = B_h(B_1(f))$$

zugleich auch $B_1(B_h(\chi_k)) = 0$ ist, diese Ausdrücke aber verschwinden, wenn man $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$ setzt, weil hierdurch χ_k sich auf x_k reduciren muss und überdies jedes $b_k^h = 0$ wird, in dem $h > 1$.

Das Resultat Null der Substitution der Werthe (26) in die Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ kann aber nicht abgeändert werden, wenn man darin rückwärts für die x_k^0 ihre Werthe (27) einsetzt, wodurch die Substitution selbst aufgehoben wird. Also muss schon vor der Substitution jedes

$$B_h(\chi_k) = 0$$

sein, oder es sind

$$f = \chi_m,\ \chi_{m+1},\ \dots\ \chi_n$$

Lösungen des Jacobi'schen Systems von $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Dieses Jacobi'sche System aber geht, wie die Formel (17) lehrt, aus dem andern:

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

dadurch hervor, dass man durch die Substitutionen (23) $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ an Stelle von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ einführt und muss sich umgekehrt wieder in letzteres verwandeln, wenn man rückwärts die α durch die x ausdrückt. Die Lösungen $f = \chi_m,\, \chi_{m+1}, \ldots \chi_n$ des ersten Systems geben uns daher, sobald wir in denselben für $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ die aus den Substitutionen (23) folgenden Werthe setzen, zugleich auch die Lösungen des zweiten, dem gegebenen System (1) äquivalenten Jacobi-schen Systems.

Hieraus entspringt die folgende Methode zur vollständigen Integration des gegebenen Jacobi'schen Systems von $m-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (28)$$

$$h = 1, 2, \ldots m-1.$$

Man drücke durch die $m-1$, unter den im vor. § angegebenen Beschränkungen beliebig gewählten Substitutionen

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1{}^0)\, f_h(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}) \qquad (23)$$

die Grössen:

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left(f_h + (\alpha_1 - \alpha_1{}^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right), \text{ und}$$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1{}^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}, \quad i > 1$$

durch $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n$ aus und bilde mit den ersteren die $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \; \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}^1, \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1.$$

Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt und die Integrationsconstanten ausgedrückt durch die Anfangswerthe $x_m^0 \ldots x_n^0$ der abhängigen Variabeln für $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$, so liefert die Auflösung der erhaltenen Integralgleichungen nach diesen Anfangswerthen $n-m+1$ Functionen

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n),$$

welche die $n-m+1$ Lösungen sind des Jacobi'schen Systems:

$$(29) \qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

und die, wenn man aus ihnen mit Hilfe der Gleichungen (23) $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ *eliminirt, übergehen in die* $n - m + 1$ *Lösungen des gegebenen Jacobi'schen Systems* (28).

§ 5.

Zur Auffindung einer Lösung des gegebenen Jacobi'schen Systems (28) ist nur erforderlich die Kenntniss eines beliebigen Integrales der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25).

Durch den letzten Satz ist die Auffindung *aller* Lösungen eines Jacobi'schen Systems von der Form (28) zurückgeführt auf die *vollständige* Integration eines einzigen Systems von $n - m + 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bei den meisten und wichtigsten Anwendungen der Jacobi'schen Systeme, bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei dem Pfaff'schen Probleme handelt es sich aber gar nicht um die allgemeine Lösung der auftretenden Jacobi'schen Systeme, sondern es kommt immer nur darauf an, von jedem eine Lösung zu ermitteln. Daher ist es von der grössten Wichtigkeit zu untersuchen, ob man nicht, auch ohne das System (25) vollständig integrirt zu haben, eine Lösung des Jacobi'schen Systems (28) oder (29) finden könne.

Angenommen, man habe irgend ein Integral

$$F(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\; x_m \ldots x_n) = \text{Const.}$$

der Differentialgleichungen (25) gefunden. Die vollständigen Lösungen dieser Differentialgleichungen, ausgedrückt in α_1 und den Anfangswerthen von $x_m \ldots x_n$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ genügen dann der Gleichung:

$$(30) \quad U = F(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n) - F(\alpha_1^0\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m^0 \ldots x_n^0) = 0.$$

Nach § 3. genügen aber diese Lösungen, wenn man in ihnen $x_m^0 \ldots x_n^0$ als unabhängig von $\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ ansieht, auch den totalen Differentialgleichungen (15) oder den Gleichungen:

$$(31) \qquad \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_h} = b_k^h \,.$$

Sie müssen folglich auch den Gleichungen identisch genügen:

$$(32) \qquad B_h(U) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

die man durch Differentiation der Gleichung $U = 0$ nach α_h unter

Berücksichtigung der Relationen (31) erhält*). Hierbei ist die Form der Gleichung $U = 0$ ganz gleichgültig. Genau dasselbe gilt auch für jede Gleichung $V = 0$, die durch irgend welche algebraische Operationen aus der Gleichung (30) hervorgeht.

Von den $m - 1$ Gleichungen (32) ist die erste stets identisch, oder, falls man diese Gleichung nicht direct mit der Gleichung (30), sondern mit einer beliebigen anderen, dieser äquivalenten Gleichung gebildet hat, doch eine blosse algebraische Folge der Gleichung $U = 0$. Unter Umständen kann auch von den übrigen ein Theil identisch oder eine blosse algebraische Folge der Gleichung $U = 0$ sein. Diejenigen aber der Gleichungen (32), welche diese Eigenschaft nicht besitzen, sind neue Integralgleichungen des Systems (25). Mit jeder solchen neuen Integralgleichung kann man nun ganz ebenso verfahren, wie mit der Gleichung $U = 0$ und erkennt so die Möglichkeit, aus einem einzigen Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen (25) durch blosse Differentiation eine ganze Reihe neuer Integralgleichungen derselben abzuleiten, Integralgleichungen, die alle demjenigen System vollständiger Integralgleichungen dieser Differentialgleichungen angehören, aus dem sich die abhängigen Variabeln durch α_1 und die für $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$ genommenen Anfangswerthe bestimmen.

Verbindet man hiermit die Bemerkung (die auch schon im vor. § hätte benutzt werden können, um zu zeigen, dass die dort erhaltenen Ausdrücke $B_h(\chi_k)$ identisch Null sein müssen), dass sich aus Gleichungen, welche einem solchen System vollständiger Integralgleichungen angehören, niemals eine von den Anfangswerthen der abhängigen Variabeln völlig freie Gleichung ergeben kann, oder dass, wenn man eine solche Gleichung erhalten hat, dieselbe nothwendig identisch sein muss, so wird man auf den folgenden Weg geführt, *um von dem gegebenen Integrale $F =$ Const. oder $U = 0$ der Gleichungen* (25) *zu einer Lösung des J a c o b i'schen Systems* (29) *zu gelangen.*

Wir bringen durch Auflösung nach irgend einem in dem Integrale $U = 0$ vorkommenden Anfangswerthe der abhängigen Variabeln, z. B. nach x_m^0, diese Gleichung auf die Form:

---

*) Dies lässt sich wiederum auch direct einsehen. Nach Voraussetzung ist nämlich $B_1(F) = 0$, folglich auch $B_1(U) = 0$, folglich wegen:

$$B_1(B_h(f)) = B_h(B_1(f))$$

auch $B_1(B_h(U)) = 0$. Der Werth, den $B_h(U)$ für die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (25) erhält, ist also unabhängig von α_1. Dieser Werth verschwindet aber, wenn man $\alpha_1 = \alpha_1{}^0$ setzt, weil hierdurch $x_m = x_m^0, \ldots x_n = x_n^0$, daher nach (30) $\frac{\partial U}{\partial \alpha_h} = 0$ wird und zugleich jedes b_k^λ verschwindet.

$$(33) \qquad x_m^0 = U_m(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+1}^0 \ldots x_n^0)$$

und bilden hiermit die $m - 1$ Gleichungen

$$(34) \qquad B_h(U_m) = \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U_m}{\partial x_k} = 0,$$

von denen die erste identisch ist. Von diesen Gleichungen kann keine eine blosse algebraische Folge der Gleichung (33) sein, da x_m^0 in ihnen gar nicht vorkommt. Sind sie sämmtlich, ebenso wie die erste, an sich identisch, so ist unmittelbar der aus $U = 0$ erhaltene Werth U_m von x_m^0 eine gemeinsame Lösung der $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen (29). Ist dies aber nicht der Fall, so muss sich aus den Gleichungen (34) stets noch ein Theil der übrigen Anfangswerthe $x_{m+1}^0 \ldots x_n^0$ bestimmen lassen, weil es nach dem Vorhergehenden unmöglich ist, diese Anfangswerthe vollständig zu eliminiren. Nehmen wir an, dass sich $x_{m+1}^0, \ldots x_{m+h-1}^0$ aus den Gleichungen (34) bestimmen liessen, so können wir nun mit jedem der also erhaltenen Werthe

$$x_{m+1}^0 \quad = U_{m+1}^1 \quad (\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+h}^0 \ldots x_n^0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m+h-1}^0 = U_{m+h-1}^1\, (\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n\, x_{m+h}^0 \ldots x_n^0)$$

ebenso operiren, wie vorher mit der Gleichung (33) und werden hierdurch zu Gleichungen gelangen, die nicht eine blosse algebraische Folge der vorhergehenden sein können, weil sie die Grössen

$$x_m^0 \ldots x_{m+h-1}^0$$

gar nicht enthalten, die vielmehr an sich identisch sein oder ihrerseits wieder einen Theil der übrigen Anfangswerthe bestimmen müssen. Auf diese Weise wird man, falls man nicht vorher schon auf eine gemeinsame Lösung der $m - 1$ Gleichungen (29) gekommen ist, schliesslich dazu gelangen müssen, alle in dem gegebenen Integrale $U = 0$ enthaltenen Anfangswerthe der abhängigen Variabeln auszudrücken durch $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, x_m \ldots x_n$ allein. Bildet man aber nun mit irgend einem dieser Ausdrücke die $m - 1$ Gleichungen $B_h(f) = 0$, so sind diese frei von allen Anfangswerthen und müssen daher an sich identisch sein. Jeder dieser Ausdrücke ist also (was übrigens auch direct aus dem vorigen § folgt) eine Lösung des Jacobi'schen Systems (29) und folglich auch, nachdem man rückwärts für

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$$

ihre Werthe aus den Substitutionen (23) gesetzt hat, eine Lösung des gegebenen Jacobi'schen Systems (28).

Um also eine Lösung dieses Jacobi'schen Systems von $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln zu finden, ist es nur nöthig, irgend ein Integral der $n - m + 1$ ge-

wöhnlichen Differentialgleichungen (25) *zu kennen.* Nach der vorzüglichsten der früheren Methoden*) dagegen erforderte die Auffindung einer solchen Lösung die Kenntniss je eines Integrales von $m-1$ Systemen, von denen das erste aus $n-m+1$, jedes der übrigen höchstens aus ebensoviel gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht.

§ 6.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und das Pfaff'sche Problem.

Jacobi hat bekanntlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt auf die Aufgabe, von einer Reihe Jacobi'scher Systeme linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (28) successive je eine Lösung zu finden. Kommen in der gegebenen partiellen Differentialgleichung, die man frei von der unbekannten Function selbst annehmen kann, n unabhängige Variable vor, so bestehen diese Jacobi'schen Systeme resp. aus:

$$1,\ 2,\ \ldots m-1,\ \ldots n-1$$

linearen partiellen Differentialgleichungen mit

$$2n-1,\ 2n-2,\ \ldots 2n-m+1,\ \ldots n+1$$

unabhängigen Variabeln.

Nach der im vor. § auseinandergesetzten Methode *erfordert daher die vollständige Lösung der gegebenen Gleichung nur die Ermittelung eines Integrales von je einem System von*

$$2(n-1),\ 2(n-2),\ \ldots 2(n-m+1),\ \ldots 2$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, während man früher**) der Kenntniss bedurfte je eines Integrales für ein System von $2(n-1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und für je 2 Systeme von $2(n-2), \ldots 2(n-m+1), \ldots 2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen und in ungünstigen Fällen selbst diese Anzahl von Integrationen noch nicht ausreichend sein konnte.

Die Integration gestaltet sich, wenn man die einfachste Form der Substitutionen (23) wählt, hier folgendermassen:

Es hat***) allgemein das $(m-1)^{te}$ Jacobi'sche System die Form:

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial q_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial p_h}{\partial q_\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial p_h}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \right) = 0 \tag{35}$$

$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

*) Vgl. Clebsch, Crelle J. 65, p. 261.

**) Vgl. Clebsch, Crelle J. 65, p. 265.

***) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik p. 292, Crelle J. 60, p. 23.

worin $p_1 p_2 \dots p_{m-1}$ aus den vorhergehenden Jacobi'schen Systemen bestimmte Functionen von $q_1 q_2 \dots q_n p_m \dots p_n$ sind, für welche die Ausdrücke

$$A_h(A_i(f)) - A_i(A_h(f))$$

identisch verschwinden.

Setzt man nun:

(36) $q_1 = \alpha_1, \; q_2 = q_2^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_2, \dots q_{m-1} = q_{m-1}^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_{m-1}$,

worin $\alpha_1^0 \, q_2^0 \dots q_{m-1}^0$, unter der Voraussetzung, dass die Functionen $p_1 p_2 \dots p_{m-1}$ für

$$q_1 = \alpha_1^0, \; q_2 = q_2^0, \; \dots q_{m-1} = q_{m-1}^0$$

bestimmte endliche Werthe behalten, belielig gewählte Constanten sind, und eliminirt hiermit $q_1 q_2 \dots q_{m-1}$ aus den Ausdrücken:

$$(37) \qquad \begin{cases} w_1 = p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots \alpha_{m-1} p_{m-1} \\ w_i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) p_i \quad , \quad i > 1, \end{cases}$$

so verwandelt man hierdurch das vorgelegte Jacobi'sche System (35) in das folgende:

$$(38) \qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial w_h}{\partial q_\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial w_h}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \right) = 0.$$

Von diesem kann man nach den Auseinandersetzungen des vor. § eine Lösung finden, sobald man ein Integral des Systems von $2(n-m+1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kennt:

$$(39) \qquad \frac{\partial q_\lambda}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial w_1}{\partial p_\lambda} \; , \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial w_1}{\partial q_\lambda} \, ,$$

$$\lambda = m, \; m+1, \dots n$$

und braucht daher in dieser Lösung nur:

$$\alpha_1 = q_1 \, , \; \alpha_2 = \frac{q_2 - q_2^0}{q_1 - \alpha_1^0} \, , \; \dots \; \alpha_{m-1} = \frac{q_{m-1} - q_{m-1}^0}{q_1 - \alpha_1^0}$$

zu setzen, um aus ihr eine Lösung des gegebenen Systems (35) zu erhalten.

In ganz analoger Weise, wie bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wird auch bei dem Pfaff'schen Probleme, d. h. bei der Aufgabe, die gegebene lineare Differentialgleichung

$$\chi_1 \, dx_1 + \chi_2 \, dx_2 + \cdots \chi_{2n} \, dx_{2n} = 0$$

durch n Gleichungen zu integriren, durch das angegebene Verfahren die Anzahl der erforderlichen Integrationen fast um die Hälfte vermindert. Man erkennt nämlich ohne Schwierigkeit aus der Methode, die Herr Clebsch zur Lösung dieses Problems vorgeschrieben hat*), dass sich dasselbe zurückführen lässt auf die Auffindung je einer Lösung

*) Vgl. namentlich Crelle J. 61, p. 153 und 65, p. 266.

von n Jacobi'schen Systemen von der Form (28), die resp. bestehen aus $1, 2, \dots n$ linearen partiellen Differentialgleichungen mit je $2n$ unabhängigen Variabeln. Nach dem Vorhergehenden hängt die Auffindung einer Lösung des i^{ten} dieser Systeme nur ab von der Ermittelung eines Integrales von $2n - i$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aber dieses i^{te} System, welches erst aufgestellt werden kann, nachdem man von jedem der vorhergehenden eine Lösung gefunden hat, besitzt in Folge der Art, wie es aus diesen entsteht, selbst $i - 1$ bekannte Lösungen. Keine von diesen Lösungen ist diejenige, die man wirklich braucht, — denn diese muss unabhängig sein von jenen — aber jede derselben liefert uns, wenn wir sie (ausgedrückt in den neuen Variabeln α) einer Constanten gleich setzen, ein Integral jener $2n - i$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Man kennt also von vornherein $i - 1$ Integrale dieser Gleichungen und kann mittelst derselben die $2n - i$ Differentialgleichungen zurückführen auf

$$2n - i - (i - 1) = 2n - 2i + 1.$$

Die Auffindung einer brauchbaren Lösung des i^{ten} Jacobi'schen Systems verlangt demnach nur die Kenntniss eines Integrales von

$$2n - 2i + 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Zur vollständigen Lösung des Pfaff'schen Problems ist es folglich ausreichend, ein Integral von je einem System von*

$$2n - 1,\ 2n - 3,\ 2n - 5,\ \dots 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu kennen.

§ 7.

Anderer Beweis des Satzes von § 3.

Unter Voraussetzung der Identitäten:

$$A_i\left(a_k^h\right) - A_h\left(a_k^i\right) = 0 \tag{40}$$

besitzen, wie Herr Clebsch nachgewiesen hat*), die $m - 1$ linearen partiellen Differentialgleichungen

$$A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{41}$$

$n - m + 1$ von einander unabhängige Lösungen, die durch

$$f_m,\ f_{m+1},\ \dots f_n$$

bezeichnet werden mögen.

*) Crelle J. 65, p. 260.

Da, wenn man

$$f = \varphi\,(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, f_m\, f_{m+1} \ldots f_n)$$

setzt:

$$A_h(f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} A_h(f_k)\,\frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}$$

wird, so sieht man, dass diese Lösungen von einander unabhängig sein müssen in Bezug auf $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$.

Setzt man daher:

$$f_m = c_m,\; f_{m+1} = c_{m+1}, \ldots f_n = c_n\,, \tag{42}$$

so müssen sich aus diesen Gleichungen $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ bestimmen lassen als Functionen der Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ und der Grössen $c_m\, c_{m+1} \ldots c_n$.

Betrachtet man die letzteren als willkürliche Constanten, so genügen die aus (42) folgenden Werthe von $x_m \ldots x_n$ den $n - m + 1$ Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial f_k}{\partial x_\lambda}\left(dx_\lambda - \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h\, dx_h\right) = 0,$$

die sich durch vollständige Differentiation der Gleichungen (42) unter Benutzung der Identitäten $A_h(f_k) = 0$ ergeben. Da aber die Determinante dieser Gleichungen

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\,\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

an sich nicht Null ist und daher auch nach Substitution jener Werthe nicht identisch verschwinden kann, so folgt, dass dieselben den $n-m+1$ linearen totalen Differentialgleichungen Genüge leisten müssen:

$$dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h\, dx_h\,. \tag{43}$$

Bestehen daher die Identitäten (40), so giebt es stets $n - m + 1$ Functionen von $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ und von $n - m + 1$ willkürlichen Constanten $c_m\, c_{m+1} \ldots c_n$, unabhängig von einander in Bezug auf die letzteren, welche, für $x_m\, x_{m+1} \ldots x_n$ gesetzt, den Gleichungen (43) identisch genügen.

Bezeichnen wir diese Lösungen des Systems (43) durch

$$x_\lambda = \varphi_\lambda\,(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\; c_m \ldots c_n) \tag{44}$$

und verstehen unter $x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0$ unbestimmte Constanten, so müssen sich hiernach die $n - m + 1$ Gleichungen:

$$x_\lambda^0 = \varphi_\lambda\,(x_1^0\, x_2^0 \ldots x_{m-1}^0\; c_m \ldots c_n)$$

stets auflösen lassen nach $c_m \ldots c_n$. Durch Substitution dieser Werthe nehmen die Lösungen (44) die Form an:

(45) $$x_\lambda = \psi_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0),$$

wo, in Folge ihrer Entstehungsart, die Function ψ_λ für

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ \ldots x_{m-1} = x_{m-1}^0$$

sich auf x_λ^0 reduciren muss.

Führt man nun für $x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}$ die neuen Variabeln $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ durch die $m-1$ Gleichungen ein

(46) $$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_h(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1})$$

wodurch:

(47) $$\psi_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0) = \Psi_\lambda(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, \alpha_1^0\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0)$$

werden möge, so erhält man aus (45) die Lösungen:

(48) $$x_\lambda = \Psi_\lambda(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\, \alpha_1^0\, x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0)$$

des Systems linearer totaler Differentialgleichungen zwischen $x_m \ldots x_n$ und $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$:

(49) $$dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} b_\lambda^h\, d\alpha_h,$$

in welches das System (43) durch die Substitutionen (46) übergeht.

Die Gleichungen (48) genügen hiernach im Besondern auch den $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

(50) $$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_1} = b_\lambda^1.$$

Hat man aber die Constante α_1^0 so gewählt, dass keine der $m-1$ Functionen f_h unendlich oder unbestimmt wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$, so wird für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ nach (46) jedes $x_h = x_h^0$ und daher nach (47) $\Psi_\lambda = x_\lambda^0$.

Es sind folglich die Gleichungen (48) diejenigen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (50), die sich für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ auf die dem Anfangswerth α_1^0 von α_1 zugehörigen Werthe der abhängigen Variabeln x_λ reduciren.

Umgekehrt muss es daher stets möglich sein, die Integrationsconstanten in einem System vollständiger Lösungen der $n-m+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen (50) so zu bestimmen, dass diese Lösungen für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ die willkürlich bleibenden Werthe $x_m^0, x_{m-1}^0 \ldots x_n^0$ annehmen, und die so erhaltenen Lösungen müssen, wenn man darin diese Anfangswerthe als unabhängig von $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_{m-1}$ ansieht, zugleich die totalen Differentialgleichungen (49) erfüllen, müssen also, nachdem man in denselben rückwärts für $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ ihre Werthe aus den Substitutionen (46) gesetzt hat, auch den totalen Differentialgleichungen (43) Genüge leisten.

Leipzig, Februar 1872.

Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien.

Von Karl Von der Mühll in Leipzig.

Es soll in dem Nachfolgenden eine Lösung der Aufgabe versucht werden:

Auf Grund der Undulationstheorie die Gesetze, wonach ebene Lichtwellen an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger unkrystallinischer Medien reflectirt und gebrochen werden, streng aus den Principien der Mechanik abzuleiten.

Denken wir uns zwei homogene elastische Medien, die in irgend einer Fläche aneinander grenzen, im Uebrigen unbegrenzt sind, und denken wir uns ferner die kleinsten Theile, die Molecüle der beiden Medien in Schwingungen um ihre Gleichgewichtslagen versetzt, so liefert die Anwendung der mechanischen Principien erstens für jedes der beiden Medien drei allgemeine Differentialgleichungen, welchen die Projectionen der Verrückung nach den Coordinatenaxen, die drei Verrückungen eines Theilchens aus seiner natürlichen Gleichgewichtslage als Functionen des Orts und der Zeit Genüge leisten müssen, und zweitens sechs Grenzgleichungen zwischen den Werthen der Verrückungen und ihrer Differentialquotienten nach der Normale für die gemeinschaftliche Grenzfläche der beiden Medien; von diesen sechs Grenzgleichungen enthalten die drei erstern die Bedingung, dass die beiden Medien immer mit einander in Berührung stehen, dass also die Werthe der Verrückungen beim Durchgang durch die Grenze keinen Sprung erleiden, und die drei letztern die Bedingung, dass der moleculare Druck auf beiden Seiten der Grenzfläche derselbe sei, dass also auch die Werthe der Moleculardruckcomponenten beim Durchgang durch die Grenze keinen Sprung erleiden.

Diesen sechs Grenzgleichungen kann in dem Falle, dass eine ebene transversale Welle auf die ebene Grenze der beiden Medien trifft, nur dann streng Genüge geleistet werden, wenn eine reflectirte und eine gebrochene longitudinale Welle neben den transversalen angenommen wird; das Auftreten von solchen longitudinalen Wellen steht aber in

Widerspruch mit den durch Beobachtung festgestellten Gesetzen der Lichterscheinungen.

Es ist nun das Problem der Reflexion und Brechung auf Grund zweier verschiedener Annahmen theoretisch behandelt worden, zuerst von Fresnel*) auf Grund der einen, und später, ungefähr gleichzeitig, von F. E. Neumann**) und Mac Cullagh***) auf Grund der andern Annahme; wegen des Nähern verweise ich auf die Neumann'sche Abhandlung. Beide Herleitungen haben das gemein, dass den sechs oben erwähnten Grenzgleichungen bloss zum Theil Genüge geleistet wird, und dass zur Bestimmung der Constanten ein allgemeines Princip, welches sich bei einer streng mechanischen Behandlung des Problemes als Folge ergeben muss, zu Hilfe genommen wird, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Verschiedenheit der beiden Theorien beruht wesentlich darauf, dass Fresnel die Annahme macht, die Dichtigkeit des Lichtäthers in den verschiedenen durchsichtigen Medien verhalte sich umgekehrt wie das Quadrat der Wellenlänge, dagegen sei die Elasticität des Lichtäthers überall dieselbe, während Neumann und Mac Cullagh gerade umgekehrt die Dichtigkeit des Lichtäthers überall gleich und seine Elasticität verschieden annehmen.

Die Beobachtung hat bis jetzt zu keiner Entscheidung zwischen den beiden Theorien geführt; es hat sich vielmehr eine Uebereinstimmung sowohl der Fresnel'schen, als der Neumann'schen Formeln mit den beobachteten Thatsachen ergeben, sobald mit Fresnel angenommen wird, dass die Schwingungen eines geradlinig polarisirten Strahls senkrecht auf die Polarisationsebene gerichtet sind, oder mit Neumann, dass sie in dieser Ebene stattfinden. Und zwar haben, je nachdem die eine oder die andere dieser Annahmen gemacht wird, die Beobachtungen die Fresnel'schen oder die Neumann'schen Formeln als jedenfalls angenähert richtig erwiesen für die folgenden Grössen: Die geradlinige Polarisation und die Drehung der Polarisationsebene durch partielle, die elliptische Polarisation durch totale Reflexion. Es muss also jede Theorie, welche mit beobachteten Thatsachen nicht in Widerspruch stehen soll, auf Formeln für die genannten Grössen führen, welche mit den Fresnel'schen oder mit den Neumann'schen angenähert übereinstimmen.

---

*) Mémoire sur la loi des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée. Ann. de chim. et de phys. XLVI. 1831. — Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel. No. XXX. T. I. p. 767. — Lu à l'Ac. des sciences le 7 janvier 1823.

**) Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird. Gel. in der Ac. der Wsch. am 7. Dec. 1835. Abhdlg. der Berl. Ac. vom Jahre 1835.

***) Tr. Roy. Irish Acad., XVII, pt. II, XVIII, pt. I, XXI.

Später hat Cauchy*) eine Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes streng aus mechanischen Principien abzuleiten versucht. Das Charakteristische dieser Theorie besteht in den folgenden beiden Punkten:

Die Bedingung, dass die drei Componenten des molecularen Drucks auf beiden Seiten der Grenze denselben Werth haben, ist ersetzt durch die Bedingung, dass eine solche Gleichheit bestehen soll für die Differentialquotienten der drei Verrückungen nach der Normale an die Grenze; zweitens soll in den beiden homogenen Aethermedien das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale Wellen eine negative Grösse sein.

Auf dieser Grundlage ist Cauchy zu Formeln für die Reflexion und Brechung gelangt, welche mit den Fresnel'schen in vollständige Uebereinstimmung zu bringen sind, welche ferner auch solche Abweichungen von diesen Formeln erklären, wie sie von Jamin**) sind beobachtet worden.

Doch ist die Darstellung, welche Cauchy von seiner Theorie gegeben hat, in mancher Hinsicht unvollständig und sehr wenig übersichtlich; fortwährende Wiederholungen und Aenderungen in dem Gang der Entwicklung machen es namentlich schwer, aus der grossen Zahl von Abhandlungen diejenigen, welche wesentlich Neues enthalten, und aus denselben die Theorie in ihrem ganzen Zusammenhange und in ihrer endgiltigen Form herauszufinden. Es haben daher diejenigen ein wesentliches Verdienst, welche die Cauchy'sche Theorie vollständig auszuarbeiten und in einfacher, übersichtlicher Form darzustellen unternommen haben, und zwar theilweise zu einer Zeit, wo von Cauchy nur die Endformeln mit einigen Andeutungen über den Gang seiner Entwicklung veröffentlicht waren; unter diesen Nachfolgern von Cauchy sind besonders zu nennen A. von Ettinghausen***), Beer†), Eisenlohr††), Briot†††).

Dieselben haben jedoch ihr Augenmerk mehr darauf gerichtet, die Theorie aus den angenommenen Grenzgleichungen, den sogenannten Continuitätsbedingungen, zu entwickeln, als die Annahme dieser Grenz-

---

*) Siehe bes.: Ex. d'analyse et de phys. math., Tome I. 1840. p. 133 und 212. — Mém. de l'Inst., section de l'Ac. des sc., T. XXII, 1850, p. 17. — Ferner die betreffenden Abhdlg. in den Comptes Rendus des séances de l'Ac. des Sc., Jahrgänge 1839, 40, 49 und 50.

**) Ann. de chim. et de phys., III s., t. 29, 30 und 31.

***) Pogg. Ann. L. 1840. — Sitzber. der Wiener Ac. d. Wsch., B. XVIII, 1855.

†) Pogg. Ann. XCI. XCII. 1851.

††) Pogg. Ann. CIV. 1858.

†††) Comptes Rendus LXIII. Liouv. Journ. XI. 1866.

gleichungen zu begründen. Dieser letztere Punkt ist aber der entscheidende und bedarf einer eingehendern Discussion.

Der Weg, den Cauchy und seine Nachfolger gegangen sind, ist im Wesentlichen der folgende:

Es wird ein allmähliger, stetiger Uebergang von dem einen Medium zum andern angenommen in Bezug auf Dichtigkeit und Elasticität, und zwar soll dieser Uebergang innerhalb einer Schicht stattfinden, welche die beiden homogenen Medien von einander trennt; die Dicke dieser Uebergangsschicht wird schliesslich sehr klein im Vergleich zu einer Wellenlänge gesetzt. Dann werden durch Betrachtung der Wirkungen, welche die einzelnen Aethermolecüle auf einander ausüben, allgemeine Differentialgleichungen für die sehr kleinen Schwingungen dieser Aethermolecüle abgeleitet; die so erhaltenen drei Gleichungen sind linear und homogen in Bezug auf die Differentialquotienten der drei Verrückungen nach dem Ort und nach der Zeit und bestimmen bei Weglassung von Gliedern höherer Ordnung, was für die hier anzustellende Betrachtung ohne Bedeutung ist, die zweiten Differentialquotienten der Verrückungen nach der Zeit als Summen der Produkte von gewissen Coefficienten in die zweiten und in die ersten Differentialquotienten der Verrückungen nach dem Ort. Die eben erwähnten Coefficienten sind in dem allgemeinen Falle eines nicht homogenen Mediums Functionen des Orts; sie sind gegeben in der Form von Summen, welche auszudehnen sind über alle Molecüle, die auf ein an einem bestimmten Orte befindliches Molecül eine Wirkung ausüben, und es hangen die Grössen unter den Summenzeichen ab von der Kraft, welche zwei Molecüle in einer bestimmten Entfernung aufeinander ausüben, und von der Lage der Molecüle im natürlichen Gleichgewichtszustand. Und zwar sind für die Coefficienten der zweiten Differentialquotienten nach dem Ort die Grössen unter den Summenzeichen proportional einem Ausdruck zweiten oder vierten Grades in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten, welche die Lage der Molecüle gegen einander bestimmen, dagegen für die Coefficienten der ersten Differentialquotienten die Grössen unter den Summenzeichen proportional einem Ausdruck dritten Grades. Für ein homogenes Medium sind sämmtliche Coefficienten constant, und für ein homogenes unkrystallinisches Medium müssen alle Summen verschwinden, wo die Grösse unter dem Summenzeichen proportional einer ungeraden Potenz einer der relativen Coordinaten ist. Somit fallen aus den Differentialgleichungen für ein homogenes unkrystallinisches Medium die ersten Differentialquotienten der Verrückungen weg; es reduciren sich ferner die Coefficienten der zweiten Differentialquotienten auf zwei. Diese seien h und k, und zwar bezeichne h die Summe mit dem Ausdruck zweiten Grades in Bezug auf die relativen Coordinaten und k die

Summe mit dem Ausdruck vierten Grades. Es ergiebt sich dann k als das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die ebenen transversalen Wellen, welche sich in dem homogenen unkrystallinischen Medium fortpflanzen können, und $h + 3k$ als das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die ebenen longitudinalen Wellen.

Beschränken wir also die Betrachtung auf den Fall unkrystallinischer Medien, und nehmen wir den oben angegebenen stätigen Uebergang von dem einen homogenen Medium zum andern an, so haben wir auf den beiden Seiten der Uebergangsschicht für die Verrückungen Differentialgleichungen mit zwei Constanten h und k; diese haben für die beiden Medien endlich verschiedene Werthe. In der Uebergangsschicht dagegen, wo das Medium nicht homogen ist, haben wir Differentialgleichungen mit einer viel grössern Anzahl von Coefficienten; neben den zweiten Differentialquotienten der Verrückungen nach dem Ort kommen noch die ersten vor; es sind ferner die Coefficienten nicht constant; sondern sie sind Functionen der Normale an die Grenze. Wird nun die Dicke der Uebergangsschicht sehr klein gegen eine Wellenlänge gesetzt, und wird ferner angenommen, es können in diesem Falle alle Coefficienten nur endliche, nicht aber zum Theil innerhalb der Uebergangsschicht sehr grosse Werthe erhalten, so folgt aus dem Princip der Continuität, dass die drei Verrückungen und ihre Differentialquotienten nach der Normale zu beiden Seiten der Grenze denselben Werth haben müssen.

So gelangt man zu den Grenzgleichungen, welche der Cauchy'schen Theorie zu Grunde liegen, und die zweite Annahme, welche die Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung wesentlich mitbedingt, ist die, dass für ein homogenes unkrystallinisches Medium $h + 3k$ einen negativen Werth habe, also (da k nothwendig positiv sein muss, damit die Fortpflanzung transversaler Wellen möglich sei), dass h negativ und zwar

$$-h > 3k$$

sei. Diese Annahme führt zu einem rein imaginären Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen; dadurch werden die reflectirten und gebrochenen longitudinalen Strahlen sogenannte verschwindende Strahlen (rayons évanescents); sie versetzen nämlich das Medium in eine Bewegung, welche mit der Entfernung von der Grenze ausserordentlich rasch abnimmt und in jeder messbaren Entfernung verschwindend klein ist; daher sind solche Strahlen ohne alle Bedeutung, wenn es sich um die Erhaltung der lebendigen Kraft handelt.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch bemerken, dass eine ganz ähnliche Theorie der Reflexion und Brechung, wie die eben besprochene

Cauchy's, um dieselbe Zeit von Green*) ist entwickelt und dann von Haughton**) etwas modificirt worden; der Ausgangspunkt ist derselbe, namentlich was die angenommenen Grenzgleichungen betrifft; die Endformeln aber weichen von denen Cauchy's ab, weil Green die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen nicht imaginär, sondern unendlich gross angenommen hat, und Herr Haughton sehr gross.

Nun ist aber wenigstens eine der beiden Annahmen, auf welche sich die Cauchy'sche Theorie gründet, nicht aufrecht zu erhalten, sobald man elastische Differentialgleichungen ableitet durch Betrachtung des molecularen Drucks. Und zwar ist es in Bezug auf diesen Punkt ganz gleichgültig, ob man bei der Entwicklung der Ausdrücke für die Componenten des molecularen Drucks zurückgeht auf die zwischen den einzelnen Molecülen wirkenden Kräfte, wie dies Poisson***) und in seinen frühesten Arbeiten über Elasticitätstheorie auch Cauchy gethan haben, oder ob man, wie es in den bekannten Lehrbüchern der Elasticitätstheorie von Lamé und von Clebsch geschieht, über die Wirkung der einzelnen Molecüle auf einander gar keine Voraussetzung macht†). Geht man nämlich aus von den Ausdrücken für die Componenten des molecularen Drucks durch die ersten Differentialquotienten der Verrückungen nach dem Ort, und macht man wieder die Annahme eines continuirlichen Uebergangs, so sind die Coefficienten, welche in jenen Ausdrücken für die Moleculardruckcomponenten vorkommen, in den beiden homogenen Medien als Constanten, dagegen in der Uebergangsschicht als stetig sich ändernde Functionen der Normale an die Grenze zu betrachten; ferner müssen sich nach dem Princip der Continuität die Werthe der Verrückungen und die der Druckcomponenten, oder, was dasselbe ist, da die Coefficienten sich stetig ändern, die Werthe der Verrückungen und ihrer Differentialquotienten nach der Normale beim Durchgang durch die Grenzschicht stetig ändern; dann erhält man für den Fall einer unendlich dünnen Uebergangsschicht die Bedingungen, dass erstens wieder die Componenten der Verrückung, zweitens aber die Componenten des molecularen Drucks auf beiden Seiten der Grenze denselben Werth haben; man gelangt also zu genau denselben Grenzbedingungen, wie in dem Falle, wo man die Annahme macht, dass die beiden homogenen Medien in einer Fläche an einander grenzen. Es können jetzt die Differential-

*) Cambridge Trans. VII. pt. I. 1839.

**) Phil. Mag. (4), VI. — Thomson J. 1853 und 54.

***) Mém. de l'Inst., VIII. 1829.

†) Bekanntlich ist die Anregung dieser Betrachtungsweise auch auf Cauchy zurückzuführen.

quotienten der Verrückungen nach der Normale nur dann auf beiden Seiten der Grenze denselben Werth haben, wenn die Elasticität der beiden Medien dieselbe ist. Somit werden wir, wenn wir die Cauchy'schen Grenzbedingungen mit den Betrachtungen über den molecularen Druck in Einklang bringen wollen, zu der Fresnel'schen Annahme gleicher Elasticität geführt.

Sucht man nun den Grund der Verschiedenheit auf, welche das angegebene allgemeine Resultat je nach der einen oder nach der andern Behandlung des Problemes besitzt, so findet man denselben in der verschiedenen Form der Differentialgleichungen für die Uebergangsschicht. Cauchy berücksichtigt keine Abhängigkeit zwischen den Coefficienten der ersten und denen der zweiten Differentialquotienten in seinen Differentialgleichungen; leitet man dagegen aus den Ausdrücken für den molecularen Druck die Differentialgleichungen für die Uebergangsschicht ab, so erhalten die Coefficienten der Glieder mit den ersten Differentialquotienten der Verrückungen die Form von Differentialquotienten der Coefficienten, welche in den Gliedern mit den zweiten Differentialquotienten vorkommen, nach der Normale an die Grenze. Sollen nun die letztern Coefficienten bei einem Durchgang durch die Grenze ihren Werth sehr rasch ändern, wie dies bei einer endlichen Verschiedenheit der beiden homogenen Medien in Bezug auf Elasticität und bei einer sehr kleinen Dicke der Uebergangsschicht der Fall sein muss, so erhalten die Differentialquotienten derselben nach der Normale nothwendig innerhalb der Uebergangsschicht sehr grosse Werthe; dies steht aber in Widerspruch mit der von Cauchy, allerdings stillschweigend, gemachten Voraussetzung, dass keiner der Coefficienten einen sehr grossen Werth annehme*).

---

*) Um dies an einem einfachen Beispiel deutlich zu machen, sei die Grösse u (eine Verrückung) stetige Function der unabhängigen Variabeln z (der Normale an die Grenze). Wir haben einmal eine Gleichung von der Form:

$$A\frac{d^2u}{dz^2}+B\frac{du}{dz}=0,$$

wo die Grössen A und B gegebene Functionen von z sind, und wo für die beiden Grenzen 0 und c (Dicke der Uebergangsschicht) von z A die Werthe A_1 und A_2 annimmt, B verschwindet, das andre Mal dagegen eine Gleichung von der Form:

$$A\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{dA}{dz}\frac{du}{dz}=0,$$

wo für die beiden Grenzen von z A wieder die beiden Werthe A_1 und A_2 annimmt und $\frac{dA}{dz}$ verschwindet. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\int_0^c\frac{d^2u}{dz^2}\,dz=-\int_0^c\frac{B}{A}\frac{du}{dz}\,dz.$$

Die erste der beiden Annahmen Cauchy's liesse sich demnach mit den Betrachtungen über den molecularen Druck durch Annahme gleicher Elasticität für alle Aethermedien vereinigen; die Verschiedenheit in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen wäre dann allein bedingt durch die Verschiedenheit der Dichtigkeit. Allein die zweite Annahme, dass in einem homogenen Aethermedium das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale Wellen einen negativen Werth erhalte, ist mit den Betrachtungen über den molecularen Druck nicht verträglich; diese bedingen, wenn überhaupt ein Gleichgewichtszustand des Mediums möglich sein soll, einen reellen Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen. Damit fällt aber die Cauchy'sche Theorie der Reflexion und Brechung.

Man führt nun allerdings zur Begründung dieser Theorie wohl an, es seien die Cauchy'schen elastischen Differentialgleichungen, wenigstens in gewisser Beziehung, allgemeiner, als diejenigen, welche man aus der Betrachtung des molecularen Drucks ableite, es führe die Betrachtung dieses molecularen Drucks eben zu einer Beschränkung, welche man vermeiden könne, so lange es sich um ein unbegrenztes Medium handle. Dann erhebt sich aber die Frage, ob eine solche Beschränkung nothwendig sei, oder nicht, und diese Frage möchte nicht ohne Weiteres zu verneinen sein. Denn es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Bedingungen, welche nach Cauchy wegen des natürlichen Gleichgewichtszustandes erfüllt sein müssen, nicht hinreichende Bedingungen für das Gleichgewicht sind; es muss vielmehr, damit ein stabiler Gleichgewichtszustand des Mediums möglich sei, die von einem einzelnen Molecüle auf ein anderes ausgeübte Kraft

---

Erhält nun innerhalb der Grenzen 0 und c von z $\frac{B}{A}$ ebensowenig, wie $\frac{du}{dz}$ einen sehr grossen Werth, so wird das Integral auf der rechten Seite sehr klein, sobald c sehr klein ist; wir erhalten also, wenn c sehr klein gesetzt wird:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_1 = \left(\frac{du}{dz}\right)_2,$$

wo der Index 1 bezeichnet, dass $z = 0$, und der Index 2, dass $z = c$ zu setzen sei. Dagegen folgt aus der zweiten Gleichung:

$$\int_0^c \frac{d \, . \, A \frac{du}{dz}}{dz} dz = 0,$$

folglich

$$A_1 \left(\frac{du}{dz}\right)_1 = A_2 \left(\frac{du}{dz}\right)_2;$$

es kann also der Differentialquotient von u nur dann für die beiden Grenzen von z denselben Werth annehmen, wenn A_1 gleich A_2 ist.

jedenfalls gewisse besondere Eigenschaften besitzen, Eigenschaften, welche für die Erfüllung der Cauchy'schen Gleichgewichtsbedingungen ohne alle Bedeutung sind, welche dagegen einen wesentlichen Einfluss auf die Werthe der erwähnten Coefficienten ausüben müssen. Deshalb scheint mir gerade der Punkt, dass die Poisson'sche Entwicklung auf eine Anzahl weiterer Bedingungen für das Gleichgewicht führt, und zwar auf solche Bedingungen, welche für die zwischen den Molecülen wirksamen Kräfte ganz besondere Eigenschaften bedingen, für die Giltigkeit der von Poisson abgeleiteten Gleichungen zu sprechen, und es scheint mir im höchsten Grade misslich, eine Theorie darauf zu gründen, dass die Coefficienten in den Cauchy'schen elastischen Differentialgleichungen Werthe annehmen, welche mit den durch Betrachtung des molecularen Druckes erhaltenen Resultaten nicht verträglich sind*). Deshalb kann ich die Theorie der Reflexion und

---

*) Wird mit Cauchy angenommen, es habe die Wirkung zweier Molecüle auf einander die Richtung der Verbindungslinie, ist ferner die Kraft, welche ein Molecül auf ein anderes in der Entfernung r ausübt, gleich $f(r)$, bezeichnen endlich für den Fall des natürlichen Gleichgewichts x, y, z die relativen Coordinaten des Orts, wo sich das wirkende Molecül befindet, in Bezug auf den Ort, wo die Wirkung ausgeübt wird, so ergeben sich als für das Gleichgewicht nothwendige Bedingungen:

$$0 = \Sigma f(r) \frac{x}{r}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Summe ist auszudehnen über alle Molecüle, welche auf ein bestimmtes Molecül eine Wirkung ausüben. Es sind dies die einzigen Bedingungen, auf welche Cauchy's Entwicklung führt. Diese Bedingungen sind nun für ein homogenes unkrystallinisches Medium, wo die Summen mit ungeraden Potenzen der relativen Coordinaten x, y, z verschwinden, bei jeder beliebigen Annahme über die Natur der Function f erfüllt; es kann aber z. B. stabiles Gleichgewicht unmöglich stattfinden, wenn zwischen den Molecülen eine Anziehung umgekehrt proportional einer ganzen Potenz der Entfernung wirkt. Die Poisson'sche Theorie dagegen führt, wenn man dieselbe Bezeichnung anwendet, noch auf weitere Bedingungen für das Gleichgewicht von der folgenden Form:

$$0 = \Sigma \frac{f(r)}{r} x^2, \quad \text{u. s. w.,}$$

also auf Bedingungen, welche die Natur der Function f wesentlich beschränken; nach diesen Bedingungen muss für ein homogenes unkrystallinisches Medium die oben mit h bezeichnete Constante verschwinden; sie kann also einen negativen Werth nicht besitzen.

Es liegt nun allerdings sehr nahe, eine Abstossung zwischen den Aethermolecülen anzunehmen; es muss dann die Function f eine negative Grösse sein, womit h den verlangten negativen Werth erhält, und die Unmöglichkeit eines stabilen Gleichgewichtszustandes ergiebt sich nicht mehr unmittelbar. Aber auch die Möglichkeit eines solchen ist durchaus nicht erwiesen, und wenn man diesen Punkt auf dem von Cauchy eingeschlagenen Wege weiter verfolgen will, so stösst man auf grosse Schwierigkeit. Denn es wird nothwendig, die Bedingungen für das

Brechung, wie sie von Cauchy und seinen Nachfolgern ist entwickelt worden, nicht für befriedigend halten.

In dem Auftreten der longitudinalen Wellen liegt die wesentliche Schwierigkeit, welche jede auf rein mechanische Principien gegründete Theorie der Reflexion und Brechung zu überwinden hat. Diese Schwierigkeit soll nun hier dadurch beseitigt werden, dass von vornherein die Annahme gemacht wird, die zu betrachtenden Aethermedien seien incompressibel, gerade so, wie in der Hydrodynamik die tropfbaren Flüssigkeiten als incompressibel betrachtet werden. Wie auch das Resultat ausfallen mag, wird es nicht ohne Interesse sein, eine Behandlung des so wichtigen Problems auch auf diesem Wege versucht zu haben.

Die Annahme, dass der Lichtäther incompressibel sei, ist von Carl Neumann in die mathematische Theorie des Lichtes eingeführt und in dem § 8. seiner Schrift: „Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes" weiter entwickelt worden. Indem ich wegen der näheren Begründung des eingenommenen Standpunktes auf jene Schrift verweise, hebe ich nur die Annahmen hervor, welche der Betrachtung zu Grunde liegen*):

„I. Das Aethermedium besteht aus einem System äusserst feiner Theilchen, welche sowohl ihren gegenseitigen Einwirkungen, als auch den Einwirkungen der ponderabeln Molecüle unterworfen sind. Diese Einwirkungen finden statt in der Richtung der Entfernung; hängen ferner, was ihre Intensität anbelangt, von der Grösse der Entfernung ab; und werden Null, sobald die Entfernung eine gewisse sehr kleine Länge übersteigt."

„II. Ausserdem hat der Aether die Eigenschaft, denjenigen Bewegungen, welche mit einer Aenderung seiner Dichtigkeit verknüpft sind, mit unverhältnissmässig viel grösserer Energie zu widerstehen, als andern Bewegungen, bei welchen solches nicht der Fall ist. Die Dichtigkeit des Aethers ist demnach sehr starken Kräften gegenüber allerdings veränderlich, hingegen schwachen Kräften gegenüber so gut wie unveränderlich".

Gleichgewicht von endlichen begrenzten Theilen des unendlichen Mediums aufzusuchen; will man das aber thun, so sind die Bedingungen für das Gleichgewicht der Molecüle, welche sich in der Nähe der Grenze befinden, und auf welche äussere Wirkungen ausgeübt werden, mit in Betracht zu ziehen; dadurch wird man genöthigt, den molecularen Druck in die Untersuchung einzuführen, und dann ergeben sich die Poisson'schen Bedingungen als nothwendig für das Gleichgewicht.

*) Carl Neumann. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle 1863, p. 39. Vergl. auch diese Annalen. Bd. I, p. 325.

Die Annahme, dass der Lichtäther incompressibel sei in Bezug auf die Kräfte, welche bei der Fortpflanzung einer Lichtbewegung auftreten, schliesst also die weitere Annahme durchaus nicht ein, dass die Aethermedien, wie sie im Innern der verschiedenen durchsichtigen Körper angenommen werden, dieselbe Dichtigkeit besitzen; wir werden daher auch in den folgenden Betrachtungen diese beschränkende Annahme nicht machen*).

1.

Betrachtung eines homogenen Mediums.

a. Allgemeine Differentialgleichungen und Grenzgleichungen.

Um eine feste Grundlage für die folgenden Betrachtungen zu gewinnen, leiten wir die allgemeinen Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in einem incompressibeln homogenen Aethermedium ab, ferner die Grenzbedingungen an der gemeinschaftlichen Grenzfläche zweier Medien; dabei werden wir ausgehen von der Betrachtung des molecularen Drucks.

Wir nehmen zunächst ein beliebig begrenztes homogenes Medium an. Es seien u, v, w die Componenten der Verrückung für die Stelle x, y, z zur Zeit t, ε die Dichtigkeit des Mediums. Dann wirken auf das Massenelement

$$\varepsilon\, dx\, dy\, dz$$

an der Stelle x, y, z die folgenden bewegenden Kräfte in der Richtung der Coordinatenaxen:

$$dx\,dy\,dz\left\{\varepsilon\, X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\},$$
$$dx\,dy\,dz\left\{\varepsilon\, Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right\},$$
$$dx\,dy\,dz\left\{\varepsilon\, Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right\}.$$

Hierin bezeichnen X, Y, Z die Componenten der äussern beschleunigenden Kräfte, X_x, X_y, u. s. w. die Componenten des molecularen Drucks. Sind ferner $d\omega$ ein Element der Oberfläche, n die Richtung der Normale auf dasselbe, nach Innen positiv gerechnet, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$

*) Die in den beiden folgenden Paragraphen dargestellten Betrachtungen bilden den Inhalt meiner Doctordissertation: Ex ipsis praeceptis mechanicis ducantur leges, quibus lucis undae in plano, quod finis sit duorum pellucidorum mediorum, reflexae et refractae pareant. Regimonti MDCCCLXVI.

die Componenten der auf das Oberflächenelement ausgeübten äussern Kräfte, so wirken auf dasselbe die folgenden Kräfte:

$$d\omega\left\{\overline{X}-\overline{X}_x\cos(n,x)-\overline{X}_y\cos(n,y)-\overline{X}_z\cos(n,z)\right\},$$
$$d\omega\left\{\overline{Y}-\overline{Y}_x\cos(n,x)-\overline{Y}_y\cos(,ny)-\overline{Y}_z\cos(n,z)\right\},$$
$$d\omega\left\{\overline{Z}-\overline{Z}_x\cos(n,x)-\overline{Z}_y\cos(n,y)-\overline{Z}_z\cos(n,z)\right\}.$$

Der oben angebrachte horizontale Strich soll bezeichnen, dass die betreffenden Grössen sich auf eine Stelle an der Oberfläche des Mediums beziehen.

Aus diesen Ausdrücken für die wirkenden Kräfte folgen die Bedingungen des Gleichgewichts durch Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, und dann aus den Gleichungen des Gleichgewichts die der Bewegung durch Anwendung des Dalembert'schen Satzes.

Wir haben demnach zunächst die Componenten der wirkenden Kräfte zu multipliciren mit den virtuellen Verrückungen δu, δv, δw und die Summe, ausgedehnt über den ganzen Rauminhalt des Mediums und über alle Elemente seiner Oberfläche, gleich null zu setzen. Da wir nun die Annahme machen, es sei das Medium als incompressibel zu betrachten in Bezug auf die Kräfte, welche zur Wirkung gelangen, so muss zwischen den Verrückungen u, v, w die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Folglich müssen die virtuellen Verrückungen δu, δv, δw ebenfalls der Gleichung Genüge leisten:

$$\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta w}{\partial z}=0.$$

Bringen wir also die Grundsätze der Variationsrechnung zur Anwendung, und bezeichnen wir den einzuführenden Multiplicator mit $-\varepsilon\Lambda$, so muss, damit Gleichgewicht stattfinde, die Summe der beiden Integrale für alle beliebigen Werthe von δu, δv, δw verschwinden:

$$0=\iiint dx\,dy\,dz\left\{\begin{aligned}&\delta u\left(\varepsilon X-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\\&+\delta v\left(\varepsilon Y-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\\&+\delta w\left(\varepsilon Z-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\\&-\varepsilon\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$+\iint d\omega\left\{\begin{aligned}&\overline{\delta u}(\overline{X}-\overline{X}_x\cos(n,x)-\overline{X}_y\cos(n,y)-\overline{X}_z\cos(n,z))\\&+\overline{\delta v}(\overline{Y}-\overline{Y}_x\cos(n,x)-\overline{Y}_y\cos(n,y)-\overline{Y}_z\cos(n,z))\\&+\overline{\delta w}(\overline{Z}-\overline{Z}_x\cos(n,x)-\overline{Z}_y\cos(n,y)-\overline{Z}_z\cos(n,z))\end{aligned}\right\}.$$

Das dreifache Integral ist über den ganzen Rauminhalt, das Doppelintegral über die ganze Oberfläche des Mediums auszudehnen.

Durch bekannte Umformung des letzten Gliedes in dem dreifachen Integral erhält die Gleichung die Form:

$$0 = \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \begin{array}{l} \delta u \left(\varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right) \\ + \delta v \left(\varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right) \\ + \delta w \left(\varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \right) \end{array} \right\}$$

$$+ \iint d\omega \left\{ \begin{array}{l} \overline{\delta u} \left(\overline{X} - \overline{X}_x \cos(n,x) - \overline{X}_y \cos(n,y) - \overline{X}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,x) \right) \\ + \overline{\delta v} \left(\overline{Y} - \overline{Y}_x \cos(n,x) - \overline{Y}_y \cos(n,y) - \overline{Y}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,y) \right) \\ + \overline{\delta w} \left(\overline{Z} - \overline{Z}_x \cos(n,x) - \overline{Z}_y \cos(n,y) - \overline{Z}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,z) \right) \end{array} \right\}.$$

Diese Gleichung kann für alle Werthe von δu, δv, δw nur bestehen, wenn das Raumintegral und das Oberflächenintegral für sich verschwinden, und das Verschwinden des Raumintegrals führt auf die folgenden Gleichungen, die allgemeinen Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Mediums:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \\ \varepsilon Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \\ \varepsilon Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Wir haben uns die Druckcomponenten X_x, u. s. w., welche in diesen Gleichungen vorkommen, ausgedrückt zu denken durch die Verrückungen u, v, w, und dann haben wir in den Gleichungen (1) und (2) vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten u, v, w und Λ.

Ferner führt das Verschwinden des Oberflächenintegrals auf die Bedingung, dass an jeder Stelle der Oberfläche die drei Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \overline{X} - \overline{X}_x \cos(n,x) - \overline{X}_y \cos(n,y) - \overline{X}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,x), \\ 0 = \overline{Y} - \overline{Y}_x \cos(n,x) - \overline{Y}_y \cos(n,y) - \overline{Y}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,y), \\ 0 = \overline{Z} - \overline{Z}_x \cos(n,x) - \overline{Z}_y \cos(n,y) - \overline{Z}_z \cos(n,z) + \varepsilon \overline{\Lambda} \cos(n,z). \end{array} \right.$$

Dies sind die sogenannten Grenzgleichungen.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wo zwei homogene Medien in einer Fläche an einander grenzen; die Grössen, welche dem zweiten Medium angehören, sollen unten mit einem Strich bezeichnet werden.

Dann gelten für jedes der beiden Medien zunächst die allgemeinen Differentialgleichungen (1) und (2), ferner für jede Stelle an der freien Oberfläche eines der beiden Medien die Grenzgleichungen (3); endlich ergeben sich an jeder Stelle der gemeinschaftlichen Grenzfläche beider Medien zwei Systeme von Gleichungen. Zunächst muss eine Stelle der Grenzfläche dieselbe Verrückung erhalten, mögen wir nun diese Stelle als dem ersten oder als dem zweiten Medium angehörig betrachten; wir haben also erstens für alle Stellen der gemeinschaftlichen Grenzfläche die Bedingungen:

$$(4) \qquad \overline{u} = \overline{u_1}\,, \quad \overline{v} = \overline{v_1}\,, \quad \overline{w} = \overline{w_1}\,.$$

Ferner sind für die gemeinschaftliche Grenzfläche, wenn auf diese keine äussern Kräfte wirken, die Druckkräfte $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, welche auf die Oberfläche des ersten Mediums ausgeübt werden, gleich den Componenten des Drucks, der von dem zweiten Medium auf die Grenzfläche ausgeübt wird; wir haben also in den Grenzgleichungen (3) zu setzen:

$$\overline{X} = \overline{X_{x1}} \cos(n, x) + \overline{X_{y1}} \cos(n, y) + \overline{X_{z1}} \cos(n, z) - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1} \cos(n, x),$$
$$\overline{Y} = \overline{Y_{x1}} \cos(n, x) + \overline{Y_{y1}} \cos(n, y) + \overline{Y_{z1}} \cos(n, z) - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1} \cos(n, y),$$
$$\overline{Z} = \overline{Z_{x1}} \cos(n, x) + \overline{Z_{y1}} \cos(n, y) + \overline{Z_{z1}} \cos(n, z) - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1} \cos(n, z),$$

wo n die Richtung der Normale an die gemeinschaftliche Grenzfläche bezeichnet, in das Innere des ersten Mediums positiv gerechnet. Folglich ergiebt sich für die gemeinschaftliche Grenzfläche der beiden Medien noch das zweite System von Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = (\overline{X_x} - \overline{X_{x1}}) \cos(n, x) + (\overline{X_y} - \overline{X_{y1}}) \cos(n, y) + \\ \quad + (\overline{X_z} - \overline{X_{z1}}) \cos(n, z) - (\overline{\varepsilon\Lambda} - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1}) \cos(n, x), \\ 0 = (\overline{Y_x} - \overline{Y_{x1}}) \cos(n, x) + (\overline{Y_y} - \overline{Y_{y1}}) \cos(n, y) + \\ \quad + (\overline{Y_z} - \overline{Y_{z1}}) \cos(n, z) - (\overline{\varepsilon\Lambda} - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1}) \cos(n, y), \\ 0 = (\overline{Z_x} - \overline{Z_{x1}}) \cos(n, x) + (\overline{Z_y} - \overline{Z_{y1}}) \cos(n, y) + \\ \quad + (\overline{Z_z} - \overline{Z_{z1}}) \cos(n, z) - (\overline{\varepsilon\Lambda} - \varepsilon_1 \overline{\Lambda_1}) \cos(n, z). \end{cases}$$

Die Gleichungen (4) und (5) sind die mehrfach erwähnten sechs Gleichungen an der gemeinschaftlichen Grenzfläche der beiden Medien.

Wir leiten nun schliesslich mittelst des Dalembert'schen Principes aus den Gleichungen des Gleichgewichts die der Bewegung ab. Nehmen wir also an, es wirken keine äussern Kräfte auf eine Stelle im Innern des Mediums, so ist in den Gleichungen (2) einfach zu setzen:

$$X = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

und es werden demnach die allgemeinen Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in dem Aethermedium:

$$(6)\quad \begin{cases} \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \\ \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \\ \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \Lambda}{\partial z}. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen tritt noch die Gleichung (1). Die Grenzgleichungen sind im Fall der Bewegung dieselben, wie in dem Fall des Gleichgewichts.

b. Die beiden Systeme particulärer Lösungen.

Um das Problem der Reflexion und Brechung auf Grund der abgeleiteten Gleichungen zu behandeln, brauchen wir neben dem bekannten System von Lösungen der allgemeinen Differentialgleichungen (1) und (6) noch ein zweites. Dieses soll nun abgeleitet werden.

Zu diesem Ende setzen wir für die Druckcomponenten ihre Werthe in den Verrückungen ein in die Gleichungen (6), und zwar wollen wir die von **Poisson** gegebenen Werthe annehmen:

$$(7)\quad \begin{cases} -X_x = \mathsf{A}\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial y} + b\frac{\partial w}{\partial z}, \\ -Y_y = c\frac{\partial u}{\partial x} + \mathsf{B}\frac{\partial v}{\partial y} + a\frac{\partial w}{\partial z}, \\ -Z_z = b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial w}{\partial z}, \\ -Y_z = -Z_y = a\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ -Z_x = -X_z = b\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ -X_y = -Y_x = c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Die Grössen A, B, Γ, a, b, c sind die sechs dem homogenen krystallinischen Medium eigenthümlichen Constanten, und es ist zu bemerken, dass bei der Herleitung dieser Ausdrücke für die Druckcomponenten die Voraussetzung gemacht wird, es sei das Medium symmetrisch theilbar durch drei auf einander rechtwinklige Ebenen*).

Es müssen nun, damit aus den allgemeinen Differentialgleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Polarisation der ebenen transversalen Wellen die Gesetze folgen, welche **Fresnel** für die

*) Die Annahme der allgemeinern Ausdrücke für die Druckcomponenten, wie sie z. B. in dem Lehrbuch von Lamé abgeleitet werden, bedingt keine wesentliche Modification der folgenden Betrachtungen.

Lichtwellen angegeben hat, zwischen den sechs Constanten die drei Relationen stattfinden:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathsf{A} = 3(b + c - a), \\ \mathsf{B} = 3(c + a - b), \\ \Gamma = 3(a + b - c); \end{cases}$$

ferner muss angenommen werden, dass die Schwingungen eines geradlinig polarisirten Strahls in der Polarisationsebene stattfinden*).

Durch Einsetzen der Werthe (7) für die Druckcomponenten in die Grenzgleichungen (6) erhalten wir mit der Gleichung (1) die folgenden allgemeinen Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen:

$$(9) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathsf{A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathsf{B} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \varepsilon \frac{\partial \Lambda}{\partial z}. \end{cases}$$

Der Einfachheit wegen sind die Constanten A, B, Γ hier noch beibehalten; sie sind aber mittelst der Gleichungen (8) bestimmt zu denken durch a, b, c.

Wir geben nun zunächst das bekannte System particulärer Lösungen der Gleichungen (9) an**).

Es ergeben sich aus diesen Gleichungen durch Elimination von Λ für die Grössen

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right); \end{aligned}$$

ferner findet nach der Definition zwischen den Grössen U, V, W die Gleichung statt:

---

*) Sobald wir von der Betrachtung des molecularen Drucks ausgehen, sind wir genöthigt diese Annahme zu machen für ein krystallinisches Medium; in den folgenden Untersuchungen, welche sich nur auf den Fall unkrystallinischer Medien beziehen, werden wir diese Annahme wieder fallen lassen.

**) Siehe § 2. der Abhandlung von Carl Neumann: „Ueber die Aetherbewegung in Krystallen", diese Annalen, Bd. I., S. 327 ff.

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

von den drei Gleichungen ist also eine Folge der beiden andern. Diesen Gleichungen wird bekanntlich Genüge geleistet durch Ausdrücke von folgender Form:

$$U = C\mu\, e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$V = C\nu\, e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$W = C\varpi e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Hierin bezeichnen p, q, r die Cosinus der Winkel, welche eine beliebig angenommene Richtung, die Richtung der Fortpflanzung, mit den Coordinatenaxen bildet, T die Schwingungsdauer und λ die Wellenlänge, also $\frac{\lambda}{T}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, welche sich in der Richtung p, q, r fortpflanzt, endlich μ, ν, ϖ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung derjenigen Ovalaxe, deren Länge nach der Fresnel'schen Construction die Fortpflanzungsgeschwindigkeit giebt, mit den Coordinatenaxen bildet. C ist eine willkürliche Constante. Wir wählen die Form der Exponentialgrössen mit imaginärem Exponenten, weil sie für die Rechnung bequemer ist.

Aus den für U, V, W gefundenen Werthen ergeben sich die folgenden Werthe für u, v, w und Λ:

$$(10)\quad \begin{cases} u = A\,(\varpi q - \nu r)\; e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}, \\ v = A\,(\mu r - \varpi p)\; e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}, \\ w = A\,(\nu p - \mu q)\; e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}, \\ \Lambda = A\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{3}{\varepsilon}\,\{a(\varpi q - \nu r) + b(\mu r - \varpi p) + c(\nu p - \mu q)\}\, e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}, \end{cases}$$

Dies ist das erste System von particulären Lösungen, welches wir zur Anwendung bringen; es enthält die willkürliche Constante A. Wir suchen nun das zweite.

Dieses muss die folgenden Eigenschaften haben: Für eine beliebig angenommene Ebene, die Grenzebene, müssen die neuen Lösungen derselben Exponentialgrösse proportional sein, wie die Lösungen (10); es müssen ferner ihre Werthe auf einer bestimmten Seite jener Ebene mit der Entfernung von derselben sehr rasch abnehmen. Dann leistet das zweite System von Lösungen den verlangten Dienst.

Dass ein solches System von Lösungen nicht existirt für die Grössen U, V, W, ist leicht ersichtlich; es werden also für die ge-

suchten Lösungen u, v, w jene Grössen U, V, W verschwinden müssen. Dies geschieht, wenn wir setzen:

$$u = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial z},$$

und es liefert dann die Bedingung der Incompressibilität für die neu eingeführte Variable S die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2};$$

ferner ergiebt sich, dass auch den drei übrigen der Gleichungen (9) Genüge geleistet wird, wenn wir setzen:

$$\Lambda = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 3\left\{\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{b}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right\}.$$

Mithin handelt es sich nur noch darum, eine Grösse S zu finden, welche der eben erhaltenen Differentialgleichung Genüge leistet, und welche die oben verlangten beiden Eigenschaften besitzt.

Nun sei die Gleichung der erwähnten Grenzebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

und zwar sollen α, β, γ die Cosinus der Winkel sein, welche die Normale an die Ebene mit den Coordinatenaxen bildet; dann wird, wenn $\varkappa$ und σ zwei beliebig zu bestimmende reelle Grössen bezeichnen, der Ausdruck

$$e^{i2\pi\left(\frac{px+qy+rz-(\varkappa+\sigma i)(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)}$$

für jede Stelle der Ebene α, β, γ der in den Lösungen (10) vorkommenden Exponentialgrösse gleich; es leistet ferner der Ausdruck der für S gefundenen Differentialgleichung Genüge, wenn:

$$\varkappa^2 + \sigma^2 = 1,$$
$$\varkappa = \alpha p + \beta q + \gamma r.$$

Folglich wird $\varkappa$ gleich dem Cosinus des Winkels, den die Richtung der Fortpflanzung mit der Normale an die Grenzebene bildet; demnach ist:

$$\sigma = \pm\sqrt{1-\varkappa^2}$$

immer reell, und wir können diese Grösse nach Belieben posititiv oder negativ machen.

Setzen wir also, indem wir im Exponenten das Reelle von dem Imaginären sondern und die willkürliche Constante L einführen:

$$(11) \quad S = L\frac{\lambda}{2\pi} e^{2\pi\frac{\sigma(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\lambda} + i2\pi\left(\frac{px+qy+rz-\varkappa(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)},$$

wo

$$(12) \quad \begin{cases} \varkappa = \alpha p + \beta q + \gamma r, \\ \sigma = \pm\sqrt{1-(\alpha p+\beta q+\gamma r)^2}, \end{cases}$$

so sind:

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial z}, \\ \Lambda = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 3\left(\frac{a}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{b}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

das gesuchte zweite System von Lösungen der Differentialgleichungen (9); denn wir können durch passende Wahl des Zeichens in der Gleichung für σ immer erreichen, dass der Ausdruck

$$\sigma(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

auf einer bestimmten Seite der Ebene α, β, γ einen negativen Werth besitzt, dass also der Factor in dem Werth von S

$$e^{2\pi\frac{\sigma(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{\lambda}}$$

auf der bestimmten Seite mit der Entfernung von der Ebene sehr rasch abnimmt.

Damit sind die beiden Systeme von particulären Lösungen gewonnen, welche erforderlich sind, um auf Grund der angenommenen Gleichungen das Problem der Reflexion und Brechung zu behandeln, und es soll nur noch hervorgehoben werden, dass in dem Falle krystallinischer Medien zwei Paare von solchen Lösungen zur Anwendung zu bringen sind, entsprechend der doppelten Strahlenbrechung. Von nun an werden wir unsere Betrachtung auf den Fall unkrystallinischer Medien beschränken.

2.

Annahme zweier homogener Medien, welche in einer Ebene an einander grenzen.

Wir leiten zunächst Formeln für die Reflexion und Brechung ab, unter der Voraussetzung, dass zwei homogene unkrystallinische Medien von verschiedener Dichtigkeit und Elasticität in einer Ebene an einander grenzen.

Es falle die xy-Ebene zusammen mit der Grenzebene, und zwar sei z für das erste Medium negativ, für das zweite Medium positiv; wir wollen ferner die dem zweiten Medium entsprechenden Grössen unten mit einem Strich bezeichnen. Wir lassen endlich die xz-Ebene zusammenfallen mit der Einfallsebene; folglich sind die Verrückungen und die Grössen Λ nur Functionen von x und z. Es werden dann, da für ein unkrystallinisches Medium in den Gleichungen (9), S. 486:

$$a = b = c, \quad \mathrm{A} = \mathrm{B} = \Gamma = 3a$$

zu setzen ist, die Gleichungen für die kleinen Schwingungen in dem ersten Medium:

$$(1)\qquad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial z}, \end{cases}$$

und für die kleinen Schwingungen in dem zweiten Medium ergiebt sich ein ganz ähnliches System von Gleichungen; es treten einfach die Grössen a_1, ε_1, u_1, v_1, w_1, Λ_1 an die Stelle der Grössen a, ε, u, v, w, Λ.

Ferner muss an der gemeinschaftlichen Grenzebene der beiden Medien

$$z = 0$$

(nach (4) und (5), S. 484) den folgenden Gleichungen Genüge geleistet werden:

$$(2)\qquad u = u_1 \quad , \quad v = v_1 \quad , \quad w = w_1 ;$$

$$(3).\qquad \begin{cases} a\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = a_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right), \\ a\frac{\partial v}{\partial z} = a_1\frac{\partial v_1}{\partial z}, \\ 2a\frac{\partial w}{\partial z} + \varepsilon\Lambda = 2a_1\frac{\partial w_1}{\partial z} + \varepsilon_1\Lambda_1 ; \end{cases}$$

denn es fällt die Richtung n der Normale an die Grenze zusammen mit der z-Axe, und wir haben:

$$-X_z = a\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad -Y_z = a\frac{\partial v}{\partial z}, \quad -Z_z = 2a\frac{\partial w}{\partial z}.$$

In diesen Gleichungen ist die Grösse v völlig gesondert von den Grössen u, w und Λ; folglich können wir die beiden Fälle, wo die Schwingungen senkrecht auf die Einfallsebene, und wo sie in der Einfallsebene stattfinden, getrennt betrachten.

a. Schwingungen senkrecht auf die Einfallsebene.

Wir nehmen zunächst an, das einfallende Licht schwinge senkrecht auf die Einfallsebene.

Dann haben wir die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{a_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right),$$

und die Bedingungen für $z = 0$:

$$v = v_1, \quad a\frac{\partial v}{\partial z} = a_1\frac{\partial v_1}{\partial z_1}.$$

Bezeichnet nun T die Schwingungsdauer, λ und λ_1 die Wellenlängen in den beiden Medien, φ den Einfallswinkel und φ_1 den Brechungswinkel, so können wir uns die Bewegung der einfallenden Welle symbolisch dargestellt denken durch den Ausdruck:

$$v_i = P e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

und die Bewegungen für die reflectirte und für die gebrochene Welle werden dann:

$$v_l = P' e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$v_r = P_1 e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Wir haben nur die erste Classe von particulären Lösungen der Differentialgleichungen zur Anwendung zu bringen; für diese wird in einem unkrystallinischen Medium Λ gleich null; die beiden Constanten P' und P_1 reichen aus, um den beiden Grenzbedingungen Genüge zu leisten. Die Wellenlängen λ und λ_1 werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{a}{\varepsilon}\ , \quad \frac{\lambda_1^2}{T^2} = \frac{a_1}{\varepsilon_1}\ ;$$

dann leisten die Ausdrücke v_i und v_l der Differentialgleichung für v, der Ausdruck v_r der Differentialgleichung für v_1 Genüge.

Somit ist zu setzen:

$$v = v_i + v_l = P e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + P' e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$v_1 = v_r \qquad = P_1 e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Sollen ferner die Ausdrücke für v und v_1 die Grenzgleichungen erfüllen, so muss sein:

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1}\ ; \tag{5}$$

dann werden die Exponentialgrössen für $z = 0$ identisch gleich in Bezug auf x und t, und wir erhalten zur Bestimmung der beiden Constanten P' und P_1 die Gleichungen:

$$P + P' = P_1\,,$$

$$\varepsilon\sin\varphi\,\cos\varphi(P - P') = \varepsilon_1\sin\varphi_1\,\cos\varphi_1\,P_1\,.$$

Wegen der Vergleichung mit den folgenden Untersuchungen nehmen wir an, es haben diese beiden Gleichungen die folgende Form:

$$P_1 = M(P + P') + iN(P - P') = iM'(P + P') + N'(P - P'), \tag{I}$$

wo unter der Voraussetzung, $\cos\varphi_1$ sei reell, M, N, M', N' reelle Grössen sein sollen.

Aus den Gleichungen (I) folgt:

$$P' = -\frac{(M-N')-(M'-N)\,i}{(M+N')-(M'+N)\,i}\,P,$$

$$P_1 = \frac{2(MN'+M'N)}{(M+N')-(M'+N)\,i}\,P,$$

und die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft nimmt die Form an:

$$MN'+M'N = \frac{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\,.$$

Dies soll hier nur vorläufig bemerkt werden.

Wir erhalten also für das senkrecht auf die Einfallsebene schwingende Licht die Formeln:

$$(6)\qquad M=1,\; N=0,\; M'=0,\; N'=\frac{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\,;$$

folglich wird der Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft Genüge geleistet.

b. Schwingungen in der Einfallsebene.

Wir nehmen nun zweitens an, das einfallende Licht schwinge in der Einfallsebene.

Dann sind die allgemeinen Differentialgleichungen für das erste Medium:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Lambda}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Lambda}{\partial z},$$

die für das zweite Medium:

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{a_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Lambda_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{a_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Lambda_1}{\partial z},$$

und die Grenzgleichungen für $z=0$:

$$u = u_1\quad,\quad w = w_1,$$

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) = a_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right),\quad 2a\frac{\partial w}{\partial z}+\varepsilon\Lambda = 2a_1\frac{\partial w_1}{\partial z}+\varepsilon_1\Lambda_1\,.$$

Ferner wird die Bewegung in der einfallenden Welle symbolisch dargestellt durch die Ausdrücke:

$$u_i = \quad S\cos\varphi\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_i = -\,S\sin\varphi\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

demnach die Bewegung in der reflectirten Welle durch die Ausdrücke:

$$u_l = S'\cos\varphi\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_l = S'\sin\varphi\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

und die Bewegung in der gebrochenen Welle durch die Ausdrücke:

$$u_r = \quad S_1\cos\varphi_1\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_r = -\,S_1\sin\varphi_1\; e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Für diese Werthe von u, w und von u_1, w_1 werden die Grössen Λ und Λ_1 gleich null.

Da wir jetzt aber vier Grenzgleichungen Genüge zu leisten haben, reichen die obigen Lösungen mit den beiden Constanten S' und S_1 nicht aus, und wir müssen auch noch die zweite Classe von Lösungen zur Anwendung bringen.

In dem vorliegenden Fall nimmt nun die S. 488 mit S bezeichnete Grösse für das erste Medium den Werth an:

$$L'\,\frac{\lambda}{2\pi}\,e^{\pm 2\pi\frac{z\sin\varphi}{\lambda} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

und für das zweite Medium:

$$L_1\,\frac{\lambda_1}{2\pi}\,e^{\pm 2\pi\frac{z\sin\varphi_1}{\lambda_1} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)};$$

ferner muss der reelle Theil des Exponenten negativ sein in dem ersten Ausdruck für $z < 0$, in dem zweiten Ausdruck dagegen für $z > 0$. Folglich haben wir das erste Mal das obere Zeichen, das zweite Mal dagegen das untere Zeichen zu nehmen, und so erhalten wir für das erste Medium:

$$u' = \quad L'\,e^{2\pi\frac{z\sin\varphi}{\lambda} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w' = -\,iL'e^{2\pi\frac{z\sin\varphi}{\lambda} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda = L'\,\frac{2\pi i a}{\varepsilon\lambda\sin\varphi}\,e^{2\pi\frac{z\sin\varphi}{\lambda} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

und für das zweite Medium:

$$u_1' = L_1\,e^{-2\pi\frac{z\sin\varphi_1}{\lambda_1} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_1' = i L_1 e^{-2\pi \frac{z \sin\varphi_1}{\lambda_1} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda_1 = L_1 \frac{2\pi i a_1}{\varepsilon_1 \lambda_1 \sin\varphi_1} e^{-2\pi \frac{z \sin\varphi_1}{\lambda_1} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

worin statt $i L' \sin\varphi$ und $i L_1 \sin\varphi_1$ einfach L' und L_1 gesetzt ist.

Wir erhalten somit für die Bewegung in dem ersten Medium:

$$u = S \cos\varphi\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi + z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + S' \cos\varphi\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} +$$
$$+ L' e^{2\pi \frac{z \sin\varphi}{\lambda} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w = - S \sin\varphi\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi + z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + S' \sin\varphi\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} -$$
$$- i L' e^{2\pi \frac{z \sin\varphi}{\lambda} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda = L' \frac{2\pi i a}{\varepsilon \lambda \sin\varphi} e^{2\pi \frac{z \sin\varphi}{\lambda} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

und für die Bewegung in dem zweiten Medium:

$$u_1 = S_1 \cos\varphi_1\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1 + z \cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)} + L_1 e^{-2\pi \frac{z \sin\varphi_1}{\lambda_1} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_1 = - S_1 \sin\varphi_1\, e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1 + z \cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)} + i L_1 e^{-2\pi \frac{z \sin\varphi_1}{\lambda_1} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda_1 = L_1 \frac{2\pi i a_1}{\varepsilon_1 \lambda_1 \sin\varphi_1} e^{-2\pi \frac{z \sin\varphi_1}{\lambda_1} + i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Setzen wir nun diese Werthe in die Grenzgleichungen ein, so ergeben sich zur Bestimmung der Constanten S', S_1, L' und L_1 die vier Gleichungen:

$$(S + S') \cos\varphi + L' = S_1 \cos\varphi_1 + L_1,$$
$$(S - S')\, i \sin\varphi - L' = S_1\, i \sin\varphi_1 + L_1,$$
$$\varepsilon (1 - 2 \sin^2\varphi) (S - S')\, i \sin\varphi + 2\varepsilon \sin^2\varphi\, L' =$$
$$= \varepsilon_1 (1 - 2 \sin^2\varphi_1)\, S_1\, i \sin\varphi_1 - 2\varepsilon_1 \sin^2\varphi_1\, L_1,$$
$$2\varepsilon \sin^2\varphi\, (S + S') \cos\varphi - \varepsilon (1 - 2 \sin^2\varphi)\, L' =$$
$$= 2\varepsilon_1 \sin^2\varphi_1\, S_1 \cos\varphi_1 - \varepsilon_1 (1 - 2 \sin^2\varphi_1)\, L_1.$$

Wir eliminiren zunächst aus diesen Gleichungen $S_1 \cos\varphi_1$ und $S_1\, i \sin\varphi_1$; dann ergiebt sich:

$$2\omega \,.\, (S + S') \cos\varphi - (\varepsilon - 2\omega)\, L' = - \varepsilon_1 L_1,$$
$$(\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)(S - S')\, i \sin\varphi + (\varepsilon_1 + 2\omega)\, L' = - \varepsilon_1 L_1,$$

wo gesetzt ist:

$$\omega = \varepsilon \sin^2\varphi - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1;$$

hieraus folgt:

$$(\varepsilon + \varepsilon_1)\, L' = 2\omega\,(S + S')\cos\varphi - (\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)\,(S - S')\, i \sin\varphi\,,$$

$$\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)\, L_1 = -\, 2\omega\,(\varepsilon_1 + 2\omega)\,(S + S')\cos\varphi - $$
$$- (\varepsilon - 2\omega)\,(\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)\,(S - S')\, i \sin\varphi.$$

Setzen wir dann diese Werthe in die beiden ersten Gleichungen ein, so ergiebt sich:

$$\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)\, S_1 \cos\varphi_1 = \left\{\varepsilon\,\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + 2\omega)^2\right\}(S + S')\cos\varphi +$$
$$+ (\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)^2\,(S - S')\, i \sin\varphi,$$

$$\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1) S_1\, i \sin\varphi_1 = 4\omega^2 (S + S')\cos\varphi + \left\{\varepsilon\,\varepsilon_1 + (\varepsilon - 2\omega)^2\right\}(S - S')\, i \sin\varphi.$$

Nehmen wir nun dem Obigen entsprechend an, es haben diese beiden Gleichungen die Form:

(11) $S_1 = \mathsf{M}(S + S') + i\mathsf{N}(S - S') = i\mathsf{M}'(S + S') + \mathsf{N}'(S - S'),$

so erhalten wir:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathsf{M} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\,\dfrac{\varepsilon\,\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, & \mathsf{N} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\,\dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, \\[2ex] \mathsf{M}' = -\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\,\dfrac{4\omega^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, & \mathsf{N}' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\,\dfrac{\varepsilon\,\varepsilon_1 + (\varepsilon - 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, \end{cases}$$

wo

$$(8)\quad \omega = \varepsilon \sin^2\varphi - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1.$$

Auch hier ist die Bedingung für die Erhaltung der lebendigen Kraft:

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' + \mathsf{M}'\mathsf{N} = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1},$$

und es wird derselben durch die Werthe (7) Genüge geleistet.

c. Vergleichung mit der Beobachtung.

Wir müssen nun untersuchen, ob die für die Reflexion und Brechung gefundenen Formeln mit den Resultaten der Beobachtung in Einklang zu bringen sind.

Zunächst stellen wir die Formeln zusammen, indem wir die Bewegung in der Einfallsebene bestimmen durch den Werth der Verrückungen, welche in der Wellenebene stattfinden. Es ist dann die Bewegung in dem einfallenden Strahl dargestellt durch die Gleichungen:

$$v_i = P e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi + z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$u_i \cos\varphi - w_i \sin\varphi = S e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi + z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

ferner die Bewegung in dem reflectirten Strahl:

$$v_l = P' e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$u_l \cos\varphi + w_l \sin\varphi = S' e^{i 2\pi \left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

endlich die Bewegung in dem gebrochenen Strahl:

$$v_r = P_1 e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$u_r\cos\varphi_1 - w_r\sin\varphi_1 = S_1 e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)}.$$

Diese Gleichungen sind symbolische; die für die Verrückungen angegebenen Werthe bestehen aus einem reellen und aus einem imaginären Glied. Nun sind aber die Differentialgleichungen und die Grenzgleichungen, welchen die Verrückungen u, v, w Genüge zu leisten haben, alle linear in Bezug auf die Verrückungen; ferner sind die in diesen Gleichungen enthaltenen Constanten sämmtlich reell; folglich müssen die reellen und die imaginären Theile der gefundenen Lösungen für sich Lösungen der Gleichungen sein. Indem wir also einfach die reellen oder die imaginären Theile der obigen Ausdrücke nehmen, erhalten wir reelle Formeln für die Reflexion und Brechung.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Grössen P', S', P_1, S_1 im Allgemeinen complex imaginäre Werthe erhalten. Es sind diese Grössen durch die Gleichungen bestimmt:

(I) $P_1 = M(P+P') + iN(P-P') = iM'(P+P') + N'(P-P')$,

(II) $S_1 = \mathsf{M}(S+S') + i\mathsf{N}(S-S') = i\mathsf{M}'(S+S') + \mathsf{N}'(S-S')$;

es ergiebt sich also:

$$P' = -\frac{(M-N') - i(M'-N)}{(M+N') - i(M'+N)}\,P,$$

$$P_1 = \frac{2(MN'+M'N)}{(M+N') - i(M'+N)}\,P.$$

und für S' und S_1 erhalten wir dieselben Ausdrücke durch die Grössen M, N, M', N' und S. Wir setzen daher:

$$P' = P_l e^{\omega i}\quad,\quad P_1 = P_r e^{\omega_1 i},$$

$$S' = S_l e^{\sigma i}\quad,\quad S_1 = S_r e^{\sigma_1 i}.$$

Nehmen wir nun die reellen Theile als Lösungen des Problems, so erhalten wir für den einfallenden Strahl:

$$v_i = P\cos 2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$u_i\cos\varphi - w_i\sin\varphi = S\cos 2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

für den reflectirten Strahl:

$$v_l = P_l\cos\left\{2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \omega\right\},$$

$$u_l\cos\varphi + w_l\sin\varphi = S_l\cos\left\{2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \sigma\right\},$$

und für den gebrochenen Strahl:

$$v_r = P_r \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T} \right) + \omega_1 \right\},$$

$$u_r \cos \varphi_1 - w_r \sin \varphi_1 = S_r \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T} \right) + \sigma_1 \right\}.$$

Ferner sind die Grössen P_t, S_t, P_r, S_r und die Winkel ω, σ, ω_1, σ_1 bestimmt durch die Gleichungen:

$$P_t e^{\omega i} = -\frac{(M - N') - i(M' - N)}{(M + N') - i(M' + N)} P,$$

$$S_t e^{\sigma i} = -\frac{(\mathsf{M} - \mathsf{N}') - i(\mathsf{M}' - \mathsf{N})}{(\mathsf{M} + \mathsf{N}') - i(\mathsf{M}' + \mathsf{N})} S,$$

$$P_r e^{\omega_1 i} = \frac{2(MN' + M'N)}{(M + N') - i(M' + N)} P,$$

$$S_r e^{\sigma_1 i} = \frac{2(\mathsf{M}\mathsf{N}' + \mathsf{M}'\mathsf{N})}{(\mathsf{M} + \mathsf{N}') - i(\mathsf{M}' + \mathsf{N})} S,$$

und damit die Bestimmung eine eindeutige sei, wollen wir noch festsetzen, dass P_t, P_r mit P und S_t, S_r mit S dasselbe Vorzeichen haben sollen, und dass die Winkel ω, σ, ω_1, σ_1 zwischen 0 und 2π zu nehmen sind.

Wir untersuchen zunächst, ob die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft erfüllt ist; es muss dies nothwendig der Fall sein; wir haben also eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Es ist bekanntlich diese Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft für das senkrecht auf die Einfallsebene schwingende Licht:

$$P^2 - P_t^2 = P_r^2 \frac{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi};$$

setzen wir in diese Gleichung die oben gegebenen Werthe ein, so ergiebt sich:

$$\{(M + N') - i(M' + N)\} \{(M + N') + i(M' + N)\} -$$
$$- \{(M - N') - i(M' - N)\} \{(M - N') + i(M' - N)\} =$$
$$= 4 \frac{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi} (MN' + M'N)^2,$$

oder

$$4(MN' + M'N) = 4 \frac{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi} (MN + M'N)^2;$$

die Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft wird also für das senkrecht auf die Einfallsebene schwingende Licht:

$$MN' + M'N = \frac{\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi}{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}.$$

und demnach für das in der Einfallsebene schwingende Licht:

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' + \mathsf{M}'\mathsf{N} = \frac{\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi}{\varepsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}.$$

Wie wir schon oben hervorgehoben haben, leisten die gefundenen Werthe diesen Gleichungen Genüge.

Die angegebenen Formeln gelten für den Fall der partiellen Reflexion; wir haben neben dem reflectirten einen gebrochenen Strahl erhalten. Dabei ist vorausgesetzt, es sei $\sin\varphi_1 < 1$, also $\cos\varphi_1$ reell und damit auch die acht Grössen $\mathfrak{M}$ und M. Die Voraussetzung ist immer erfüllt, wenn

$$\frac{a}{\varepsilon} > \frac{a_1}{\varepsilon_1};$$

denn wir haben dann, da

$$\sin\varphi_1 = \frac{a_1\,\varepsilon}{a\,\varepsilon_1}\sin\varphi,$$

$\sin\varphi_1 < \sin\varphi < 1$.

Ist dagegen

$$\frac{a}{\varepsilon} < \frac{a_1}{\varepsilon_1},$$

so wird für

$$\sin\varphi > \frac{a\,\varepsilon_1}{a_1\,\varepsilon}$$

$\sin\varphi_1$ grösser, als 1, folglich $\cos\varphi_1$ imaginär, und dann sind auch die Grössen $\mathfrak{M}$ und M zum Theil imaginär. Die Betrachtung lehrt, dass in diesem Falle der gebrochene Strahl verschwindet; es tritt totale Reflexion ein.

Wir müssen daher in diesem Falle für die Bewegung in dem zweiten Medium Ausdrücke erhalten, welche in endlicher Entfernung von der Grenzebene $z = 0$ einen verschwindend kleinen Werth besitzen. Dies geschieht, wenn wir

$$\cos\varphi_1 = i\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1}$$

setzen; denn wir haben dann:

$$v_r = P_1 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$u_r\cos\varphi_1 - w_r\sin\varphi_1 = S_1 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1} + i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

und der Factor

$$e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1}}$$

wird für endliche positive Werthe von z verschwindend klein. Dagegen dürfen wir von den Lösungen mit

$$\cos\varphi_1 = -i\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1}$$

keinen Gebrauch machen; denn wir erhielten dann den Factor

$$e^{\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1}},$$

welcher mit der Entfernung von der Grenzebene bis ins Unendliche zunimmt. Wir haben also in den Ausdrücken für die Grössen $\mathfrak{M}$ und M ebenfalls $\cos\varphi_1 = i\sqrt{\sin^2\varphi_1 - 1}$ zu setzen, und es werden dann

erstens M und N imaginär, während M' und N' reell bleiben; ferner wird N' imaginär, während M reell bleibt; für die Grössen M' und N haben wir den Werth null erhalten. Wegen der folgenden Untersuchungen, wo wir für die Grössen M' und N von null verschiedene Werthe erhalten werden, nehmen wir an, es sei in dem betrachteten Fall M' imaginär und N reell.

Berücksichtigen wir aber, dass die Grössen M, N, M', N' reell, dagegen die Grössen M', N', M, N imaginär sein sollen, so können wir setzen:

$$P' = -\frac{(M - iM') + i(N + iN')}{(M - iM') - i(N + iN')}\, P,$$

$$S' = -\frac{(i\mathsf{M} + \mathsf{M}') + i(i\mathsf{N} - \mathsf{N}')}{(i\mathsf{M} + \mathsf{M}') - i(i\mathsf{N} - \mathsf{N}')}\, S,$$

wo die Ausdrücke $(M - iM')$, $(N + iN')$, $(i\mathsf{M} + \mathsf{M}')$ und $(i\mathsf{N} - \mathsf{N}')$ reell sind; daraus folgt, dass wir jetzt setzen können:

$$P' = e^{\omega' i}\, P, \quad S' = e^{\sigma' i}\, S;$$

mithin wird die Bewegung in dem total reflectirten Strahl dargestellt durch die Gleichungen:

$$v_i = P \cos\left\{2\pi\left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \omega'\right\},$$

$$u_i \cos\varphi + w_i \sin\varphi = S \cos\left\{2\pi\left(\frac{x \sin\varphi - z \cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \sigma'\right\},$$

und die beiden Winkel ω' und σ' werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$e^{\omega' i} = -\frac{(M - N') - i(M' - N)}{(M + N') - i(M' + N)},$$

$$e^{\sigma' i} = -\frac{(\mathsf{M} - \mathsf{N}') - i(\mathsf{M}' - \mathsf{N})}{(\mathsf{M} + \mathsf{N}') - i(\mathsf{M}' + \mathsf{N})}.$$

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, unter welchen Bedingungen die für den Fall einer partiellen und die für den Fall einer totalen Reflexion aufgestellten Formeln mit den Resultaten der Beobachtung übereinstimmen. Zu diesem Ende brauchen wir bloss zu untersuchen, ob die Ausdrücke, welche aus unsern Formeln für die durch die Beobachtung direct bestimmten Grössen folgen, mit denjenigen in Uebereinstimmung zu bringen sind, welche entweder aus den Fresnel'schen, oder aus den Neumann'schen Formeln folgen; denn wie wir schon S. 472 hervorgehoben haben, stimmen die von Fresnel oder die von Neumann für die Reflexion und Brechung abgeleiteten Formeln mit der Erfahrung überein, je nachdem wir die eine oder die andere Annahme über die Beziehung zwischen Schwingungsebene und Polarisationsebene machen*).

---

*) Auf die Beobachtungen von Jamin, welcher kleine Abweichungen von diesen Formeln gefunden hat, werden wir später zurückkommen.

Als direct beobachtet können wir die folgenden Grössen ansehen:

Die geradlinige Polarisation und die Drehung der Polarisationsebene in dem reflectirten und in dem gebrochenen Strahl nach einer partiellen Reflexion;

Die elliptische Polarisation eines total reflectirten Strahles.

Demnach soll erstens bei partieller Reflexion eines geradlinig polarisirten Strahles der reflectirte und der gebrochene Strahl geradlinig polarisirt sein; es muss also sein:

$$\sin(\omega - \sigma) = 0, \quad \sin(\omega_1 - \sigma_1) = 0.$$

Durch Einsetzen der Werthe folgen hieraus die Bedingungen:

$$\frac{M' + N}{M + N'} = \frac{\mathsf{M}' + \mathsf{N}}{\mathsf{M} + \mathsf{N}'}, \quad \frac{M' - N}{M - N'} = \frac{\mathsf{M}' - \mathsf{N}}{\mathsf{M} - \mathsf{N}'}.$$

Zweitens sind die Formeln für die Drehung der Polarisationsebene im reflectirten und im gebrochenen Strahl, wenn wir mit Fresnel annehmen, dass die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden:

$$\frac{S_l \cos\sigma}{P_l \cos\omega} = \frac{\cos(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \frac{S}{P}, \quad \frac{S_r \cos\sigma_1}{P_r \cos\omega_1} = \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \frac{S}{P};$$

wir schreiben die Bedingungen in dieser Form, damit keine Zweideutigkeit wegen des Zeichens stattfinde. Setzen wir in diese Formeln die oben angegebenen Werthe ein, so ergeben sich mit Rücksicht auf die eben erhaltenen Relationen die folgenden Bedingungen:

$$\frac{\mathsf{M} + \mathsf{N}'}{M + N'} = \frac{\mathsf{M}' + \mathsf{N}}{M' + N} = \cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$\frac{\mathsf{M} - \mathsf{N}'}{M - N'} = \frac{\mathsf{M}' - \mathsf{N}}{M' - N} = \cos(\varphi + \varphi_1).$$

Machen wir dagegen die Annahme, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, so sind die Formeln für die Drehung der Polarisationsebene gerade umgekehrt:

$$\frac{P_l \cos\omega}{S_l \cos\sigma} = \frac{\cos(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \frac{P}{S}, \quad \frac{P_r \cos\omega_1}{S_r \cos\sigma_1} = \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi_1)} \frac{P}{S}.$$

Die in diesem Falle auftretenden Bedingungen werden also aus den oben stehenden erhalten, indem die Grössen M, N, M', N' und die Grössen M, N, M', N' mit einander vertauscht werden.

Endlich sind die von Fresnel für die elliptische Polarisation eines total reflectirten Strahls abgeleiteten Formeln die folgenden:

$$\cos(\sigma' - \omega') = \frac{\cos^2\varphi \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi \sin^2\varphi_1}{\cos^2\varphi \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi \sin^2\varphi_1},$$

$$\sin(\sigma' - \omega') = \frac{2i \sin\varphi \cos\varphi \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\cos^2\varphi \cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi \sin^2\varphi_1}.$$

Diese beiden Formeln sind aber in der folgenden erhalten:

$$e^{i(\sigma' - \omega')} = \frac{\cos(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Durch Einsetzen der Werthe ergiebt sich hieraus die Bedingung:

$$\frac{(M-N')-i(M'-N)}{(M+N')-i(M'+N)}\,\frac{(\mathsf{M}+\mathsf{N}')-i(\mathsf{M}'+\mathsf{N})}{(\mathsf{M}-\mathsf{N}')-i(\mathsf{M}'-\mathsf{N})}=\frac{\cos(\varphi-\varphi_1)}{\cos(\varphi+\varphi_1)}\,.$$

Nun sollen die oben bei Annahme einer partiellen Reflexion erhaltenen Bedingungen für jeden Werth von φ gelten, dem ein reelles φ_1 entspricht; dann werden sie aber auch noch gelten, wenn $\sin\varphi_1 > 1$ wird, und sobald das der Fall ist, wird der eben abgeleiteten Bedingung Genüge geleistet.

Ganz dasselbe gilt in dem Falle, wo die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden sollen; wir haben dann statt der Fresnel'schen die Neumann'schen Formeln für die elliptische Polarisation des total reflectirten Strahles anzunehmen; diese Formeln werden aber aus jenen erhalten durch Vertauschung von σ' und ω'; es sind also wieder die Grössen M, N, M', N' und die Grössen M, N, M', N' mit einander zu vertauschen.

Folglich können wir das Resultat der eben angestellten Betrachtung in den folgenden beiden Sätzen zusammenfassen:

Sollen auf Grund der Annahme, dass in einem geradlinig polarisirten Strahl die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden, die erhaltenen Formeln für die Reflexion und Brechung mit der Beobachtung in Einklang stehen, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(\mathrm{III})\quad\begin{cases}\dfrac{\mathsf{M}+\mathsf{N}'}{M+N'}=\dfrac{\mathsf{M}'+\mathsf{N}}{M'+N}=\cos(\varphi-\varphi_1)\,,\\[2mm]\dfrac{\mathsf{M}-\mathsf{N}'}{M-N'}=\dfrac{\mathsf{M}'-\mathsf{N}}{M'-N}=\cos(\varphi+\varphi_1)\,.\end{cases}$$

Soll dagegen eine solche Uebereinstimmung bestehen auf Grund der Annahme, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, so muss sein:

$$(\mathrm{IV})\quad\begin{cases}\dfrac{M+N'}{\mathsf{M}+\mathsf{N}'}=\dfrac{M'+N}{\mathsf{M}'+\mathsf{N}}=\cos(\varphi-\varphi_1)\,,\\[2mm]\dfrac{M-N'}{\mathsf{M}-\mathsf{N}'}=\dfrac{M'-N}{\mathsf{M}'-\mathsf{N}}=\cos(\varphi+\varphi_1)\,.\end{cases}$$

Wir können diese Relationen auch noch auf eine etwas andere Form bringen, indem wir die Grössen M, N, M', N' bestimmen durch die Grössen M, N, M', N'. Es folgt dann aus den Gleichungen (III):

$$\begin{aligned}\mathsf{M}&=M\ \cos\varphi\cos\varphi_1+N'\sin\varphi\sin\varphi_1\,,\\ \mathsf{N}&=N\ \cos\varphi\cos\varphi_1+M'\sin\varphi\sin\varphi_1\,,\\ \mathsf{M}'&=M'\cos\varphi\cos\varphi_1+N\ \sin\varphi\sin\varphi_1\,,\\ \mathsf{N}'&=N'\cos\varphi\cos\varphi_1+M\ \sin\varphi\sin\varphi_1\,;\end{aligned}$$

dagegen aus den Gleichungen (IV):

$$\mathrm{M} = \frac{M\cos\varphi\cos\varphi_1 - N'\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)},$$

$$\mathrm{N} = \frac{N\cos\varphi\cos\varphi_1 - M'\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)},$$

$$\mathrm{M}' = \frac{M'\cos\varphi\cos\varphi_1 - N\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)},$$

$$\mathrm{N}' = \frac{N'\cos\varphi\cos\varphi_1 - M\sin\varphi\sin\varphi_1}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}.$$

Setzen wir also, was für die nachfolgenden Untersuchungen am bequemsten ist:

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\, F_1\,, & \mathrm{N} = -\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\, F_2\,, \\[2ex] \mathrm{M}' = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\, F_3\,, & \mathrm{N}' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\, F_4\,, \end{cases}$$

so muss sein, unter der Annahme, dass die *S*chwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden:

$$(\mathrm{III^a})\qquad \begin{cases} F_1 = \cos^2\varphi_1\, M + \dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\sin^2\varphi\, N', \\[2ex] F_2 = -\dfrac{\cos^2\varphi\cos^2\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\, N - \sin\varphi_1\cos\varphi_1\, M', \\[2ex] F_3 = \sin\varphi_1\cos\varphi_1\, M' + \dfrac{\sin^2\varphi\sin^2\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\, N, \\[2ex] F_4 = \dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\cos^2\varphi\, N' + \sin^2\varphi_1\, M; \end{cases}$$

dagegen unter der Annahme, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden:

$$(\mathrm{IV^a})\qquad \begin{cases} F_1 = \dfrac{\cos^2\varphi_1\, M - \dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\sin^2\varphi\, N'}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}, \\[3ex] F_2 = -\dfrac{\dfrac{\cos^2\varphi\cos^2\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\, N - \sin\varphi_1\cos\varphi_1\, M'}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}, \\[3ex] F_3 = \dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1\, M - \dfrac{\sin^2\varphi\sin^2\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\, N}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}, \\[3ex] F_4 = \dfrac{\dfrac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\cos^2\varphi\, N' - \sin^2\varphi_1\, M}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}. \end{cases}$$

Die Untersuchung, ob dem einen oder dem andern dieser Systeme von Gleichungen Genüge geleistet wird durch die Werthe, welche wir für die acht Grössen M und M gefunden haben, ist nun sehr einfach. Es soll nämlich nach den Gleichungen, (6) S. 492:

$$N = 0, \quad N' = 0$$

sein, dagegen nach den Gleichungen (7), S. 495:

$$F_2 = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\,\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}\quad , \quad F_3 = -4\,\omega^2,$$

wo

$$\omega = \varepsilon \sin^2\varphi - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1 .$$

Wir sollen also haben, welche der beiden Definitionen wir für die Polarisationsebene auch annehmen mögen:

$$\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\,\omega = 0 \quad \text{und} \quad \omega = 0\,,$$

oder

$$\omega = 0\,, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 .$$

Die Gleichungen führen demnach gleichzeitig auf die Fresnel'sche Annahme gleicher Elasticität, wonach $\varepsilon \sin^2\varphi = \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1$ sein soll, und auf die Annahme gleicher Dichtigkeit; die eine der beiden Annahmen schliesst aber die andere aus.

Hieraus folgt, dass durch keine Annahme über das Verhältniss der Dichtigkeiten, die einzige Grösse, über welche wir verfügen können, die für die Reflexion und Brechung erhaltenen Formeln in Einklang mit den Resultaten der Beobachtung können gebracht werden; es steht also die entwickelte Theorie in Widerspruch mit der Erfahrung.

Und zwar soll noch hervorgehoben werden, dass bei keiner Annahme über das Verhältniss der Dichtigkeiten die beiden Grössen ω und $\varepsilon - \varepsilon_1$ gleichzeitig kleine Werthe annehmen, der einzige Fall ausgenommen, wo das Brechungsverhältniss für die beiden Medien nahe gleich eins und in Folge davon die Reflexion überhaupt gering ist; wir stossen also auf eine ganz bedeutende Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung, eine Abweichung, an deren Erklärung durch Beobachtungsfehler nicht zu denken ist*).

d. Die Formeln von Cauchy.

Wir wollen hier noch etwas näher eingehen auf die Formeln, welche Cauchy für die Reflexion und Brechung abgeleitet hat. Es haben nämlich diese Formeln, ganz abgesehen von ihrer Herleitung, eine gewisse Bedeutung dadurch gewonnen, dass nach den Beobachtungen von Jamin und Andern wirklich Abweichungen von den Fresnel'schen Gesetzen der Reflexion und Brechung stattfinden, und zwar solche Abweichungen, wie sie nach den Cauchy'schen Formeln im Allgemeinen eintreten sollen.

*) Die Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung kann leicht weiter geführt werden; es ergiebt sich dann namentlich, dass nach der Theorie der partiell reflectirte Strahl eine elliptische Polarisation besitzen soll, welche einer ganz rohen Beobachtung nicht entgehen könnte, und dass die elliptische Polarisation, welche nach der Theorie ein total reflectirter Strahl besitzen soll, von der wirklich beobachteten ganz verschieden ist.

Die von Cauchy abgeleiteten Formeln sind, wenn wir von der im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnung Gebrauch machen und die neben dem Brechungsverhältniss auftretende zweite Constante, den sogenannten Ellipticitätscoefficienten, mit E bezeichnen:

$$\operatorname{tg}(\sigma_1 - \omega_1) = E \sin\varphi \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg}(\sigma - \sigma_1 - \omega + \omega_1) = E \sin\varphi \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1),$$

$$\frac{S_l^2}{P_l^2} = \frac{\cos^2(\varphi + \varphi_1) + E^2 \sin^2\varphi \sin^2(\varphi + \varphi_1)}{\cos^2(\varphi - \varphi_1) + E^2 \sin^2\varphi \sin^2(\varphi - \varphi_1)} \frac{S^2}{P^2},$$

$$\frac{S_r^2}{P_r^2} = \frac{1}{\cos^2(\varphi - \varphi_1) + E^2 \sin^2\varphi \sin^2(\varphi - \varphi_1)} \frac{S^2}{P^2}.$$

Es wird hiebei angenommen, dass die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden sollen, und die Unbestimmtheit des Zeichens, welche die quadratische Form der beiden letzten Gleichungen mit sich führt, wird dadurch beseitigt, dass für den Fall $E = 0$ die Fresnel'schen Formeln gelten.

Führen wir nun in diese Gleichungen die Ausdrücke der Grössen S, P, σ, ω in den M und M ein, so ergiebt sich:

$$\frac{(\mathsf{M}' + \mathsf{N})(M + N') - (\mathsf{M} + \mathsf{N}')(M' + N)}{(\mathsf{M} + \mathsf{N}')(M + N') + (\mathsf{M}' + \mathsf{N})(M' + N)} = E \sin\varphi \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1),$$

$$\frac{(\mathsf{M} - \mathsf{N}')(M' - N) - (\mathsf{M}' - \mathsf{N})(M - N')}{(\mathsf{M} - \mathsf{N}')(M - N') + (\mathsf{M}' - \mathsf{N})(M' - N)} = E \sin\varphi \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1),$$

$$\frac{(\mathsf{M} + \mathsf{N}')^2 + (\mathsf{M}' + \mathsf{N})^2}{(M + N')^2 + (M' + N)^2} = \cos^2(\varphi - \varphi_1) + E^2 \sin^2\varphi \sin^2(\varphi - \varphi_1),$$

$$\frac{(\mathsf{M} - \mathsf{N}')^2 + (\mathsf{M}' - \mathsf{N})^2}{(M - N')^2 + (M' - N)^2} = \cos^2(\varphi + \varphi_1) + E^2 \sin^2\varphi \sin^2(\varphi + \varphi_1).$$

Hieraus folgt, wenn das Vorzeichen so gewählt wird, dass die Formeln für $E = 0$ mit den Formeln (III) übereinstimmen:

$$\mathsf{M} + \mathsf{N}' = (M + N') \cos(\varphi - \varphi_1) - E \sin\varphi (M' + N) \sin(\varphi - \varphi_1),$$

$$\mathsf{M}' + \mathsf{N} = (M' + N) \cos(\varphi - \varphi_1) + E \sin\varphi (M + N') \sin(\varphi - \varphi_1),$$

$$\mathsf{M} - \mathsf{N}' = (M - N') \cos(\varphi + \varphi_1) + E \sin\varphi (M' - N) \sin(\varphi + \varphi_1),$$

$$\mathsf{M}' - \mathsf{N} = (M' - N) \cos(\varphi + \varphi_1) - E \sin\varphi (M - N') \sin(\varphi + \varphi_1).$$

Wollen wir dieselben Formeln für die durch Beobachtung bestimmten Grössen erhalten auf Grund der Annahme, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, so brauchen wir nur diejenigen Relationen statt der obigen anzunehmen, welche aus denselben hervorgehen durch Vertauschung der Grössen M, N, M', N' und der Grössen M, N, M', N' mit einander.

Es hat nun Jamin*), in Uebereinstimmung mit Erscheinungen, welche Airy am Diamanten beobachtet hat, gefunden, dass das reflectirte und das gebrochene Licht im Allgemeinen elliptisch polarisirt sei, und dass bei einer Reflexion unter dem Polarisationswinkel das Verhältniss der Amplituden des senkrecht auf die Einfallsebene und des in der Einfallsebene polarisirten Strahls nicht genau null ist, wie dies nach den Fresnel'schen Formeln der Fall sein sollte, sondern dass dieses Verhältniss nur ein Minimum wird. Diese Beobachtungen stimmen sehr gut überein mit den Cauchy'schen Formeln; allein es kann dies kaum für die Richtigkeit dieser Formeln sprechen, weil die Constante E einen äusserst kleinen Werth erhält und ein Einfluss derselben nur wahrzunehmen ist, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel nahe gleich ist; es hat deshalb auch Jamin den Ausdruck $E \sin \varphi$ als eine Constante betrachten können. Ferner ist anzuführen, dass nach Cauchy's Theorie der Werth des Ellipticitätscoefficienten, welcher bei der Reflexion an der Grenze zweier verschiedener durchsichtiger Substanzen auftritt, in einfacher Weise folgen sollte aus den Werthen der beiden Ellipticitätscoefficienten, welche bei der Reflexion an der Grenze zwischen Luft und den beiden durchsichtigen Substanzen auftreten; damit stehen die von Jamin an Flüssigkeiten angestellten Beobachtungen in Widerspruch.

Wir können also aus diesen Beobachtungen höchstens schliessen, dass kleine Abweichungen von den Fresnel'schen Formeln stattfinden; solche Abweichungen erhalten wir, wenn wir annehmen, dass die Grössen M und M den Gleichungen (III) bei Annahme der einen und den Gleichungen (IV) bei Annahme der andern Definition der Polarisationsebene nur angenähert Genüge leisten.

3.

Allmähliger Uebergang von dem einen homogenen Medium zum andern vermittelt durch unendlich viele unendlich dünne homogene Schichten.

Die im Vorhergehenden entwickelte Theorie der Reflexion und Brechung steht, wie wir eben gesehen haben, in Widerspruch mit der Erfahrung. Prüfen wir mit Rücksicht hierauf die der Theorie zu Grunde gelegten Annahmen, so erweist sich eine derselben als durchaus nicht

*) Annales de chimie et de physique, III. série, t. 29. 30. 31.

nothwendig. Es ist dies die Annahme, dass zwei homogene Medien von verschiedener Dichtigkeit und Elasticität in einer Fläche an einander grenzen. Danach müssen, wenn wir uns den ganzen Raum von einem elastischen Medium erfüllt denken, die Dichtigkeit und die Elasticität, betrachtet als Functionen des Orts, beim Durchgang durch eine Fläche ihren Werth sprungweise ändern. Wir können aber ebenso gut annehmen, dass ein solcher Sprung nicht stattfinde, sondern eine stetige Aenderung; es müssen dann im Innern einer Schicht, welche die beiden homogenen Medien von einander trennt, die Werthe der Dichtigkeit und der Elasticität sich mit dem Orte stetig ändern. Für diese Annahme spricht eine grosse Zahl von sehr verschiedenartigen Beobachtungen, wonach die Beschaffenheit der Körper in der Nähe der Oberfläche eine andere ist, als im Innern.

Allein auch bei der Annahme eines solchen stetigen Uebergangs wäre das Resultat der vorhergehenden Betrachtung, wenn es mit der Erfahrung in Einklang stände, wohl aufrecht zu erhalten. Denn es ist zu vermuthen, dass, wenn der Uebergang von dem einen Medium zum andern stetig, aber sehr rasch stattfindet, dieselben Formeln gelten, wie wir sie bei der Annahme eines plötzlichen Uebergangs erhalten haben, und die folgenden Betrachtungen werden zeigen, dass diese Vermuthung wenigstens in dem Falle zutrifft, wo die Dichtigkeit der beiden homogenen Medien dieselbe ist. Danach würde aus der angestellten Untersuchung der Schluss zu ziehen sein, dass die Annahme eines sehr raschen Uebergangs von dem einen Medium zum andern mit der Erfahrung in Widerspruch steht.

Wir suchen daher das Problem jetzt unter der Voraussetzung zu lösen, dass ein stetiger Uebergang in Bezug auf Dichtigkeit und Elasticität von dem einen homogenen Medium zum andern stattfinde, ohne über die Dicke der Schicht, innerhalb welcher der Uebergang sich herstellt, irgend eine Annahme zu machen; wir betrachten diese Dicke als eine im Allgemeinen endliche Grösse, und wenn wir dann dieselbe schliesslich verschwindend klein gegen eine Wellenlänge setzen, so werden wir wieder zu den oben erhaltenen Formeln gelangen.

Um ferner das Problem mittelst der im Vorhergehenden benutzten Formeln behandeln zu können, werden wir uns zunächst den Uebergang von dem einen Medium zum andern vermittelt denken durch eine Anzahl homogener Schichten; von der einen Schicht zur andern sollen sich Dichtigkeit und Elasticität sprungweise ändern, und zwar so, dass die Werthe dieser Grössen für eine bestimmte Schicht immer zwischen ihren Werthen für die beiden benachbarten Schichten liegen; wir werden dann die einzelnen Schichten unendlich dünn und ihre Anzahl unendlich gross setzen; so gelangen wir schliesslich zu einem stetigen

Uebergang in Bezug auf Dichtigkeit und Elasticität von dem einen homogenen Medium zum andern*).

Wir nehmen also zunächst an, es befinden sich zwischen den beiden Medien m ebene homogene Schichten von der Dicke

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_h, \ldots c_m;$$

ferner seien die Werthe der Dichtigkeit und der Elasticität für die m Schichten:

$$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \ldots, \varepsilon_h', \ldots \varepsilon_m',$$
$$a_1', a_2', a_3', \ldots, a_h', \ldots a_m'.$$

Wir haben dann für die kleinen Schwingungen in der h^{ten} Schicht ein System Differentialgleichungen, welches aus den Gleichungen (1), Seite 490, folgt, indem wir die Constante $\frac{a}{\varepsilon}$ ersetzen durch $\frac{a_h'}{\varepsilon_h'}$. Zur Unterscheidung wollen wir die Verrückungen und den Multiplicator in der h^{ten} Schicht

$$u_h', v_h', w_h', \Lambda_h'$$

nennen; ferner wollen wir die Ordinate z immer positiv nehmen von dem Anfang der Schicht und deshalb in den Gleichungen für die h^{te}

---

*) Es ist das in gewissem Sinne die Erweiterung einer von P. H. Zech, Pogg. Ann., CIX, 1860, angestellten Betrachtung, allerdings auf ganz anderer Grundlage. In der erwähnten Abhandlung hat nämlich Zech versucht, auf Grund der Neumann'schen Formeln für die Reflexion nnd Brechung, und damit auf Grund der Neumann'schen Definition der Polarisationsebene, für die durch Beobachtung bestimmten Grössen Ausdrücke abzuleiten, wie sie auf Grund der entgegengesetzten Definition die Formeln Cauchy's liefern, und er hat dieses Ziel erreicht, indem er zwischen den beiden Medien eine dünne homogene Schicht von mittlerer Elasticität annahm.

Ferner hat Lorenz, Pogg. Ann. CXI, 1860, eine ganz ähnliche Rechnung, wie die, welche wir anzustellen haben, nämlich für den Fall einer unendlich grossen Anzahl von unendlich dünnen Schichten, auf Grund der Annahme durchgeführt, dass für die Reflexion und Brechung an der Grenze zweier Medien, welche von einander nur unendlich wenig verschieden sind, die Fresnel'schen Formeln gelten. Die Rechnung ergiebt dann, dass auch für den Fall einer endlichen Verschiedenheit zwischen den beiden Medien die Fresnel'schen Formeln gelten, wenn die Gesammtdicke der Schichten gegen eine Wellenlänge verschwindend klein ist, und dass die von Jamin angestellten Beobachtungen können erklärt werden, wenn man jener Dicke einen gegen eine Wellenlänge kleinen, aber nicht verschwindend kleinen Werth zuschreibt. In einer spätern Abhandlung Pogg. Ann. CXIV, 1861, hat Lorenz die Annahme, dass für den Fall von unendlich wenig verschiedenen Medien die Fresnel'schen Formeln gelten, zu begründen versucht; es muss jedoch dieser Versuch als völlig misslungen betrachtet werden; auf dem eingeschlagenen Wege wird man überhaupt wohl nie zu einem solchen Beweise gelangen, dass die obige, d. h. eine unendlich oft wiederholte Anwendung des Satzes erlaubt wäre. Vergl. Fortschritte der Physik. 1861. S. 225 ff.

Schicht z'_h statt z setzen; es wird dann für $z'_h = c_h$ $z'_{h+1} = 0$. Demnach lauten die Differentialgleichungen für die h^{te} Schicht:

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u'_h}{\partial x} + \dfrac{\partial w'_h}{\partial z'_h}, \\ \dfrac{\partial^2 u'_h}{\partial t^2} = \dfrac{a'_h}{\varepsilon'_h}\left(\dfrac{\partial^2 u'_h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u'_h}{\partial z'^2_h}\right) + \dfrac{\partial \Lambda'_h}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 v'_h}{\partial t^2} = \dfrac{a'_h}{\varepsilon'_h}\left(\dfrac{\partial^2 v'_h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v'_h}{\partial z'^2_h}\right), \\ \dfrac{\partial^2 w'_h}{\partial t^2} = \dfrac{a'_h}{\varepsilon'_h}\left(\dfrac{\partial^2 w'_h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w'_h}{\partial z'^2_h}\right) + \dfrac{\partial \Lambda'_h}{\partial z'_h}. \end{cases}$$

Ferner ergeben sich an der Grenze der h^{ten} mit der $(h+1)^{ten}$ Schicht, also für

$$z'_h = c_h,\ z'_{h+1} = 0$$

die Bedingungen:

$$(2)\quad u'_h = u'_{h+1},\quad v'_h = v'_{h+1},\quad w'_h = w'_{h+1};$$

$$(3)\quad \begin{cases} a'_h\left(\dfrac{\partial u'_h}{\partial z'_h} + \dfrac{\partial w'_h}{\partial x}\right) = a'_{h+1}\left(\dfrac{\partial u'_{h+1}}{\partial z'_{h+1}} + \dfrac{\partial w'_{h+1}}{\partial x}\right), \\ a'_h \dfrac{\partial v'_h}{\partial z'_h} = a'_{h+1}\dfrac{\partial v'_{h+1}}{\partial z'_{h+1}}, \\ 2a'_h \dfrac{\partial w'_h}{\partial z'_h} + \varepsilon'_h \Lambda'_h = 2a'_{h+1}\dfrac{\partial w'_{h+1}}{\partial z'_{h+1}} + \varepsilon'_{h+1}\Lambda'_{h+1}. \end{cases}$$

Es ist nun am einfachsten, das erste homogene Medium von der Dichtigkeit ε und von der Elasticität a aufzufassen als eine nullte und das zweite homogene Medium von der Dichtigkeit ε_1 und von der Elasticität a_1 als eine $(m+1)^{te}$ Schicht; dann gelten die Gleichungen (1) auch für diese beiden Medien, und die Gleichungen (2) und (3) für die Grenzen derselben mit der ersten und mit der m^{ten} Schicht. Um die früher gebrauchte Bezeichnung festzuhalten, ist bloss anzunehmen, dass für die nullte und für die $(m+1)^{te}$ Schicht der Strich oben wegzulassen ist, ebenso der Index 0 für das nullte Medium, dass dagegen der Index $m+1$ durch 1 zu ersetzen ist (z. B. $a'_0 = a$, $a'_{m+1} = a_1$), und dass die Grenzen von $z'_0 = z$ $-\infty$ und 0, die Grenzen von $z'_{m+1} = z_1$ 0 und ∞ sind; die Grenzgleichungen gelten also zum ersten Mal für $z = 0$, $z'_1 = 0$, zum letzten Mal für $z'_m = c_m$, $z_1 = 0$.

Wir wollen noch für die h^{te} Schicht die Wellenlänge λ'_h und den Brechungswinkel φ'_h nennen; dann folgt aus den allgemeinen Differentialgleichungen (1):

$$(4)\quad \frac{\lambda'^2_h}{T^2} = \frac{a'_h}{\varepsilon'_h},$$

und die Grenzgleichungen (2) und (3) führen auf die Bedingungen:

(5) $$\frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi'_h}{\lambda'_h} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1}.$$

Es handelt sich nun darum, den an der ersten Grenzfläche reflectirten und den an der letzten Grenzfläche gebrochenen Strahl zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass ein beliebig polarisirter Strahl von der Schwingungsdauer T unter dem Winkel φ auf die erste Grenzebene einfällt; dann ist das Problem der Reflexion und Brechung für den angenommenen Fall gelöst. Am einfachsten geschieht dies, indem man einen allgemeinen Ausdruck für die Bewegung in der h^{ten} Schicht annimmt, dann die Constanten so bestimmt, dass den Grenzgleichungen (2) und (3) genügt wird, und schliesslich die Bedingungen dafür aufstellt, dass man für die nullte Schicht, das erste Medium, einen gegebenen einfallenden Strahl und einen zu bestimmenden reflectirten Strahl, dagegen für die $(m+1)^{te}$ Schicht, das zweite Medium, nur einen zu bestimmenden gebrochenen Strahl erhalte.

Da in den Gleichungen (1), (2) und (3) die Verrückung v von den Verrückungen u und w völlig getrennt vorkommt, können wir wieder die beiden Fälle gesondert betrachten, wo die Schwingungen senkrecht auf die Einfallsebene und wo sie in der Einfallsebene stattfinden.

a. Schwingungen senkrecht auf die Einfallsebene.

Wir nehmen zuerst an, das einfallende Licht schwinge senkrecht auf die Einfallsebene; dann können in allen Schichten nur Bewegungen parallel der y-Axe stattfinden, und eine allgemeine Lichtbewegung von der Schwingungsdauer T wird für die h^{te} Schicht symbolisch dargestellt durch einen Ausdruck von der Form:

$$v'_h = A_h e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h + z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)} + B_h e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h - z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)},$$

wenn für constante Werthe von z'_h der Ausdruck der Exponentialgrösse

$$e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}$$

proportional werden soll, was zur Erfüllung der Grenzbedingungen nothwendig ist. Dem entsprechend erhalten wir für die Bewegung in der $(h+1)^{ten}$ Schicht:

$$v'_{h+1} = A_{h+1} e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_{h+1} + z'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}}{\lambda'_{h+1}} - \frac{t}{T}\right)} + \\ + B_{h+1} e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_{h+1} - z'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}}{\lambda'_{h+1}} - \frac{t}{T}\right)};$$

setzen wir diese Ausdrücke in die Grenzgleichung (2) und (3) ein, so ergiebt sich:

$$A_{h+1}+B_{h+1}=A_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}}+B_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}},$$

$$A_{h+1}-B_{h+1}=\frac{\varepsilon'_h\sin\varphi'_h\cos\varphi'_h}{\varepsilon'_{h+1}\sin\varphi'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}}\left(A_h e^{i2\pi\frac{c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}}-B_h e^{-i2\pi\frac{c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}}\right).$$

Wir haben ferner, damit wir die frühern Ausdrücke für die Bewegung in dem ersten und in dem zweiten Medium erhalten:

$$A_0=P,\quad B_0=P',\quad A_{m+1}=P_1,\quad B_{m+1}=0$$

zu setzen.

Durch die zuerst erhaltenen $2(m+1)$ Gleichungen für die $(m+1)$ Grenzebenen können wir uns die $2(m+1)$ Constanten $A_1, B_1, \ldots, A_{m+1}, B_{m+1}$ bestimmt denken durch $A_0=P$, $B_0=P'$; wir erhalten so die Werthe von A_{m+1} und B_{m+1} in P und P', und indem wir diese Werthe in die Gleichungen $A_{m+1}=P_1$, $B_{m+1}=0$ einsetzen, ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung von P' und P_1. Das Problem ist also völlig bestimmt.

Um nun die Gleichungen aufzulösen, setzen wir:

$$A_h+B_h=C_h,\quad A_h-B_h=iD_h;$$

dann erhalten wir zur Bestimmung von C_{h+1} und D_{h+1} durch C_h und D_h die Gleichungen:

$$C_{h+1}=C_h\cos\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}-D_h\sin\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h},$$

$$D_{h+1}=\frac{\varepsilon'_h\sin\varphi'_h\cos\varphi'_h}{\varepsilon'_{h+1}\sin\varphi'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}}\left\{C_h\sin\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}+D_h\cos\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}\right\};$$

es ergiebt sich ferner aus den Bedingungen für $h=0$:

$$C_0=P+P',\ iD_0=P-P',$$

und aus den Bedingungen für $h=m+1$:

$$C_{m+1}=iD_{m+1}=P_1.$$

Wir können also, ohne von den beiden letzten Gleichungen Gebrauch zu machen, die sämmtlichen $2(m+2)$ Constanten C und D bestimmen durch $P+P'$ und $P-P'$; wir setzen daher:

$$C_h=\mu_h(P+P')-i\mu_h'(P-P'),$$
$$D_h=\nu_h(P+P')-i\nu_h'(P-P').$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der Grössen μ_h und ν_h die Gleichungen:

$$\mu_{h+1}=\mu_h\cos\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}-\nu_h\sin\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h},$$

$$\nu_{h+1}=\frac{\varepsilon'_h\sin\varphi'_h\cos\varphi'_h}{\varepsilon'_{h+1}\sin\varphi'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}}\left\{\nu_h\cos\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}+\mu_h\sin\frac{2\pi c_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h}\right\},$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\mu_0 = 1, \ \nu_0 = 0,$$

und zur Bestimmung der Grössen μ'_h, ν'_h dieselben Gleichungen mit den Anfangsbedingungen:

$$\mu'_0 = 0, \ \nu'_0 = 1.$$

Setzen wir endlich:

$$\mu_{m+1} = M, \quad \nu_{m+1} = M', \quad \mu'_{m+1} = -N, \quad \nu'_{m+1} = N',$$

so ergeben sich schliesslich zur Bestimmung der Grössen P' und P_1 die Gleichungen:

(1) $P_1 = M(P+P') + iN(P-P') = iM'(P+P') + N'(P-P')$;

wir haben also jetzt die Werthe μ_{m+1}, $-\mu'_{m+1}$, ν_{m+1}, ν'_{m+1} für M, N, M', N' in die früher abgeleiteten Ausdrücke einzusetzen.

Die Werthe der Grössen M und N werden natürlich äusserst complicirt, wenn die Zahl m der Schichten von endlicher Dicke keine ganz kleine ist. Wir wollen daher gleich annehmen, es seien die Schichten unendlich dünn und ihre Anzahl unendlich gross; die Gesammtdicke der Schichten sei c; wir haben dann:

$$c = c_1 + c_2 + \cdots + c_m.$$

Setzen wir nun c_h unendlich klein, so werden die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen μ_h, ν_h und μ'_h, ν'_h:

$$\mu_{h+1} = \mu_h - \alpha c_h \operatorname{ctg} \varphi'_h \, . \, \nu_h,$$

$$\nu_{h+1} = \frac{\varepsilon'_h \sin \varphi'_h \cos \varphi'_h}{\varepsilon'_{h+1} \sin \varphi'_{h+1} \cos \varphi'_{h+1}} (\nu_h + \alpha c_h \operatorname{ctg} \varphi'_h \, . \, \mu_h),$$

wo gesetzt ist:

$$\alpha = 2\pi \frac{\sin \varphi'_h}{\lambda'_h} = 2\pi \frac{\sin \varphi}{\lambda} = 2\pi \frac{\sin \varphi_1}{\lambda_1}; \tag{9}$$

die Anfangsbedingungen bleiben ungeändert:

$$\mu_0 = 1, \quad \nu_0 = 0, \quad \mu_0' = 0, \quad \nu_0' = 1.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man die Werthe der Grössen M, N, M' und N' durch Reihen bestimmen, welche immer convergiren, sobald man annimmt, dass die Werthe der Dichtigkeit und der Elasticität für jede der unendlich vielen Schichten zwischen den Werthen der beiden Grössen für das erste und für das zweite Medium liegen, und zwar gelangt man zu diesen Reihen, indem man bei der Berechnung der Grössen M und N mittelst der Gleichungen das Resultat nach den Produkten der unendlich kleinen Grössen c_h ordnet. Diese Produkte dürfen nicht als Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden; denn mit der Ordnung des Produktes wächst in demselben Maasse die Ordnung der unendlich grossen Anzahl von Gliedern der entsprechenden Form. Es lassen sich dann die einzelnen Glieder der Reihen durch wiederholte Integrale darstellen, und zwar ist für jedes folgende Glied die Anzahl der Integrationen um zwei vermehrt.

Dieselben Resultate erhält man jedoch einfacher auf dem folgenden Wege, der gleichzeitig bequemere Mittel für die Weiterführung der Betrachtung liefert.

Wir setzen:

$$z = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{h-1};$$

dann können wir die Ausdrücke

$$\varepsilon'_h, \ \varphi'_h, \ \mu_h, \ \nu_h, \ \mu'_h, \ \nu'_h$$

betrachten als die Werthe stetiger Functionen von z

$$\varepsilon', \ \varphi', \ \mu, \ \nu, \ \mu', \ \nu'$$

für den obigen Werth von z; wenn wir dann weiter:

$$c_h = dz$$

setzen, so bezeichnen die Ausdrücke

$$\varepsilon'_{h+1}, \ \varphi'_{h+1}, \ \mu_{h+1}, \ \nu_{h+1}, \ \mu'_{h+1}, \ \nu'_{h+1}$$

die Werthe jener Functionen von z für das Argument $z + dz$. Wir haben ferner die Anfangsbedingungen für $z = 0$:

$$\varepsilon' = \varepsilon, \ \varphi' = \varphi, \ \mu = 1, \ \nu = 0, \ \mu' = 0, \ \nu' = 1$$

und die Endbedingungen für $z = c$:

$$\varepsilon' = \varepsilon_1, \ \varphi' = \varphi_1, \ \mu = M, \ \nu = M', \ \mu' = -N, \ \nu' = N'.$$

Die Grössen ε' und φ' sind als gegebene Functionen von z zu betrachten; dagegen führen die obigen Gleichungen zu dem folgenden System Differentialgleichungen für die Variabeln μ, ν und μ', ν':

$$d\mu = -\alpha \operatorname{ctg}\varphi' \nu \, dz,$$

$$d \, . \, \varepsilon' \sin\varphi' \cos\varphi' \nu = \alpha \varepsilon' \cos^2\varphi' \mu \, dz.$$

Setzen wir also schliesslich:

$$\mu = Z_1, \ \nu = \frac{Y_1}{\sin\varphi' \cos\varphi'}, \ \mu' = \sin\varphi \cos\varphi \, Z_2, \ \nu' = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi' \cos\varphi'} \, Y_2,$$

so erhalten wir für die Grössen Z und Y das System Differentialgleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dz} = -\dfrac{\alpha}{\sin^2\varphi'} \, Y, \\ \dfrac{d\varepsilon' Y}{dz} = \alpha \varepsilon' \cos^2\varphi' \, Z. \end{cases}$$

Und zwar sind die particulären Lösungen

$$Z_1, \ Y_1 \quad \text{und} \quad Z_2, \ Y_2$$

dieses Systems Differentialgleichungen vollständig bestimmt durch die Anfangsbedingungen für $z = 0$:

$$(11) \qquad Z_1 = 1, \quad Y_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Y_2 = 1.$$

Wir haben endlich zur Bestimmung der Grössen M, N, M', N' die Gleichungen:

(12) $M = \overline{Z_1}$, $N = -\sin\varphi\cos\varphi\overline{Z_2}$, $M' = \frac{\overline{Y_1}}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$, $N' = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\overline{Y_2}$.

Der über den Grössen Z und Y angebrachte horizontale Strich soll bezeichnen, dass die Werthe für $z = c$ zu nehmen seien.

Mittelst der Differentialgleichungen (10) können wir nun für die Grössen Z und Y, und damit für die Grössen M und N, Reihen von der oben erwähnten Form ableiten.

Es folgt nämlich aus den Differentialgleichungen durch partielle Integration:

$$Z = Z_0 - \alpha\int_0^z \frac{Y\,dz}{\sin^2\varphi'},$$

$$\varepsilon' Y = \varepsilon Y_0 + \alpha\int_0^z \varepsilon'\cos^2\varphi'\,Z\,dz,$$

wenn Z_0 und Y_0 die Werthe von Z und Y für $z = 0$ bezeichnen.

Indem wir nun auf der rechten Seite dieser Gleichungen successive die Werthe der Grössen Z und Y einsetzen, wie sie sich zunächst aus den Anfangsbedingungen und dann aus den Gleichungen selbst bei Weglassung der noch zu berechnenden höhern Glieder ergeben, erhalten wir:

$$(13)\left\{\begin{aligned}
Z_1 &= 1 - \alpha^2\int\!\!\int\frac{\varepsilon_1'\cos^2\varphi_1'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}\,dz_1\,dz_2 + \\
&+ \alpha^4\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\frac{\varepsilon_1'\cos^2\varphi_1'\cdot\varepsilon_3'\cos^2\varphi_3'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'\cdot\varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'}\,dz_1\,dz_2\,dz_3\,dz_4 - \cdots, \\
\varepsilon' Y_1 &= \alpha\int\varepsilon_1'\cos^2\varphi_1'\,dz_1 - \\
&- \alpha^3\int\!\!\int\!\!\int\frac{\varepsilon_1'\cos^2\varphi_1'\cdot\varepsilon_3'\cos^2\varphi_3'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}\,dz_1\,dz_2\,dz_3 + \cdots, \\
\frac{1}{\varepsilon}Z_2 &= -\alpha\int\frac{dz_1}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'} + \\
&+ \alpha^3\int\!\!\int\!\!\int\frac{\varepsilon_2'\cos^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\cdot\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}\,dz_1\,dz_2\,dz_3 - \cdots, \\
\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}Y_2 &= 1 - \alpha^2\int\!\!\int\frac{\varepsilon_2'\cos^2\varphi_2'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'}\,dz_1\,dz_2 + \\
&+ \alpha^4\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\frac{\varepsilon_2'\cos^2\varphi_2'\cdot\varepsilon_4'\cos^2\varphi_4'}{\varepsilon_1'\sin^2\varphi_1'\cdot\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}\,dz_1\,dz_2\,dz_3\,dz_4 - \cdots.
\end{aligned}\right.$$

Hierin sollen ε_h' und φ_h' bezeichnen, dass in den Functionen ε' und φ' das Argument gleich z_h zu setzen sei, und die wiederholten Integrale sind der Ungleichung entsprechend zu nehmen:

$$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_h < z.$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die vier Reihen convergiren, sobald weder ε', noch $\sin\varphi'$ innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet;

dieser Fall kann aber nicht eintreten; denn es wird ε' immer zwischen ε und ε_1 und $\sin\varphi'$ immer zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\varphi_1$ liegen.

Wir wollen von den Reihenentwicklungen sofort eine Anwendung machen, indem wir die Werthe der Grössen M und N für den Fall bestimmen, dass die Dicke c der Schicht, innerhalb welcher der stetige Uebergang von dem einen Medium zum andern stattfinden soll, verschwindend klein gegen eine Wellenlänge sei. In diesem Falle ist αc eine verschwindend kleine Grösse; dann erhalten die Integrale, welche in den Reihenentwicklungen für die Grössen Z und Y vorkommen, für $z = c$ alle einen verschwindend kleinen Werth; folglich wird in diesem Falle:

$$\overline{Z}_1 = 1, \quad \overline{Y}_1 = 0, \quad \overline{Z}_2 = 0, \quad \overline{Y}_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Hieraus folgt:

$$M = 1, \quad N = 0, \quad M' = 0, \quad N' = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1},$$

d. h. wir erhalten bei der Annahme eines sehr raschen stetigen Uebergangs von dem einen Medium zum andern dieselben Formeln für die Reflexion und Brechung, wie bei der Annahme eines plötzlichen Uebergangs.

Wir untersuchen nun, ob die allgemeinen Werthe (12) der Grössen M und N der Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft Genüge leisten:

$$MN' + M'N = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1};$$

es kann dies als Probe für die Richtigkeit der angestellten Rechnung dienen.

Damit die Gleichung bestehe, muss sein:

$$\overline{Z}_1 \overline{Y}_2 - \overline{Z}_2 \overline{Y}_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Nun leisten die Grössen Z_1, Y_1 und Z_2, Y_2 den Differentialgleichungen (10) Genüge; folglich ist:

$$Y_2 \frac{dZ_1}{dz} - Y_1 \frac{dZ_2}{dz} = 0,$$

$$Z_1 \frac{d \cdot \varepsilon' Y_2}{dz} - Z_2 \frac{d \cdot \varepsilon' Y_1}{dz} = 0,$$

und somit:

$$\varepsilon' Y_2 \frac{dZ_1}{dz} + Z_1 \frac{d \cdot \varepsilon' Y_2}{dz} - \varepsilon' Y_1 \frac{dZ_2}{dz} - Z_2 \frac{d \cdot \varepsilon' Y_1}{dz} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$\varepsilon'(Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1) = \text{const.},$$

und der Werth der Constanten wird dadurch bestimmt, dass für $z = 0$

$$\varepsilon' = \varepsilon, \quad Z_1 = Y_2 = 1, \quad Z_2 = Y_1 = 0$$

sein soll. Folglich gilt für jeden Werth von z zwischen 0 und c die Relation:

$$(14)\qquad Z_1 Y_2 - Z_2 Y_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,.$$

Hieraus folgt aber die obige Gleichung, wenn wir $z = c$ setzen. Es gilt also die Gleichung von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Mittelst der Formeln, welche wir im Vorhergehenden entwickelt haben, müssen wir auch den Fall behandeln können, wo eine Lichtwelle in dem zweiten Medium sich nach der Grenze desselben mit dem ersten Medium fortpflanzt und an dieser Grenze reflectirt und gebrochen wird. Denn es muss auch in diesem Falle das Problem auf die Integration des Systems Differentialgleichungen (10) zurückzuführen sein; die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind aber durch die beiden angenommenen Systeme particulärer Lösungen gegeben.

Wir wollen die Grössen für den Fall, dass die beiden Medien mit einander vertauscht werden, von denen für den bisher behandelten Fall dadurch unterscheiden, dass wir dieselben einklammern. Wir haben dann zunächst nach (12), indem die Winkel φ und φ_1 mit einander zu vertauschen sind:

$$(M) = (\overline{Z_1}),\ (N) = -\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 (\overline{Z})_2,$$

$$(M') = \frac{(\overline{Y})_1}{\sin\varphi\cos\varphi},\ (N') = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}(\overline{Y})_2\,.$$

Hierin bezeichnen $(\overline{Z})$ und $(\overline{Y})$ die Werthe der Functionen von z (Z) und (Y) für $z = 0$; denn es sollen die Werthe genommen werden für die Grenze der Uebergangsschicht mit dem ersten Medium. Nun müssen die Variabeln (Z) und (Y) dem System Differentialgleichungen Genüge leisten, welches wir aus (10) erhalten, wenn wir z in der entgegengesetzten Richtung positiv rechnen; denn wir haben ganz dieselben unendlich dünnen Schichten, wie früher, anzunehmen; wir gehen jetzt aber in der entgegengesetzten Richtung durch diese Schichten hindurch. Folglich muss sein, wenn α_h, β_h zwei zu bestimmende Coefficienten bezeichnen:

$$(Z)_h = \alpha_h Z_1 + \beta_h Z_2\,,$$
$$(Y)_h = -\alpha_h Y_1 - \beta_h Y_2\,,$$

und zwar werden diese Coefficienten dadurch bestimmt, dass für $z = c$:

$$(Z)_1 = 1,\quad (Y)_1 = 0,\quad (Z)_2 = 0,\quad (Y)_2 = 1$$

sein soll. Wir haben also:

$$\alpha_1 \overline{Z_1} + \beta_1 \overline{Z_2} = 1\,,\qquad \alpha_2 \overline{Z_1} + \beta_2 \overline{Z_2} = 0\,,$$

$$\alpha_1 \overline{Y_1} + \beta_1 \overline{Y_2} = 0;\qquad \alpha_2 \overline{Y_1} + \beta_2 \overline{Y_2} = -1\,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (14):

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{Y}_2\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{Z}_2\,,$$

$$\beta_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} Y_1\,, \qquad \beta_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} Z_1\,.$$

Wir haben endlich, indem wir in den Werthen für $(Z)_h$ und $(Y)_h$ $z = 0$ setzen:

$$\overline{(Z)}_1 = \alpha_1\,,\quad \overline{(Z)}_2 = \alpha_2\,,\quad \overline{(Y)}_1 = -\beta_1\,,\quad (Y)_2 = -\beta_2\,.$$

Es ergiebt sich also:

$$(Z)_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{Y}_2\,,\quad (Z)_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{Z}_2\,,\quad \overline{(Y)}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} Y_1\,,\quad (Y)_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} Z_1\,.$$

Folglich erhalten wir:

$$(M) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{Y}_2\,,\quad (N) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 Z_2\,,$$

$$(M') = \frac{\varepsilon_1\overline{Y}_1}{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}\,,\quad (N') = \frac{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi} Z_1$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (12), wenn

$$f = \frac{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi} \tag{15}$$

gesetzt wird:

$$(M) = fN',\quad (N) = fN,\quad (M') = fM',\quad (N') = fM. \tag{16}$$

Wir haben somit in diesem Falle, wie es nothwendig ist, wenn die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft gelten soll:

$$(M)(N') + (M')(N) = \frac{\varepsilon_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}\,.$$

b. Schwingungen in der Einfallsebene.

Es sind nun zweitens ganz dieselben Betrachtungen anzustellen für den Fall, dass die Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden. Wir gelangen auf demselben Wege, wie früher, zum Ziel; nur wird die Rechnung sehr viel complicirter; wir können uns aber jetzt mit Rücksicht auf die vorhergehende Betrachtung auch kürzer fassen.

Wir haben uns zunächst die Bewegung in der h^{ten} Schicht symbolisch dargestellt zu denken durch Ausdrücke der folgenden Form:

$$u'_h = A_h\cos\varphi'_h\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h + z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)} + B_h\cos\varphi'_h\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h - z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)} +$$
$$+ L_h\, e^{\alpha z'_h + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)} + M_h\, e^{-\alpha z'_h + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)}\,,$$

$$w'_h = -A_h\sin\varphi'_h\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h + z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)} + B_h\sin\varphi'_h\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi'_h - z'_h\cos\varphi'_h}{\lambda'_h} - \frac{t}{T}\right)} -$$
$$- iL_h\, e^{\alpha z'_h + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)} + iM_h\, e^{-\alpha z'_h + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)}\,,$$

$$\Lambda_h' = \frac{i\alpha_h'\alpha}{\varepsilon_h' \sin^2\varphi_h'} \left\{ L_h e^{\alpha z_h' + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)} + M_h e^{-\alpha z_h' + i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)} \right\}.$$

Denn wir müssen alle particulären Lösungen nehmen, welche wir zur Erfüllung der Grenzbedingungen benutzen können.

Damit wir für die Bewegung in dem ersten und für die in dem zweiten Medium die frühern Ausdrücke (Seite 494) erhalten, muss sein:

$$A_0 = S\,,\quad B_0 = S',\quad L_0 = L',\quad M_0 = 0\;;$$
$$A_{m+1} = S_1\,,\quad B_{m+1} = 0\,,\quad L_{m+1} = 0\,,\quad M_{m+1} = L_1\,.$$

Wir setzen nun die Ausdrücke für die Grössen u, w, Λ in die Grenzgleichungen (2) und (3) ein; dann ergiebt sich, wenn wir gleich die neuen Constanten C, D, N, P mittelst der Gleichungen:

$$C_h = A_h + B_h\,,\quad iD_h = A_h - B_h\,,\quad N_h = L_h + M_h\,,\quad P_h = L_h - M_h$$

einführen:

$$\cos\varphi_{h+1}' C_{h+1} + N_{h+1} = \cos\varphi_h' \left\{ C_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} - D_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} \right\} +$$
$$+ N_h \frac{e^{\alpha c_h} + e^{-\alpha c_h}}{2} + P_h \frac{e^{\alpha c_h} - e^{-\alpha c_h}}{2}\,,$$

$$\sin\varphi_{h+1}' D_{h+1} + P_{h+1} = \sin\varphi_h' \left\{ D_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} + C_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} \right\} +$$
$$+ P_h \frac{e^{\alpha c_h} + e^{-\alpha c_h}}{2} + N_h \frac{e^{\alpha c_h} - e^{-\alpha c_h}}{2}\,,$$

$$\varepsilon_{h+1}'(1 - 2\sin^2\varphi_{h+1}')\sin\varphi_{h+1}' D_{h+1} - 2\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}' P_{h+1} =$$
$$= \varepsilon_h'(1 - 2\sin^2\varphi_h')\sin\varphi_h' \left\{ D_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} + C_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} \right\} -$$
$$- 2\varepsilon_h' \sin^2\varphi_h' \left\{ P_h \frac{e^{\alpha c_h} + e^{-\alpha c_h}}{2} + N_h \frac{e^{\alpha c_h} - e^{-\alpha c_h}}{2} \right\},$$

$$2\varepsilon_{h+1}'\sin^2\varphi_{h+1}'\cos\varphi_{h+1}' C_{h+1} - \varepsilon_{h+1}'(1 - 2\sin^2\varphi_{h+1}') N_{h+1} =$$
$$= 2\varepsilon_h' \sin^2\varphi_h' \cos\varphi_h' \left\{ C_h \cos\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} - D_h \sin\frac{2\pi c_h \cos\varphi_h'}{\lambda_h'} \right\} -$$
$$- \varepsilon_h'(1 - 2\sin^2\varphi_h') \left\{ N_h \frac{e^{\alpha c_h} + e^{-\alpha c_h}}{2} + P_h \frac{e^{\alpha c_h} - e^{-\alpha c_h}}{2} \right\}.$$

Wir haben ferner nach den Bedingungen für das erste und für das zweite Medium:

$$C_0 = S + S',\quad D_0 = -i(S - S'),\quad N_0 = P_0 = L',$$
$$C_{m+1} = iD_{m+1} = S_1\,,\quad N_{m+1} + P_{m+1} = 0;$$

denn es kommt nicht darauf an, die Grössen L' und L_1 zu bestimmen; wir können die letztere also gleich eliminiren.

Das Problem ist ein völlig bestimmtes. Denn wir können mittelst der $4(m+1)$ Grenzgleichungen alle Constanten C, D, N, P bestimmen

durch C_0, D_0, N_0, P_0; mithin erhalten wir C_{m+1}, D_{m+1}, $N_{m+1}+P_{m+1}$ ausgedrückt durch $S+S'$, $S-S'$ und L'; setzen wir diese Werthe in die drei letzten Gleichungen ein, und eliminiren wir dann L', so bleiben zwei Gleichungen übrig zur Bestimmung der beiden gesuchten Grössen S' und S_1 durch S.

Wir wollen nun gleich die Grössen c_h unendlich klein annehmen; dann können wir aus den vier allgemeinen Gleichungen die folgenden einfacheren ableiten:

$$\varepsilon'_{h+1}\cos\varphi'_{h+1}\,C_{h+1} = \cos\varphi'_h\,(\varepsilon'_{h+1}-2\Omega_h)\,(C_h-\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi'_h\,D_h) + \\ +(\varepsilon'_{h+1}-\varepsilon'_h-2\Omega_h)\,(N_h+\alpha c_h\,P_h),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\sin\varphi'_{h+1}\,D_{h+1} = \sin\varphi'_h\,(\varepsilon'_h+2\Omega_h)\,(D_h+\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi'_h\,C_h) + \\ +2\Omega_h\,(P_h+\alpha c_h\,N_h),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\,N_{h+1} = \cos\varphi'_h\,.\,2\Omega_h\,(C_h-\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi'_h\,D_h)+(\varepsilon'_h+2\Omega_h)(N_h+\alpha c_h\,P_h),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\,P_{h+1} = \sin\varphi'_h\,(\varepsilon'_{h+1}-\varepsilon'_h-2\Omega_h)\,(D_h+\alpha c_h\operatorname{ctg}\varphi'_h\,C_h) + \\ +(\varepsilon'_{h+1}-2\Omega_h)\,(P_h+\alpha c_h\,N_h),$$

wo gesetzt ist:

$$\Omega_h = \varepsilon'_{h+1}\sin^2\varphi'_{h+1}-\varepsilon'_h\sin^2\varphi'_h\,.$$

Setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi'_h\,C_h &= \cos\varphi\;\;l_{1,h}\,C_0+\sin\varphi\;\;l_{2,h}\,D_0+\;\;l_{3,h}\,N_0+\;\;l_{4,h}\,P_0\,,\\
\sin\varphi'_h\,D_h &= \cos\varphi\;m_{1,h}\,C_0+\sin\varphi\;m_{2,h}\,D_0+m_{3,h}\,N_0+m_{4,h}\,P_0\,,\\
N_h &= \cos\varphi\;\;p_{1,h}\,C_0+\sin\varphi\;\;p_{2,h}\,D_0+\;\;p_{3,h}\,N_0+\;\;p_{4,h}\,P_0\,,\\
P_h &= \cos\varphi\;\;q_{1,h}\,C_0+\sin\varphi\;\;q_{2,h}\,D_0+\;\;q_{3,h}\,N_0+\;\;q_{4,h}\,P_0\,,
\end{aligned}$$

so erhalten wir für die Grössen $l_{k,h}$, $m_{k,h}$, $p_{k,h}$, $q_{k,h}$, wo $k=1,\,2,\,3,\,4$, das folgende System Gleichungen:

$$\varepsilon'_{h+1}\;\;l_{k,h+1} = (\varepsilon'_{h+1}-2\Omega_h)\,(l_{k,h}-\alpha c_h\operatorname{ctg}^2\varphi'_h\,m_{k,h}) + \\ +(\varepsilon'_{h+1}-\varepsilon'_h-2\Omega_h)\,(p_{k,h}+\alpha c_h\,q_{k,h}),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\,m_{k,h+1} = (\varepsilon'_h+2\Omega_h)\,(m_{k,h}+\alpha c_h\,l_{k,h})+2\Omega_h\,(q_{k,h}+\alpha c_h\,p_{k,h}),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\,p_{k,h+1} = 2\Omega_h\,(l_{k,h}-\alpha c_h\operatorname{ctg}^2\varphi'_h\,m_{k,h})+(\varepsilon'_h+2\Omega_h)\,(p_{k,h}+\alpha c_h\,q_{k,h}),$$

$$\varepsilon'_{h+1}\,q_{k,h+1} = (\varepsilon'_{h+1}-\varepsilon'_h-2\Omega_h)(m_{k,h}+\alpha c_h\,l_{k,h}) + \\ +(\varepsilon'_{h+1}-2\Omega_h)\,(q_{k,h}+\alpha c_h\,p_{k,h})\,.$$

Wir haben ferner die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
&l_{1,0}=1, && m_{1,0}=0, && p_{1,0}=0, && q_{1,0}=0;\\
&l_{2,0}=0, && m_{2,0}=1, && p_{2,0}=0, && q_{2,0}=0;\\
&l_{3,0}=0, && m_{3,0}=0, && p_{3,0}=1, && q_{3,0}=0;\\
&l_{4,0}=0, && m_{4,0}=0, && p_{4,0}=0, && q_{4,0}=1\,.
\end{aligned}$$

Denken wir uns mittelst dieser Gleichungen die sechzehn Grössen $l_{k,m+1}$, $m_{k,m+1}$, $p_{k,m+1}$, $q_{k,m+1}$ bestimmt, und nennen wir ihre Werthe einfach l_k, m_k, p_k, q_k, so ergeben sich die Werthe von C_{m+1}, D_{m+1}, N_{m+1}, P_{m+1}. Nach den obigen Gleichungen erhalten wir so:

$$S_1 = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\, l_1(S+S') - i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\, l_2(S-S') + \frac{l_3+l_4}{\cos\varphi_1}\, L',$$

$$-iS_1 = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\, m_1(S+S') - i\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\, m_2(S-S') + \frac{m_3+m_4}{\sin\varphi_1}\, L',$$

$$0 = \cos\varphi(p_1+q_1)(S+S') - i\sin\varphi(p_2+q_2)(S-S') +$$
$$+ (p_3+q_3+p_4+q_4)\, L'.$$

Eliminiren wir mittelst der dritten Gleichung die Grösse L' aus den beiden ersten, und bringen wir die letzteren dann auf die Form:

$$\text{(II)}\quad S_1 = \mathsf{M}(S+S') + i\mathsf{N}(S-S') = i\mathsf{M}'(S+S') + \mathsf{N}'(S-S'),$$

so ergiebt sich:

$$(17)\quad \begin{cases} \mathsf{M} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4}\begin{vmatrix} l_1 & , & l_3+l_4 \\ p_1+q_1 & , & p_3+q_3+p_4+q_4\end{vmatrix}, \\ \mathsf{N} = -\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4}\begin{vmatrix} l_2 & , & l_3+l_4 \\ p_2+q_2 & , & p_3+q_3+p_4+q_4\end{vmatrix}, \\ \mathsf{M}' = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4}\begin{vmatrix} m_1 & , & m_3+m_4 \\ p_1+q_1 & , & p_3+q_3+p_4+q_4\end{vmatrix}, \\ \mathsf{N}' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\dfrac{1}{p_3+q_3+p_4+q_4}\begin{vmatrix} m_2 & , & m_3+m_4 \\ p_2+q_2 & , & p_3+q_3+p_4+q_4\end{vmatrix}. \end{cases}$$

Um nun für die Grössen l_1, l_2, u. s. w. Reihenentwicklungen zu finden, setzen wir wieder:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{h-1} = z, \quad c_h = dz$$

und betrachten $l_{k,h}$, $m_{k,h}$, $p_{k,h}$, $q_{k,h}$ als die Werthe der Functionen von z

$$l_k',\ m_k',\ p_k',\ q_k'$$

für den obigen Werth von z; wir haben dann zu setzen:

$$l_{k,h+1} = l_k' + dl_k' \quad , \quad m_{k,h+1} = m_k' + dm_k',$$
$$p_{k,h+1} = p_k' + dp_k' \quad , \quad q_{k,h+1} = q_k' + dq_k',$$

und es sind

$$l_k,\ m_k,\ p_k,\ q_k$$

die Werthe der Functionen für $z = c$. Berücksichtigen wir ferner, dass zu setzen ist:

$$\varepsilon_{h+1}' = \varepsilon' + d\varepsilon', \quad \varepsilon_h' = \varepsilon', \quad \varphi_h' = \varphi', \quad \Omega_h = d\,\varepsilon'\sin^2\varphi',$$

so erhalten wir aus den obigen Gleichungen bei Weglassung der Produkte von unendlich kleinen Grössen das folgende System Differentialgleichungen für die Variabeln l_k', m_k', p_k', q_k':

$$d\,.\,\varepsilon'\ l_k' = l_k'\,d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi') - \alpha\,\varepsilon'\operatorname{ctg}^2\varphi'\ m_k'\,dz + p_k'\,d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi'),$$
$$d\,.\,\varepsilon'\ m_k' = 2m_k'\,d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi' + \alpha\,\varepsilon'\ l_k'\,dz + 2q_k'\,d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi',$$
$$d\,.\,\varepsilon'\ p_k' = 2l_k'\,d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi' + 2p_k'\,d\,.\,\varepsilon'\sin^2\varphi' + \alpha\,\varepsilon'\ q_k'\,dz,$$
$$d\,.\,\varepsilon'\ q_k' = m_k'\,d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi') + q_k'\,d\,.\,\varepsilon'(1-2\sin^2\varphi') + \alpha\,\varepsilon'\ p_k'\,dz.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\frac{d\,(m_k' + q_k')}{dz} = \alpha(l_k' + p_k'),$$

$$\frac{d\,(l_k' + p_k')}{dz} = -\alpha(\mathrm{ctg}^2\varphi'\, m_k' - q_k'),$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon'\{(1-2\sin^2\varphi')\,m_k' - 2\sin^2\varphi'\,q_k'\}}{dz} = \alpha\,\varepsilon'\{(1-2\sin^2\varphi')\,l_k' - 2\sin^2\varphi'\,p_k'\},$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon'\{2\sin^2\varphi'\,l_k' - (1-2\sin^2\varphi')\,p_k'\}}{dz} = -\alpha\,\varepsilon'\{2\cos^2\varphi' m_k' + (1-2\sin^2\varphi')q_k'\}.$$

Setzen wir also:

$$m_k' + q_k' = X, \qquad (1-2\sin^2\varphi')\,m_k' - 2\sin^2\varphi'\,q_k' = V,$$

$$l_k' + p_k' = U, \qquad 2\sin^2\varphi'\,l_k' - (1-2\sin^2\varphi')\,p_k' = W,$$

so erhalten wir für die Grössen X, U, V, W das folgende System Differentialgleichungen:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dz} = \alpha U, \\ \dfrac{dU}{dz} = -\alpha\,\dfrac{\sin^2\varphi' X + V}{\sin^2\varphi'}, \\ \dfrac{d\cdot\varepsilon' V}{dz} = \alpha\,\varepsilon'\{(1-4\sin^2\varphi')\,U + W\}, \\ \dfrac{d\cdot\varepsilon' W}{dz} = -\alpha\,\varepsilon'(X+V). \end{cases}$$

Wir wollen nun diejenigen vier Systeme von particulären Lösungen dieser Differentialgleichungen einführen, welche durch die Bedingungen bestimmt werden, dass

für $z = 0$

sei:

$$(19)\quad \begin{cases} X_1 = 1, & U_1 = 0, & V_1 = 0, & W_1 = 0; \\ X_2 = 0, & U_2 = 1, & V_2 = 0, & W_2 = 0; \\ X_3 = 0, & U_3 = 0, & V_3 = 1, & W_3 = 0; \\ X_4 = 0, & U_4 = 0, & V_4 = 0, & W_4 = 1. \end{cases}$$

Dann müssen wir setzen, nach den für die Grössen l_k', m_k', p_k', q_k' stattfindenden Anfangsbedingungen (S. 518):

$$m_1' + q_1' = X_2 + 2\sin^2\varphi \qquad X_4, \text{ u. s. w.}$$

$$m_2' + q_2' = X_1 + (1-2\sin^2\varphi)\,X_3, \text{ u. s. w.}$$

$$m_3' + q_3' = X_2 - (1-2\sin^2\varphi)\,X_4, \text{ u. s. w.}$$

$$m_4' + q_4' = X_1 - 2\sin^2\varphi \qquad X_3, \text{ u. s. w.}$$

Folglich erhalten wir:

$$
(20)\left\{
\begin{aligned}
l_1' &= (1-2\sin^2\varphi')\{U_2+2\sin^2\varphi\,U_4\}+\{W_2+2\sin^2\varphi\,W_4\},\\
l_2' &= (1-2\sin^2\varphi')\{U_1+(1-2\sin^2\varphi)\,U_3\}+\{W_1+(1-2\sin^2\varphi)\,W_3\},\\
l_3' &= (1-2\sin^2\varphi')\{U_2-(1-2\sin^2\varphi)\,U_4\}+\{W_2-(1-2\sin^2\varphi)\,W_4\},\\
l_4' &= (1-2\sin^2\varphi')\{U_1-2\sin^2\varphi\,U_3\}+\{W_1-2\sin^2\varphi\,W_3\},\\
m_1' &= 2\sin^2\varphi'\{X_2+2\sin^2\varphi\,X_4\}+\{V_2+2\sin^2\varphi\,V_4\},\\
m_2' &= 2\sin^2\varphi'\{X_1+(1-2\sin^2\varphi)\,X_3\}+\{V_1+(1-2\sin^2\varphi)\,V_3\},\\
m_3' &= 2\sin^2\varphi'\{X_2-(1-2\sin^2\varphi)\,X_4\}+\{V_2-(1-2\sin^2\varphi)\,V_4\},\\
m_4' &= 2\sin^2\varphi'\{X_1-2\sin^2\varphi\,X_3\}+\{V_1-2\sin^2\varphi\,V_3\},\\
p_1' &= 2\sin^2\varphi'\{U_2+2\sin^2\varphi\,U_4\}-\{W_2+2\sin^2\varphi\,W_4\},\\
p_2' &= 2\sin^2\varphi'\{U_1+(1-2\sin^2\varphi)\,U_3\}-\{W_1+(1-2\sin^2\varphi)\,W_3\},\\
p_3' &= 2\sin^2\varphi'\{U_2-(1-2\sin^2\varphi)\,U_4\}-\{W_2-(1-2\sin^2\varphi)\,W_4\},\\
p_4' &= 2\sin^2\varphi'\{U_1-2\sin^2\varphi\,U_3\}-\{W_1-2\sin^2\varphi\,W_3\},\\
q_1' &= (1-2\sin^2\varphi')\{X_2+2\sin^2\varphi\,X_4\}-\{V_2+2\sin^2\varphi\,V_4\},\\
q_2' &= (1-2\sin^2\varphi')\{X_1+(1-2\sin^2\varphi)\,X_3\}-\{V_1+(1-2\sin^2\varphi)\,V_3\},\\
q_3' &= (1-2\sin^2\varphi')\{X_2-(1-2\sin^2\varphi)\,X_4\}-\{V_2-(1-2\sin^2\varphi)\,V_4\},\\
q_4' &= (1-2\sin^2\varphi')\{X_1-2\sin^2\varphi\,X_3\}-\{V_1-2\sin^2\varphi\,V_3\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen bestimmen auch die Grössen l_1, l_2, u. s. w. durch die Grössen $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, u. s. w., d. h. durch die Werthe der Variabeln X_1, X_2, u. s. w. für $z = c$. Wegen der Gleichungen (17) sind dann auch die Grössen M, N, M′, N′ ausgedrückt durch die Grössen $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, u. s. w. Es handelt sich also nur darum, die Werthe dieser Grössen zu bestimmen.

Wir können nun nach der schon oben angewandten Methode mittelst der Differentialgleichungen (18) für die sechzehn Grössen X, U, V, W immer convergirende Reihen ableiten.

Es ergiebt sich durch partielle Integration der Differentialgleichungen (18):

$$X = X_0 + \alpha\int_0^z U\,dz,$$

$$U = U_0 - \alpha\int_0^z \frac{\sin^2\varphi' X + V}{\sin^2\varphi'}\,dz,$$

$$\varepsilon' V = \varepsilon V_0 + \alpha \int_0^z \varepsilon' \{(1 - 4 \sin^2 \varphi') U + W\} dz,$$

$$\varepsilon' W = \varepsilon W_0 - \alpha \int_0^z \varepsilon' (X + V) dz,$$

wenn X_0, U_0, V_0, W_0 die Werthe von X, U, V, W für $z = 0$ bezeichnen.

Indem wir nun wieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen successive die Werthe der Grössen X, U, V, W einsetzen, wie sie sich zuerst aus den Anfangsbedingungen (19) und dann aus den Gleichungen selbst bei Weglassung der noch zu berechnenden höheren Glieder ergeben, erhalten wir:

$$
(21)\left\{
\begin{aligned}
X_1 &= 1 - \alpha^2 \int\!\!\int dz_1\, dz_2 + \alpha^4 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3' \sin^2 \varphi_3'}{\varepsilon_3' \sin^2 \varphi_3'} \times \\
&\qquad \times dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots\cdots, \\
U_1 &= - \alpha \int dz_1 + \alpha^3 \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'} dz_1\, dz_2\, dz_3 - \cdots\cdots, \\
\varepsilon' V_1 &= - \alpha^2 \int\!\!\int \{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2')\}\, dz_1\, dz_2 + \\
&\quad + \alpha^4 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{[\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3']\, \varepsilon_3'\sin^2\varphi_3' +}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'} \\
&\quad \frac{+ [\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3'\sin^2\varphi_3']\, \varepsilon_4'(1 - 4\sin^2\varphi_4')}{\varepsilon_3'\sin^2\varphi_3'} dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots\cdots, \\
\varepsilon' W_1 &= - \alpha \int \varepsilon_1'\, dz_1 + \alpha^3 \int\!\!\int\!\!\int \{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3'\}\, dz_1\, dz_2\, dz_3 - \cdots\cdots; \\
X_2 &= \alpha \int dz_1 - \alpha^3 \int\!\!\int\!\!\int \frac{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} dz_1\, dz_2\, dz_3 + \cdots\cdots, \\
U_2 &= 1 - \alpha^2 \int\!\!\int \frac{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} dz_1\, dz_2 + \\
&\quad + \alpha^4 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'\}\, \{\varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3') + \varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'\} +}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'\; \varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'} \\
&\quad \frac{+ \{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\}\, \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'\; \varepsilon_4'\sin^2\varphi_4'} dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots\cdots, \\
\varepsilon' V_2 &= \alpha \int \varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1')\, dz_1 - \\
&\quad - \alpha^3 \int\!\!\int\!\!\int \frac{\{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2')\}\, \varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3') +}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} \\
&\quad \frac{+ \{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\}\, \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} dz_1\, dz_2\, dz_3 + \cdots\cdots, \\
\varepsilon' W_2 &= - \alpha^2 \int\!\!\int \{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\}\, dz_1\, dz_2 + \\
&\quad + \alpha^4 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\}\, \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2' +}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} \\
&\quad \frac{+ \{\varepsilon_1'(1 - 4\sin^2\varphi_1') + \varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'\}\, \{\varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3') + \varepsilon_4'\}}{\varepsilon_2'\sin^2\varphi_2'} dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots\cdots;
\end{aligned}
\right.
$$

$$\frac{1}{\varepsilon} X_3 = -\alpha^2 \int\int \frac{dz_1\, dz_2}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'} + \alpha^4 \int\int\int\int \frac{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'\ \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'} \times dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} U_3 = -\alpha \int \frac{dz_1}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'} + \alpha^3 \int\int\int \frac{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'\ \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'} \times dz_1\, dz_2\, dz_3 - \cdots,$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} V_3 = 1 - \alpha^2 \int\int \frac{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2')}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'}\, dz_1\, dz_2 + $$

$$+ \alpha^4 \int\int\int\int \frac{\{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'\}\, \varepsilon_4'(1 - 4\sin^2\varphi_4') +}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'\ \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}$$

$$\frac{+ \{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3'\}\, \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'\ \varepsilon_3' \sin^2\varphi_3'}\, dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots, \tag{21}$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} W_3 = -\alpha \int dz_1 + \alpha^3 \int\int\int \frac{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1' + \varepsilon_2'(1 - 4\sin^2\varphi_2') + \varepsilon_3'}{\varepsilon_1' \sin^2\varphi_1'}\, dz_1\, dz_2\, dz_3 - \cdots;$$

$$\frac{1}{\varepsilon} X_1 = -\alpha^3 \int\int\int \frac{dz_1\, dz_2\, dz_3}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} U_1 = -\alpha^2 \int\int \frac{dz_1\, dz_2}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'} + \alpha^4 \int\int\int\int \frac{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2' + \varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3') + \varepsilon_4' \sin^2\varphi_4'}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'\ \varepsilon_4' \sin^2\varphi_4'} \times dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots,$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} V_1 = \alpha \int dz_1 - \alpha^3 \int\int\int \frac{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2' + \varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3')}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'}\, dz_1\, dz_2\, dz_3 + \cdots,$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} W_1 = 1 - \alpha^2 \int\int dz_1\, dz_2 + \alpha^4 \int\int\int\int \frac{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2' + \varepsilon_3'(1 - 4\sin^2\varphi_3') + \varepsilon_4'}{\varepsilon_2' \sin^2\varphi_2'} \times dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 - \cdots.$$

Hierin sollen, wie früher, ε_h' und φ_h' bezeichnen, dass in den Functionen ε' und φ' das Argument gleich z_h zu setzen sei, und die wiederholten Integrale sind wieder der Ungleichung entsprechend zu nehmen:

$$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_h < z.$$

Die Gesetze, nach welchen die verschiedenen Reihen (21) zu bilden sind, haben nicht mehr die einfache Form, welche sie für die Reihen (13) besitzen; man überzeugt sich jedoch bei näherer Betrachtung, dass die sämmtlichen Reihen unter den früher gemachten Voraussetzungen convergiren.

Es geben ferner die Gleichungen (21) die Werthe der Grössen $\overline{X_1}$, $\overline{U_1}$, u. s. w., indem wir $z = c$ setzen, und damit erhalten wir die Werthe der Grössen l_1, l_2, u. s. w. Wir wollen davon Gebrauch machen, um diese Grössen für den Fall zu bestimmen, dass die Dicke c der Uebergangsschicht gegen eine Wellenlänge verschwindend klein sei. Es erhalten dann wieder alle Integrale einen verschwindend kleinen Werth; somit ergiebt sich in diesem Falle:

$$\overline{X}_1 = 1, \quad \overline{U}_1 = 0, \quad \overline{V}_1 = 0, \quad \overline{W}_1 = 0;$$
$$\overline{X}_2 = 0, \quad \overline{U}_2 = 1, \quad \overline{V}_2 = 0, \quad \overline{W}_2 = 0;$$
$$\overline{X}_3 = 0, \quad \overline{U}_3 = 0, \quad \overline{V}_3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}, \quad \overline{W}_3 = 0;$$
$$\overline{X}_4 = 0, \quad \overline{U}_4 = 0, \quad \overline{V}_4 = 0, \quad \overline{W}_4 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Dann ist aber nach den Gleichungen (20):

$$l_1 = \frac{\varepsilon_1 + 2\omega}{\varepsilon_1}, \qquad l_2 = 0, \qquad l_3 + l_4 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon + 2\omega}{\varepsilon_1},$$
$$m_1 = 0, \qquad m_2 = \frac{\varepsilon - 2\omega}{\varepsilon_1}, \qquad m_3 + m_4 = -\frac{2\omega}{\varepsilon_1},$$
$$p_1 + q_1 = -\frac{2\omega}{\varepsilon_1}, \quad p_2 + q_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon + 2\omega}{\varepsilon_1}, \quad p_3 + q_3 + p_4 + q_4 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{\varepsilon_1},$$

wo, wie früher, gesetzt ist:

$$\omega = \varepsilon \sin^2\varphi - \varepsilon_1 \sin^2\varphi_1 .$$

Folglich erhalten wir aus den Gleichungen (17):

$$\mathsf{M} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} \frac{\varepsilon\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, \quad \mathsf{N} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1 - 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)},$$
$$\mathsf{M}' = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1} \frac{4\omega^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}, \quad \mathsf{N}' = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} \frac{\varepsilon\varepsilon_1 + (\varepsilon - 2\omega)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}.$$

Dies sind aber die Gleichungen (7), S. 495. Somit ergeben sich auch hier bei der Annahme eines sehr raschen stetigen Uebergangs von dem einen homogenen Medium zum andern dieselben Formeln für die Reflexion und Brechung, wie bei der Annahme eines plötzlichen Uebergangs.

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, ob für einen beliebigen Werth von c die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' + \mathsf{M}'\mathsf{N} = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}$$

erfüllt ist. Damit die Ausdrücke (17) dieser Gleichung Genüge leisten, muss sein:

$$\begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3 + l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3 + m_4 \\ p_1 + q_1, & p_2 + q_2, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(p_3 + q_3 + p_4 + q_4).$$

Wir haben also nachzuweisen, dass diese Gleichung stattfindet.

Zu diesem Ende leiten wir zunächst aus den Differentialgleichungen (18) eine Anzahl Relationen ab, welche zwischen den particulären Lösungen X, U, V, W für jeden Werth von z gelten; hieraus werden sich dann ganz ähnliche Relationen ergeben zwischen den Grössen l_1', l_2', ..., welche lineäre Ausdrücke jener Lösungen sind; aus diesen letztern Relationen wird endlich das Bestehen der obigen Gleichung unmittelbar folgen.

Nennen wir

$$X_h,\ U_h,\ V_h,\ W_h, \quad \text{und} \quad X_k,\ U_k,\ V_k,\ W_k$$

zwei beliebige Systeme von particulären Lösungen der Differentialgleichungen (18), so muss sein:

$$\varepsilon'\left(W_k \frac{dX_h}{dz} - W_h \frac{dX_k}{dz}\right) = U_h \frac{d\cdot\varepsilon' V_k}{dz} - U_k \frac{d\cdot\varepsilon' V_h}{dz} = \alpha\,\varepsilon'(U_h W_k - U_k W_h),$$

$$\varepsilon'\left(V_k \frac{dU_h}{dz} - V_h \frac{dU_k}{dz}\right) = X_h \frac{d\cdot\varepsilon' W_k}{dz} - X_k \frac{d\cdot\varepsilon' W_h}{dz} = \alpha\varepsilon'(X_h V_k - X_k V_h).$$

Hieraus folgt:

$$X_h \frac{d\cdot\varepsilon' W_k}{dz} + \varepsilon' W_k \frac{dX_h}{dz} - X_k \frac{d\cdot\varepsilon' W_h}{dz} - \varepsilon' W_h \frac{dX_k}{dz} -$$

$$- U_h \frac{d\cdot\varepsilon' V_k}{dz} - \varepsilon' V_k \frac{dU_h}{dz} + U_k \frac{d\cdot\varepsilon' V_h}{dz} + \varepsilon' V_h \frac{dU_k}{dz} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dz}\left\{\begin{vmatrix} X_h, & X_k \\ \varepsilon' W_h, & \varepsilon' W_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_h, & U_k \\ \varepsilon' W_h, & \varepsilon' W_k \end{vmatrix}\right\} = 0.$$

Wir erhalten somit, wenn $C_{h,k}$ eine Constante bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} X_h, & X_k \\ W_h, & W_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_h, & U_k \\ V_h, & V_k \end{vmatrix} = C_{h,k} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}. \tag{22}$$

Wir können nun für h und k die Zahlen 1, 2, 3, 4 setzen; ferner erhalten wir die Werthe der Constanten $C_{h,k}$ für die verschiedenen Fälle, indem wir $z = 0$ setzen. Wir finden so nach den Anfangsbedingungen (19) für die Grössen X, U, V, W:

$$C_{1,2} = 0, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{1,4} = 1, \quad C_{2,3} = -1, \quad C_{2,4} = 0, \quad C_{3,4} = 0.$$

Damit sind die Constanten bestimmt; denn wir haben:

$$C_{h,k} = -C_{k,h}, \quad C_{h,h} = 0.$$

Demnach haben wir sechs Relationen zwischen den sechszehn Grössen X, U, V, W erhalten.

Wir können ferner aus diesen Relationen sechs andere ableiten. Multipliciren wir nämlich die sechs Relationen auf beiden Seiten mit

$$\begin{vmatrix} X_3, & X_4 \\ U_3, & U_4 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} X_2, & X_4 \\ U_2, & U_4 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ U_2, & U_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ U_1, & U_4 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} X_1, & X_3 \\ U_1, & U_3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} X_1, & X_2 \\ U_1, & U_2 \end{vmatrix},$$

und addiren wir dann die beiden Seiten, so verschwindet die linke Seite; wir erhalten demnach:

$$\begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ U_2, & U_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ U_1, & U_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf ganz ähnlichem Wege ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ V_1, & V_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} V_2, & V_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_1, & V_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Differentiiren wir aber die zuerst erhaltene Relation, und nehmen wir Rücksicht auf die Differentialgleichungen (18), welchen die Grössen X, U, V, W Genüge leisten sollen, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ V_1, & V_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ferner durch nochmalige Differentiation nach Multiplication mit ε':

$$\alpha \begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ \varepsilon' V_2, & \varepsilon' V_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ \varepsilon' V_1, & \varepsilon' V_4 \end{vmatrix} +$$
$$+ \alpha \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ \varepsilon' W_2, & \varepsilon' W_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ \varepsilon' W_1, & \varepsilon' W_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach den Relationen (22) ist aber:

$$-2\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix};$$

folglich muss sein:

$$\begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$
$$\begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ V_1, & V_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Differentiiren wir endlich eine der beiden Gleichungen nach Multiplication mit ε', so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} = 0,$$

und durch nochmalige Differentiation dieser Gleichung nach Multiplication mit ε':

$$\begin{vmatrix} V_2, & V_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_1, & V_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Demnach gelten zwischen den sechzehn Grössen X, U, V, W auch die folgenden sechs Relationen:

$$(23)\begin{cases} \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ U_1, & U_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ U_2, & U_3 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ V_1, & V_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} X_1, & X_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2, & X_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, & \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ V_1, & V_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \\ \begin{vmatrix} U_1, & U_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_2, & U_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} V_1, & V_4 \\ W_1, & W_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_2, & V_3 \\ W_2, & W_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Wenn aber die Relationen (22) und (23) zwischen den Grössen X, U, V, W stattfinden, so gelten zwischen den Grössen l', m', p', q' die beiden folgenden Systeme von sechs Relationen:

$$(24)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l_1', & l_2' \\ m_1', & m_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1', & p_2' \\ q_1', & q_2' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad
\begin{vmatrix} l_1', & l_3' \\ m_1', & m_3' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1', & p_3' \\ q_1', & q_3' \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} l_1', & l_4' \\ m_1', & m_4' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1', & p_4' \\ q_1', & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} l_2', & l_3' \\ m_2', & m_3' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_2', & p_3' \\ q_2', & q_3' \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} l_2', & l_4' \\ m_2', & m_4' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_2', & p_4' \\ q_2', & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} l_3', & l_4' \\ m_3', & m_4' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_3', & p_4' \\ q_3', & q_4' \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'},
\end{aligned}\right.$$

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l_1', & l_2' \\ m_1', & m_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l_3', & l_4' \\ m_3', & m_4' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad
\begin{vmatrix} l_1', & l_2' \\ p_1', & p_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l_3', & l_4' \\ p_3', & p_4' \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} l_1', & l_2' \\ q_1', & q_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l_3', & l_4' \\ q_3', & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} m_1', & m_2' \\ p_1', & p_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_3', & m_4' \\ p_3', & p_4' \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} m_1', & m_2' \\ q_1', & q_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_3', & m_4' \\ q_3', & q_4' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} p_1', & p_2' \\ q_1', & q_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_3', & p_4' \\ q_3', & q_4' \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Relationen folgt nun, dass die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft erfüllt ist. Denn wir haben wegen der Relationen (24):

$$\begin{vmatrix} l_1', & l_2', & l_3' + l_4' \\ m_1', & m_2', & m_3' + m_4' \\ p_1' + q_1', & p_2' + q_2', & p_3' + q_3' + p_4' + q_4' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} p_1', & p_2', & p_3' + p_4' \\ q_1', & q_2', & q_3' + q_4' \\ p_1' + q_1', & p_2' + q_2', & p_3' + q_3' + p_4' + q_4' \end{vmatrix} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(p_3' + q_3' + p_4' + q_4'),$$

folglich:

$$\begin{vmatrix} l_1', & l_2', & l_3' + l_4' \\ m_1', & m_2', & m_3' + m_4' \\ p_1' + q_1', & p_2' + q_2', & p_3' + q_3' + p_4' + q_4' \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(p_3' + q_3' + p_4' + q_4').$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von z, also auch für $z = c$; für diesen Werth erhalten wir aber die Gleichung, welche nach S. 524 die Giltigkeit des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kraft bedingt. —

Mittelst der Lösungen X, U, V, W müssen wir auch das Problem behandeln können, wo eine Lichtwelle in dem zweiten Medium sich fortpflanzt und an der Grenze mit dem ersten Medium reflectirt und gebrochen wird.

Benutzen wir wieder die S. 515 ff. für diesen Fall eingeführte Bezeichnung, so werden die Grössen (l), (m), (p), (q) in derselben Weise ausgedrückt durch die Grössen $(\overline{X})$, $(\overline{U})$, $(\overline{V})$, $(\overline{W})$, wie nach (20)

die Grössen l, m, p, q durch die Grössen $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$; wir haben nur φ und φ_1 mit einander zu vertauschen. Die Variabeln (X), (U), (V), (W) aber müssen Lösungen der Differentialgleichungen sein, welche aus (18) sich ergeben, wenn z in der entgegengesetzten Richtung positiv genommen wird. Demnach muss sein:

$$\begin{aligned}
(X)_h &= \quad\alpha_h X_1 + \beta_h X_2 + \gamma_h X_3 + \delta_h X_4 ,\\
(U)_h &= -(\alpha_h U_1 + \beta_h U_2 + \gamma_h U_3 + \delta_h U_4),\\
(V)_h &= \quad\alpha_h V_1 + \beta_h V_2 + \gamma_h V_3 + \delta_h V_4 ,\\
(W)_h &= -(\alpha_h W_1 + \beta_h W_2 + \gamma_h W_3 + \delta_h W_4).
\end{aligned}$$

Wir erhalten ferner zur Bestimmung der Coefficienten α_h, β_h, γ_h, δ_h aus der Bedingung, dass die Variabeln (X), (U), (V), (W) an der Grenze $z = c$ die in den Gleichungen (19) für die Variabeln X, U, V, W gegebenen Anfangswerthe annehmen, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_h \overline{X}_1 + \beta_h \overline{X}_2 + \gamma_h \overline{X}_3 + \delta_h \overline{X}_4 &= a_h ,\\
\alpha_h \overline{U}_1 + \beta_h \overline{U}_2 + \gamma_h \overline{U}_3 + \delta_h \overline{U}_4 &= b_h ,\\
\alpha_h \overline{V}_1 + \beta_h \overline{V}_2 + \gamma_h \overline{V}_3 + \delta_h \overline{V}_4 &= c_h ,\\
\alpha_h \overline{W}_1 + \beta_h \overline{W}_2 + \gamma_h \overline{W}_3 + \delta_h \overline{W}_4 &= d_h ,
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{array}{llll}
a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = 0, & a_4 = 0,\\
b_1 = 0, & b_2 = -1, & b_3 = 0, & b_4 = 0,\\
c_1 = 0, & c_2 = 0, & c_3 = 1, & c_4 = 0,\\
d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 0, & d_4 = -1.
\end{array}$$

Indem wir endlich $z = 0$ setzen, ergiebt sich:

$$\overline{(X)}_h = \alpha_h ,\quad \overline{(U)}_h = -\beta_h ,\quad \overline{(V)}_h = \gamma_h ,\quad \overline{(W)}_h = -\delta_h .$$

Es handelt sich also bloss darum, aus dem oben aufgestellten System linearer Gleichungen die Grössen α_h, β_h, γ_h, δ_h zu berechnen.

Nun ist nach den Relationen (22) und (23):

$$\begin{vmatrix}
\overline{X}_1, & \overline{X}_2, & \overline{X}_3, & \overline{X}_4\\
\overline{U}_1, & \overline{U}_2, & \overline{U}_3, & \overline{U}_4\\
\overline{V}_1, & \overline{V}_2, & \overline{V}_3, & \overline{V}_4\\
\overline{W}_1, & \overline{W}_2, & \overline{W}_3, & \overline{W}_4
\end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left\{\begin{vmatrix}\overline{U}_2, & \overline{U}_3\\ \overline{V}_2, & \overline{V}_3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\overline{U}_1, & \overline{U}_4\\ \overline{V}_1, & \overline{V}_4\end{vmatrix}\right\} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2;$$

wir haben ferner nach (22):

$$\begin{vmatrix}
\overline{U}_h, & \overline{U}_k, & \overline{U}_j\\
\overline{V}_h, & \overline{V}_k, & \overline{V}_j\\
\overline{W}_h, & \overline{W}_k, & \overline{W}_j
\end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left\{C_{h,k}\overline{W}_j + C_{k,j}\overline{W}_h + C_{j,h}\overline{W}_k\right\},$$

$$\begin{vmatrix} \overline{X_h}, & \overline{X_k}, & \overline{X_j} \\ \overline{V_h}, & \overline{V_k}, & \overline{V_j} \\ \overline{W_h}, & \overline{W_k}, & \overline{W_j} \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left\{C_{h,k}\overline{V_j} + C_{k,j}\overline{V_h} + C_{j,h}\overline{V_k}\right\},$$

$$\begin{vmatrix} \overline{X_h}, & \overline{X_k}, & \overline{X_j} \\ \overline{U_h}, & \overline{U_k}, & \overline{U_j} \\ \overline{W_h}, & \overline{W_k}, & \overline{W_j} \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left\{C_{h,k}\overline{U_j} + C_{k,j}\overline{U_h} + C_{j,h}\overline{U_k}\right\},$$

$$\begin{vmatrix} \overline{X_h}, & \overline{X_k}, & \overline{X_j} \\ \overline{U_h}, & \overline{U_k}, & \overline{U_j} \\ \overline{V_h}, & \overline{V_k}, & \overline{V_j} \end{vmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left\{C_{h,k}\overline{X_j} + C_{k,j}\overline{X_h} + C_{j,h}\overline{X_k}\right\}.$$

Demnach erhalten wir durch Auflösung der linearen Gleichungen:

$$\alpha_h = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left\{a_h\overline{W_4} - b_h\overline{V_4} + c_h\overline{U_4} - d_h\overline{X_4}\right\},$$

$$\beta_h = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left\{a_h\overline{W_3} - b_h\overline{V_3} + c_h\overline{U_3} - d_h\overline{X_3}\right\},$$

$$\gamma_h = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left\{a_h\overline{W_2} - b_h\overline{V_2} + c_h\overline{U_2} - d_h\overline{X_2}\right\},$$

$$\delta_h = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left\{a_h\overline{W_1} - b_h\overline{V_1} + c_h\overline{U_1} - d_h\overline{X_1}\right\}.$$

Hiernach wird also:

$$\overline{(X)_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{W_4},\quad \overline{(X)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_4},\quad \overline{(X)_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{U_4},\quad \overline{(X)_4} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_4},$$

$$\overline{(U)_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{W_3},\quad \overline{(U)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_3},\quad \overline{(U)_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{U_3},\quad \overline{(U)_4} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_3},$$

$$\overline{(V)_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{W_2},\quad \overline{(V)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_2},\quad \overline{(V)_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{U_2},\quad \overline{(V)_4} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_2},$$

$$\overline{(W)_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{W_1},\quad \overline{(W)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_1},\quad \overline{(W)_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{U_1},\quad \overline{(W)_4} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_1}.$$

Indem wir nun von diesen Werthen Gebrauch machen, ergiebt sich:

$$(l)_1 = (1 - 2\sin^2\varphi)\left\{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_3} + 2\sin^2\varphi_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_3}\right\} + \left\{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{V_1} + 2\sin^2\varphi_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\overline{X_1}\right\} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}m_2,$$

u. s. w.,

also:

$$(l)_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}m_2,\quad (l)_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}l_2,\quad (l)_3 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}q_2,\quad (l)_4 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}p_2,$$

$$(m)_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}m_1,\quad (m)_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}l_1,\quad (m)_3 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}q_1,\quad (m)_4 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}p_1,$$

$$(p)_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}m_4,\quad (p)_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}l_4,\quad (p)_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}q_4,\quad (p)_4 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}p_4,$$

$$(q)_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}m_3,\quad (q)_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}l_3,\quad (q)_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}q_3,\quad (q)_4 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}p_3.$$

Mithin erhalten wir schliesslich:

$$(M) = \frac{\varepsilon_1 \cos\varphi_1}{\varepsilon \cos\varphi} \frac{1}{p_3 + q_3 + p_4 + q_4} \begin{vmatrix} m_2 \,, & -p_2 - q_2 \\ -m_3 - m_4 \,, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix},$$

$$(N) = -\frac{\varepsilon_1 \sin\varphi_1}{\varepsilon \cos\varphi} \frac{1}{p_3 + q_3 + p_4 + q_4} \begin{vmatrix} l_2 \,, & -p_2 - q_2 \\ -l_3 - l_4 \,, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix},$$

$$(M') = \frac{\varepsilon_1 \cos\varphi_1}{\varepsilon \sin\varphi} \frac{1}{p_3 + q_3 + p_4 + q_4} \begin{vmatrix} m_1 \,, & -p_1 - q_1 \\ -m_3 - m_4 \,, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix},$$

$$(N') = \frac{\varepsilon_1 \sin\varphi_1}{\varepsilon \sin\varphi} \frac{1}{p_3 + q_3 + p_4 + q_4} \begin{vmatrix} l_1 \,, & -p_1 - q_1 \\ -l_3 - l_4 \,, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix}.$$

Wir finden also, wenn wieder

$$(15) \qquad f = \frac{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}$$

gesetzt wird:

$$(26) \qquad (M) = fN', \quad (N) = fN, \quad (M') = fM', \quad (N') = fM.$$

Demnach wird:

$$(M)(N') + (M')(N) = \frac{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi},$$

d. h. die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft ist auch in diesem Falle erfüllt.

4.

Annahme eines stetigen Uebergangs von dem einen homogenen Medium zum andern.

a. Ableitung der gefundenen Resultate aus den elastischen Differentialgleichungen.

Zu denselben Resultaten gelangen wir auf dem folgenden Wege:

Wir denken uns den ganzen unendlichen Raum auf der negativen Seite der Ebene $z = 0$ erfüllt von einem homogenen elastischen Medium, dessen Dichtigkeit gleich ε und dessen Elasticität gleich a sei. Ferner sei der ganze unendliche Raum auf der positiven Seite der Ebene $z = c$, wo c positiv sein soll, erfüllt von einem zweiten homogenen elastischen Medium, dessen Dichtigkeit gleich ε_1 und dessen Elasticität gleich a_1 sei. Endlich nehme den Raum zwischen den beiden Ebenen $z = 0$ und $z = c$ ein elastisches Medium von variabler Dichtigkeit und Elasticität ein, welches einen stetigen Uebergang von dem einen homogenen Medium zum andern vermittle; es seien also in dieser Uebergangsschicht die Dichtigkeit ε' und die Elasticität a' Functionen von z, und es werde für $z = 0$:

$$\varepsilon' = \varepsilon, \quad a' = a,$$

für $z = c$:

$$\varepsilon' = \varepsilon_1, \quad a' = a_1.$$

Wir nehmen wieder an, es seien die beiden homogenen Medien incompressibel; nennen wir also die Verrückungen in dem ersten u,

v, w, in dem zweiten u_1, v_1, w_1, die einzuführenden Multiplicatoren $\varepsilon\Lambda$ und $\varepsilon_1\Lambda_1$, so gelten die früher aufgestellten Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in den beiden Medien. Für das zweite Medium wollen wir wieder statt z die unabhängige Variable $z_1 = z - c$ einführen; es ist dann für dieses Medium:

$$0 < z_1 < \infty.$$

Wir nehmen ferner an, es sollen die Verrückungen u', v', w' in der Uebergangsschicht der Bedingung Genüge leisten:

$$(a) \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Dann können wir auf dem früher eingeschlagenen Wege die Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in der Uebergangsschicht ableiten. Wir müssen nur berücksichtigen, dass die Constante a' in den Werthen der Druckcomponenten:

$$-X_x = 2a'\frac{\partial u'}{\partial x}, \qquad -Y_z = -Z_y = a'\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right),$$

$$-Y_y = 2a'\frac{\partial v'}{\partial y}, \qquad -Z_x = -X_z = a'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right),$$

$$-Z_z = 2a'\frac{\partial w'}{\partial z}, \qquad -X_y = -Y_x = a'\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right),$$

eine Function von z ist, ebenso die Dichtigkeit ε'. Nennen wir, dem Frühern entsprechend, den Multiplicator $\varepsilon'\Lambda'$, setzen wir ferner voraus, es seien die Grössen u', v', w', Λ' unabhängig von y, so werden die Differentialgleichungen:

$$\varepsilon'\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = 2a'\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial \cdot a'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right)}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon'\Lambda'}{\partial x},$$

$$\varepsilon'\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = a'\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial \cdot a'\frac{\partial v'}{\partial z}}{\partial z},$$

$$\varepsilon'\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = a'\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z}\right) + 2\frac{\partial \cdot a'\frac{\partial w'}{\partial z}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon'\Lambda'}{\partial z}.$$

Mit der Bedingungsgleichung (a) haben wir also:

$$(1, a) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ \varepsilon'\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial a'}{\partial z}\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right) + \varepsilon'\frac{\partial \Lambda'}{\partial x}, \\ \varepsilon'\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = a'\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial a'}{\partial z}\frac{\partial v'}{\partial z}, \\ \varepsilon'\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = a'\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + 2\frac{\partial a'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon'\Lambda'}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir müssen nun auch noch die Bedingungen an den beiden Grenzen $z = 0$ und $z = c$ aufsuchen; es folgen diese Bedingungen

aus der Continuität in Bezug auf die Verrückung und auf den Druck. Wir haben

$$\text{für } z = 0$$

zunächst die drei Bedingungen:

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

und dann die drei weiteren:

$$a\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = a'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right),$$

$$a\frac{\partial v}{\partial z} = a'\frac{\partial v'}{\partial z},$$

$$2a\frac{\partial w}{\partial z} + \varepsilon\Lambda = 2a'\frac{\partial w'}{\partial z} + \varepsilon'\Lambda'.$$

Nun ist aber für $z = 0$:

$$a = a', \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

ferner wegen der ersten Bedingungen, die identisch in Bezug auf x erfüllt sein müssen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w'}{\partial x},$$

folglich mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

auch

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial z}.$$

Demnach werden die Bedingungen für $z = 0$:

$$(2,\ a) \qquad \begin{cases} u = u', & v = v', & w = w', \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u'}{\partial z}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v'}{\partial z}, & \Lambda = \Lambda', \end{cases}$$

und ganz entsprechend die Bedingungen für $z = e$, $z_1 = 0$:

$$(3,\ a) \qquad \begin{cases} u_1 = u', & v_1 = v', & w_1 = w', \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial u'}{\partial z}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial v'}{\partial z}, & \Lambda_1 = \Lambda'. \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, für die Grössen u', v', w' und Λ' solche Ausdrücke zu finden, dass diesen Gleichungen Genüge geleistet wird, wenn wir für die Grössen u, v, w, Λ und u_1, v_1, w_1, Λ_1 die frühern Ausdrücke annehmen.

Aus der Form der Gleichungen folgt sofort, dass wir wieder die beiden Fälle, wo das einfallende Licht senkrecht auf die Einfallsebene und wo es in der Einfallsebene schwingt, gesondert betrachten können.

Das einfallende Licht schwinge senkrecht auf die Einfallsebene.

Wir setzen:

$$v = P\,e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + P'e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)},$$

$$v_1 = P_1 e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z_1\cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)},$$

und suchen für v' einen Ausdruck, welcher der Differentialgleichung

$$\varepsilon'\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = a'\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial a'}{\partial z}\,\frac{\partial v'}{\partial z}$$

genügt, und welcher die zur Erfüllung der Grenzbedingungen geeignete Form besitzt. Diese Form ist die folgende:

$$v' = Z e^{i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

wo wieder

$$\alpha = \frac{2\pi\sin\varphi}{\lambda} = \frac{2\pi\sin\varphi_1}{\lambda_1}$$

ist, und wo Z eine beliebige Function von z bezeichnet. Setzen wir diesen Werth in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich für Z die Gleichung:

$$\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Z = a'\left(\alpha^2 Z - \frac{d^2 Z}{dz^2}\right) - \frac{da'}{dz}\,\frac{dZ}{dz},$$

oder, wenn wir wie oben setzen:

$$\frac{a'}{\varepsilon'} = \frac{\lambda'^2}{T^2} = \frac{\lambda^2\sin^2\varphi'}{T^2\sin^2\varphi} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{\sin^2\varphi'}{\alpha^2},$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon'\sin^2\varphi'\,\frac{dZ}{dz}}{dz} + \alpha^2\varepsilon'\cos^2\varphi'\,Z = 0.$$

Führen wir nun die zweite Variable Y durch die Gleichung ein:

$$\sin^2\varphi'\,\frac{dZ}{dz} = -\,\alpha Y,$$

so müssen die beiden Variabeln Z und Y den Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\frac{dZ}{dz} = -\,\frac{\alpha}{\sin^2\varphi'}\,Y,$$

$$\frac{d\varepsilon' Y}{dz} = \alpha\varepsilon'\cos^2\varphi'\,Z.$$

Dies sind aber die Differentialgleichungen (10).

Nennen wir also wieder Z_1, Y_1 und Z_2, Y_2 die beiden Systeme particulärer Lösungen, welche durch die Anfangsbedingungen (11) bestimmt werden, so muss sein:

$$Z = AZ_1 + BZ_2, \qquad Y = AY_1 + BY_2,$$

wo A und B zwei Constanten bezeichnen; wir erhalten demnach:

$$v' = (A Z_1 + B Z_2)\, e^{i\left(a x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\sin^2\varphi'}(A Y_1 + B Y_2)\, e^{i\left(a x - 2\pi \frac{t}{T}\right)}.$$

Indem wir nun in die Grenzgleichungen

$$\text{für } z = 0: \qquad v' = v\,, \quad \frac{dv'}{dz} = \frac{dv}{dz}\,.$$

$$\text{und für } z = c: \qquad v' = v_1\,, \quad \frac{dv'}{dz} = \frac{dv_1}{dz_1}$$

die angegebenen Werthe von v, v', v_1 einführen, erhalten wir:

$$A = P + P'\,, \quad B = -i\sin\varphi\cos\varphi\,(P - P'),$$

$$A\overline{Z_1} + B\overline{Z_2} = P_1\,, \quad A\overline{Y_1} + B\overline{Y_2} = -i\sin\varphi_1\cos\varphi_1\, P_1\,.$$

Setzen wir aber die Werthe von A und B aus den beiden erstern Gleichungen ein in die beiden letztern:

$$P_1 = A\overline{Z_1} + B\overline{Z_2} = \frac{i}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}(A\overline{Y_1} + B\overline{Y_2}),$$

so ergiebt sich:

$$P_1 = \overline{Z_1}(P + P') - i\sin\varphi\cos\varphi\,\overline{Z_2}(P - P') =$$

$$= \frac{i\overline{Y_1}}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}(P + P') + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\,\overline{Y_2}(P - P').$$

Wir finden somit:

$$M = \overline{Z_1}\,,\; N = -\sin\varphi\cos\varphi\,\overline{Z_2},\; M' = \frac{\overline{Y_1}}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\,,\; N' = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}\,\overline{Y_2}.$$

Dies sind aber die Gleichungen (12). Wir gelangen also für das senkrecht auf die Einfallsebene schwingende Licht zu genau denselben Resultaten, wie früher. —

Wir nehmen zweitens an, das einfallende Licht schwinge in der Einfallsebene.

Wir haben dann für die Bewegung in dem ersten homogenen Medium:

$$u = S\cos\varphi\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + S'\cos\varphi\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} +$$

$$+ L' e^{az + i\left(ax - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

$$w = -S\sin\varphi\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} + S'\sin\varphi\, e^{i2\pi\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)} -$$

$$- iL' e^{az + i\left(ax - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda = \frac{ia\alpha}{\varepsilon\sin^2\varphi}\, L' e^{az + i\left(ax - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

und für die Bewegung in dem zweiten homogenen Medium:

$$u_1 = \quad S_1 \cos\varphi_1 \, e^{i 2\pi\left(\frac{x \sin\varphi_1 + z_1 \cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)} + \quad L_1 \, e^{-a z_1 + i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$w_1 = - S_1 \sin\varphi_1 \, e^{i 2\pi\left(\frac{x \sin\varphi_1 + z_1 \cos\varphi_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right)} + i L_1 \, e^{-a z_1 + i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda_1 = \frac{i a_1 \alpha}{\varepsilon_1 \sin^2\varphi_1} \, L_1 \, e^{-a z_1 + i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)}.$$

Es müssen ferner die Grössen u', w', Λ' in der Uebergangsschicht den Gleichungen Genüge leisten:

$$0 = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a' \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial a'}{\partial z}\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right) + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial x},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = a' \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + 2 \frac{\partial a'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon' \Lambda'}{\partial z}.$$

Wir setzen daher:

$$u' = i U e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$w' = \quad X e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Y e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

wo X, U, Y Functionen von z sein sollen. Führen wir diese Werthe in die Differentialgleichungen ein, so ergiebt sich:

$$0 = - \alpha U + \frac{dX}{dz},$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varepsilon' U = a \left(\alpha^2 U - \frac{d^2 U}{dz^2}\right) - \frac{da'}{dz}\left(\alpha X + \frac{dU}{dz}\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha \varepsilon' Y,$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varepsilon' X = a' \left(\alpha^2 X - \frac{d^2 X}{dz^2}\right) - 2 \frac{da'}{dz} \frac{dX}{dz} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{d\varepsilon' Y}{dz};$$

setzen wir also wieder:

$$a' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{\varepsilon' \sin^2\varphi'}{\alpha^2},$$

so können wir die beiden letzten Gleichungen in der Form schreiben:

$$\alpha^2 \varepsilon' U = - \frac{d \cdot \varepsilon' \sin^2\varphi' \left(\alpha X + \frac{dU}{dz}\right)}{dz} + \alpha \varepsilon' \sin^2\varphi' \left(\alpha U + \frac{dX}{dz}\right) - \alpha^3 \varepsilon' Y,$$

$$\alpha^2 \varepsilon' X = - \frac{d \cdot \left(\alpha^2 \varepsilon' Y + 2 \varepsilon' \sin^2\varphi' \frac{dX}{dz}\right)}{dz} + \varepsilon' \sin^2\varphi' \left(\alpha^2 X + \frac{d^2 X}{dz^2}\right).$$

Führen wir daher die neue Variable V mittelst der Gleichung ein:

$$\sin^2\varphi' \left(\alpha X + \frac{dU}{dz}\right) = - \alpha V,$$

ersetzen wir ferner die Variable Y durch die Variable

$$W = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^2 Y + 2\sin^2\varphi' \frac{dX}{dz}\right),$$

so erhalten wir zwischen den vier Variabeln X, U, V, W die Differentialgleichungen:

$$\frac{dX}{dz} = \alpha U$$

$$\frac{dU}{dz} = -\alpha \frac{\sin^2\varphi' X + V}{\sin^2\varphi'},$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon' V}{dz} = \alpha\varepsilon' \{(1 - 4\sin^2\varphi') U + W\},$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon' W}{dz} = -\alpha\varepsilon' (X + V).$$

Dies ist aber das System Differentialgleichungen (18). Wir können also setzen, indem wir die vier Systeme particulärer Lösungen annehmen, welche durch die Anfangsbedingungen (19) bestimmt werden:

$$w' = (AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4)\, e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$u' = i(AU_1 + BU_2 + CU_3 + DU_4)\, e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{i\alpha}{\sin^2\varphi'} \times$$

$$\{\sin^2\varphi'(AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4) + (AV_1 + BV_2 + CV_3 + DV_4)\}\, e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda' = \frac{\alpha a'}{\varepsilon' \sin^2\varphi'} \times$$

$$\{AW_1 + BW_2 + CW_3 + DW_4) - 2\sin^2\varphi'(AU_1 + BU_2 + CU_3 + DU_4)\}\, e^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)}.$$

Führen wir diese Werthe und die oben angegebenen von u, w, Λ und u_1, w_1, Λ_1 ein in die Bedingungsgleichungen für $z = 0$:

$$w' = w, \quad u' = u, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \Lambda' = \Lambda$$

und in die Bedingungsgleichungen für $z = c$:

$$w' = w_1, \quad u' = u_1, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \quad \Lambda' = \Lambda_1,$$

so ergiebt sich:

$$A = - \sin\varphi\,(S - S') - iL',$$

$$B = - i\cos\varphi\,(S + S') - iL',$$

$$C + \sin^2\varphi\, A = - \sin\varphi\cos^2\varphi\,(S - S') + i\sin^2\varphi\, L',$$

$$D - 2\sin^2\varphi\, B = iL',$$

oder

$$A = - \sin\varphi\,(S - S') - iL',$$

$$B = - i\cos\varphi\,(S + S') - iL',$$

$$C = -(1 - 2\sin^2\varphi)\sin\varphi\,(S - S') + 2\sin^2\varphi\, iL',$$

$$D = - 2\sin^2\varphi\, i\cos\varphi\,(S + S') + (1 - 2\sin^2\varphi)\, iL';$$

ferner ebenso:

$$A\overline{X}_1 + B\overline{X}_2 + C\overline{X}_3 + D\overline{X}_4 = -\sin\varphi_1\, S_1 + i L_1\,,$$
$$A\overline{U}_1 + B\overline{U}_2 + C\overline{U}_3 + D\overline{U}_4 = -i\cos\varphi_1\, S_1 - i L_1\,,$$
$$A\overline{V}_1 + B\overline{V}_2 + C\overline{V}_3 + D\overline{V}_4 = -(1-2\sin^2\varphi_1)\sin\varphi_1\, S_1 - 2\sin^2\varphi_1\, i L_1\,,$$
$$A\overline{W}_1 + B\overline{W}_2 + C\overline{W}_3 + D\overline{W}_4 = -2\sin^2\varphi_1\, i\cos\varphi_1\, S_1 + (1-2\sin^2\varphi_1)\, i L_1\,.$$

Eliminiren wir nun zunächst aus der zweiten und vierten und dann aus der ersten und dritten dieser letztern vier Gleichungen die Grösse $i L_1$, so ergiebt sich:

$$A\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, U_1 + W_1\right\} + B\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, U_2 + W_2\right\} +$$
$$+ C\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, U_3 + W_3\right\} + D\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, U_4 + W_4\right\} = -i\cos\varphi_1\, S_1\,,$$
$$A\left\{2\sin^2\varphi_1\, X_1 + V_1\right\} + B\left\{2\sin^2\varphi_1\, X_2 + V_2\right\} +$$
$$+ C\left\{2\sin^2\varphi_1\, X_3 + V_3\right\} + D\left\{2\sin^2\varphi_1\, X_4 + V_4\right\} = -\sin\varphi_1\, S_1\,.$$

Eliminiren wir ferner aus der ersten und dritten Gleichung $\sin\varphi_1\, S_1$, aus der zweiten und vierten $i\cos\varphi_1\, S_1$ und dann aus den beiden so erhaltenen Gleichungen $i L_1$, so erhalten wir die dritte Gleichung:

$$A\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, X_1 + 2\sin^2\varphi_1\, U_1 - V_1 - W_1\right\} +$$
$$+ B\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, X_2 + 2\sin^2\varphi_1\, U_2 - V_2 - W_2\right\} +$$
$$+ C\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, X_3 + 2\sin^2\varphi_1\, U_3 - V_3 - W_3\right\} +$$
$$+ D\left\{(1-2\sin^2\varphi_1)\, X_4 + 2\sin^2\varphi_1\, U_4 - V_4 - W_4\right\} = 0\,.$$

In die drei so erhaltenen Gleichungen setzen wir nun die Werthe der Constanten A, B, C, D ein, wie sie die vier ersten Gleichungen durch $S - S'$, $S + S'$ und L' geben. Dann erhalten wir, wenn die Grössen l_1, l_2, u. s. w. die durch die Gleichungen (20), S. 521 angegebene Bedeutung haben:

$$i\cos\varphi\, l_1(S+S') + \sin\varphi\, l_2(S-S') + i(l_3+l_4)\, L' = i\cos\varphi_1\, S_1\,,$$
$$i\cos\varphi\, m_1(S+S') + \sin\varphi\, m_2(S-S') + i(m_3+m_4)\, L' = \sin\varphi_1\, S_1\,,$$
$$i\cos\varphi\,(p_1+q_1)(S+S') + \sin\varphi\,(p_2+q_2)(S-S') + i(p_3+q_3+p_4+q_4)\, L' = 0.$$

Dies sind aber die Gleichungen, welche wir früher (S. 519) zur Bestimmung der Grössen S', S_1 und L' durch S erhalten haben, und welche zu den Werthen (17) der Grössen M, N, M', N' führen; wir erhalten also auch in dem Falle, wo die Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden, genau dieselben Formeln, wie früher.

b. Andere Form der Incompressibilitätsbedingung für den Fall variabler Dichtigkeit.

Bei der Ableitung der Formeln für die Reflexion und Brechung auf dem zuletzt eingeschlagenen Wege haben wir die Bedingung ge-

stellt, dass die Verrückungen u', v', w' in der Uebergangsschicht der Gleichung Genüge leisten sollen:

$$(a) \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Wenn nun die Dichtigkeit der beiden homogenen Aethermedien eine verschiedene ist, wenn also das Medium, welches den stetigen Uebergang von dem einen homogenen Medium zu dem andern vermittelt, eine veränderliche Dichtigkeit besitzt, so folgt die Bedingung (a) nicht mit Nothwendigkeit aus der angenommenen Imcompressibilität. Es kann nämlich die Eigenschaft der Incompressibilität in verschiedenem Sinne aufgefasst werden, entweder so, dass eine bestimmte Stelle des Mediums, welche an der Bewegung theilnimmt, immer dieselbe Dichtigkeit besitzen soll, oder so, dass die Dichtigkeit an einem bestimmten Orte des Raumes ungeändert bleiben soll; der erstern Auffassung entspricht die Bedingung (a), der letztern dagegen die Bedingung:

$$(b) \qquad \frac{\partial \varepsilon' u'}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon' v'}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon' w'}{\partial z} = 0.$$

Demnach führen die beiden Auffassungen nur dann zu derselben Bedingung, wenn die Dichtigkeit constant ist.

Wir müssen auf diesen Punkt näher eingehen*). Es bezeichnet ε' die Dichtigkeit an dem Orte x, y, z beim natürlichen Gleichgewichtszustand des Mediums, und es ist in dem betrachteten Fall ε' gegeben als Function des Orts x, y, z. Treten nun die Verrückungen u', v', w' ein, ebenfalls gegeben als Functionen des Orts x, y, z, so ist die Stelle des Mediums, welche sich beim Gleichgewichtszustand an dem Ort x, y, z befunden hat, an den Ort $x + u'$, $y + v'$, $z + w'$ versetzt; es ist ferner, wenn die Differentialquotienten von u', v', w' nach x, y, z so klein angenommen werden, dass die höhern Potenzen und die Produkte derselben zu vernachlässigen sind, die Dichtigkeit für die betreffende Stelle des Mediums gleich

$$\varepsilon'\left(1 - \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{\partial w'}{\partial z}\right)$$

zu setzen; denn die Volumina, welche von einem kleinen Theile des Mediums, der sich beim Gleichgewichtszustand an dem Orte x, y, z befindet, vor und nach eingetretener Verrückung eingenommen werden, verhalten sich, wie 1 zu $1 + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}$. Demnach muss, wenn der Stelle des Mediums immer dieselbe Dichtigkeit zukommen soll, die Gleichung erfüllt sein:

---

*) Vergl. S. 42 und 43 der oben citirten Schrift von C. Neumann: „Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes."

$$(a)\qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0.$$

Soll dagegen an dem bestimmten Orte des Raumes die Dichtigkeit denselben Werth behalten, so muss die Dichtigkeit, wie sie nach eingetretener Verrückung an dem Orte $x+u'$, $y+v'$, $z+w'$ besteht, denjenigen Werth besitzen, welchen sie beim Gleichgewichtszustand an demselben Orte gehabt hat. Dieser Werth ist aber, wenn die Verrückungen u', v', w' so klein angenommen werden, dass bei der Entwicklung von ε' nach dem Taylor'schen Lehrsatze die höhern Glieder wegzulassen sind, gleich zu setzen:

$$\varepsilon'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}u'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}v'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}w'.$$

Bei dieser Auffassung der Incompressibilität ergiebt sich also die Bedingung:

$$\varepsilon'\left(1-\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial y}-\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=\varepsilon'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}u'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}v'+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}w'$$

oder

$$(b)\qquad \frac{\partial\varepsilon'u'}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon'v'}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon'w'}{\partial z}=0.$$

In dem vorliegenden Falle möchte nun, wenn die Dichtigkeit des Lichtäthers nicht überhaupt constant angenommen wird, wo beide Auffassungen zusammenfallen, die letztere Auffassung eher berechtigt sein, als die erstere. Da man nämlich den Aethermedien, wie sie im Innern der verschiedenen durchsichtigen Körper, in den Zwischenräumen zwischen den ponderabeln Molecülen angenommen werden, keine verschiedene Qualität wird zuschreiben wollen, muss die Verschiedenheit der Dichtigkeit der Verschiedenheit der Wirkung zugeschrieben werden, welche die qualitativ verschiedenen ponderabeln Molecüle auf die Aethertheilchen ausüben. Dadurch wird zunächst eine stetige Aenderung der Dichtigkeit in dem Aethermedium an der Grenze durchsichtiger Körper bedingt. Will man ferner ein solches Aethermedium mit Bezug auf die Lichtbewegung als incompressibel betrachten, so muss man annehmen, dass die Kräfte, welche bei der Fortpflanzung einer Lichtbewegung zwischen den Aethertheilchen in Thätigkeit treten, äusserst klein seien gegen die Kräfte, welche die ponderabeln Molecüle auf die Aethertheilchen ausüben, und welche die Dichtigkeit des Aethermediums beeinflussen. Man wird daher auch annehmen müssen, dass die ponderabeln Molecüle an der Lichtbewegung keinen wesentlichen Antheil nehmen, und dass die von den ruhenden ponderabeln Molecülen auf die Aethertheilchen ausgeübten, verhältnissmässig äusserst starken Kräfte die Dichtigkeit des Aethermediums während der Lichtbewegung an jedem Orte constant erhalten. Dann ist aber für die Uebergangsschicht die Bedingung (b) anzunehmen, und wir wollen daher jetzt auf Grund dieser Annahme die Rechnung durchführen.

Es sind zunächst die allgemeinen Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in der Uebergangsschicht aufzusuchen, und dann die Grenzgleichungen. Blicken wir nun zurück auf die Betrachtungen, welche uns auf Grund der Bedingung (a) zu solchen Gleichungen geführt haben, so ergiebt sich unmittelbar, dass bei Annahme der Bedingung (b), wenn der jetzt einzuführende Multiplicator Λ' genannt wird, die allgemeinen Differentialgleichungen die folgende Form annehmen:

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial x},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial y},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial z},$$

und dass die Bedingungen an der Grenze, so lange wir die Bezeichnung der Druckcomponenten beibehalten, keinerlei Aenderung erleiden.

Es sind nun aber, da die Gleichung (a) nicht mehr gilt, für die Druckcomponenten die folgenden Ausdrücke einzusetzen:

$$X_x = 3a' \frac{\partial u'}{\partial x} + a' \frac{\partial v'}{\partial y} + a' \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad -Y_z = -Z_y = a' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right),$$

$$-Y_y = a' \frac{\partial u'}{\partial x} + 3a' \frac{\partial v'}{\partial y} + a' \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad -Z_x = -X_z = a' \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right),$$

$$-Z_z = a' \frac{\partial u'}{\partial x} + a' \frac{\partial v'}{\partial y} + 3a' \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad -X_y = -Y_x = a' \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right).$$

Demnach werden, wenn wir nun wieder die Voraussetzung eintreten lassen, dass die Variabeln u', v', w', Λ' von y unabhängig seien, die allgemeinen Differentialgleichungen für die kleinen Schwingungen in der Uebergangsschicht, wo $0 < z < c$:

$$(1,\ b) \begin{cases} 0 = \varepsilon' \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial \varepsilon' w'}{\partial z}, \\ \varepsilon' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = 3a' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + a' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + 2a' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial a'}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial z}\right) + \varepsilon' \dfrac{\partial \Lambda'}{\partial x}, \\ \varepsilon' \dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = a' \left(\dfrac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial a'}{\partial z} \dfrac{\partial v'}{\partial z}, \\ \varepsilon' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = a' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + 3a' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + 2a' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial a'}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x} + 3\dfrac{\partial w'}{\partial z}\right) + \varepsilon' \dfrac{\partial \Lambda'}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir leiten ferner die Grenzgleichungen ab für $z = 0$ und für $z = c$. Es muss zunächst sein für $z = 0$:

$$u' = u, \quad v' = v, \quad w' = w;$$

ferner:

$$a' \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right) = a \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$a' \frac{\partial v'}{\partial z} = a \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a' \frac{\partial u'}{\partial x} + 3a' \frac{\partial w'}{\partial z} + \varepsilon' \Lambda' = a \frac{\partial u}{\partial x} + 3a \frac{\partial w}{\partial z} + \varepsilon \Lambda .$$

Nun ist aber für $z = 0$:

$$a' = a \, , \quad \varepsilon' = \varepsilon \, ,$$

dann wegen der drei ersten Bedingungen:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \, , \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \, ,$$

und somit wegen der Incompressibilitätsgleichungen:

$$\frac{\partial \cdot \varepsilon' w'}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} \, .$$

Demnach können die drei letztern Grenzgleichungen auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \, , \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} \, , \quad \Lambda' - 3 \frac{a'}{\varepsilon'^2} \frac{d\varepsilon'}{dz} w' = \Lambda \, .$$

Auch die letzte dieser Bedingungen erhält die frühere Form $\Lambda' = \Lambda$, wenn wir annehmen, dass nicht allein die Dichtigkeit ε', sondern auch ihr Differentialquotient $\frac{d\varepsilon'}{dz}$ nach der Normale auf die Grenze sich stetig ändere; es ist dann $\frac{d\varepsilon'}{dz} = 0$ für $z = 0$. Nach dem oben Gesagten wird diese Annahme jedenfalls zu machen sein; allein es kann unter Umständen für eine angenäherte Berechnung bequem sein, die Annahme bei Seite zu lassen, z. B. die Dichtigkeit ε' durch die Ordinaten einer gebrochenen Linie dargestellt anzunehmen; wir wollen daher die obige Form der letzten Grenzgleichung beibehalten, und wir können dies um so eher thun, als, wie sich ergeben wird, die folgenden Formeln dadurch in keiner Weise beeinflusst werden.

Wir erhalten somit die folgenden Bedingungen für $z = 0$:

$$(2,\ b) \qquad \begin{cases} u' = u \, , \quad v' = v \, , \quad w' = w \, , \\ \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \, , \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} \, , \quad \Lambda' - 3 \frac{a'}{\varepsilon'^2} \frac{d\varepsilon'}{dz} w' = \Lambda \, , \end{cases}$$

und demnach die Bedingungen für $z = c$:

$$(3,\ b) \qquad \begin{cases} u' = u_1 \, , \quad v' = v_1 \, , \quad w' = w_1 \, , \\ \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \, , \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \, , \quad \Lambda' - 3 \frac{a'}{\varepsilon'^2} \frac{d\varepsilon'}{dz} w' = \Lambda_1 \, . \end{cases}$$

Hieraus geht hervor, dass wir auf Grund der Bedingung (*b*) genau dieselben Gleichungen für die Variabeln v, v' und v_1 erhalten, wie auf Grund der Bedingung (*a*). Es müssen sich demnach für den Fall, wo die Schwingungen senkrecht auf die Einfallsebene stattfinden, genau dieselben Formeln ergeben, wie früher; wir brauchen also nur für den Fall, wo die Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden, eine neue Betrachtung anzustellen.

c. Schwingungen in der Einfallsebene.

Die Schwingungen sollen in der Einfallsebene stattfinden.

Dann haben wir für die Bewegung in den beiden homogenen Medien dieselben Ausdrücke anzunehmen, wie S. 534 und 535; dagegen haben wir in der Uebergangsschicht die Gleichungen:

$$0 = \varepsilon' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon' w'}{\partial z},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = 3a' \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + a' \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + 2a' \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} + \frac{\partial a'}{\partial z}\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right) + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial x},$$

$$\varepsilon' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = a' \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + 3a' \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + 2a' \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z} + \frac{\partial a'}{\partial z}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + 3\frac{\partial w'}{\partial z}\right) + \varepsilon' \frac{\partial \Lambda'}{\partial z}.$$

Setzen wir also, wie oben:

$$u' = iUe^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$w' = Xe^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 Ye^{i\left(\alpha x - 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

wo U, X, Y zu bestimmende Functionen von z sein sollen, so ergeben sich jetzt für diese drei Grössen die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varepsilon' X}{dz} = \alpha \varepsilon' U,$$

$$\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 U = 3\alpha^2 a' U - a' \frac{d^2U}{dz^2} - 2\alpha a' \frac{dX}{dz} - \frac{da'}{dz}\left(\alpha X + \frac{dU}{dz}\right) - \alpha\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varepsilon' Y,$$

$$\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 X = \alpha^2 a' X - 3a' \frac{d^2X}{dz^2} - 2\alpha a' \frac{dU}{dz} + \frac{da'}{dz}\left(\alpha U - 3\frac{dX}{dz}\right) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varepsilon' \frac{dY}{dz},$$

oder, wenn wir wieder

$$a' = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{\varepsilon' \sin^2 \varphi'}{\alpha^2}$$

setzen:

$$\frac{d.\varepsilon' \sin^2\varphi'\left(\frac{dU}{dz} + \alpha X\right)}{dz} + \alpha^2 \varepsilon'(1 - 3\sin^2\varphi')U + \alpha\varepsilon' \sin^2\varphi' \frac{dX}{dz} + \alpha^3 \varepsilon' Y = 0,$$

$$\frac{d.\varepsilon' \sin^2\varphi'\left(3\frac{dX}{dz} - \alpha U\right)}{dz} + \alpha^2 \varepsilon' \cos^2\varphi' X - \alpha\varepsilon' \sin^2\varphi' \frac{dU}{dz} + \alpha^2 \varepsilon' \frac{dY}{dz} = 0.$$

Führen wir also die neuen Variabeln V und W mittelst der Gleichungen ein:

$$\sin^2\varphi'\left(\frac{dU}{dz} + \alpha X\right) = -\alpha V,$$

$$\sin^2\varphi'\left(3\frac{dX}{dz} - \alpha U\right) + \alpha^2 Y = \alpha W,$$

setzen wir ferner für $\frac{dX}{dz}$ seinen Werth nach der ersten Gleichung

$$\frac{dX}{dz} = \alpha U - \frac{1}{\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{dz} X$$

in die zweite Gleichung und in den Werth von Y ein, ebenso für $\frac{dU}{dz}$ seinen Werth durch X und V in die dritte Gleichung, so erhalten wir zur Bestimmung der Grössen

$$X,\ U,\ V,\ W$$

jetzt das folgende System von Differentialgleichungen:

$$(18,\ b)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\varepsilon' X}{dz} = \alpha\varepsilon\, U, \\ \dfrac{dU}{dz} = -\,\alpha\,\dfrac{\sin^2\varphi'\, X + V}{\sin^2\varphi'}, \\ \dfrac{d\,\varepsilon' V}{dz} = \alpha\varepsilon'\,\{(1 - 4\sin^2\varphi')\, U + W\} + 2\sin^2\varphi'\,\dfrac{d\varepsilon'}{dz}\, X, \\ \dfrac{dW}{dz} = -\alpha(X+V) - 2\sin^2\varphi'\,\dfrac{1}{\varepsilon'}\,\dfrac{d\varepsilon'}{dz}\, U + \dfrac{3}{\alpha}\sin^2\varphi'\,\dfrac{1}{\varepsilon'^2}\left(\dfrac{d\varepsilon'}{dz}\right)^2 X. \end{cases}$$

Es tritt also dieses System Differentialgleichungen an die Stelle des früher erhaltenen Systems (18).

Sind aber $X_h,\ U_h,\ V_h,\ W_h$ und $X_k,\ U_k,\ V_k,\ W_k$ zwei Systeme von Lösungen der Differentialgleichungen (18, b), so ergiebt sich:

$$W_k\,\frac{d\,\varepsilon' X_h}{dz} - W_h\,\frac{d\,\varepsilon' X_k}{dz} = \alpha\varepsilon'(U_h W_k - U_k W_h),$$

$$V_k\,\frac{dU_h}{dz} - V_h\,\frac{dU_k}{dz} = -\,\alpha(X_h V_k - X_k V_h),$$

$$U_k\,\frac{d\,\varepsilon' V_h}{dz} - U_h\,\frac{d\,\varepsilon' V_k}{dz} = -\,\alpha\varepsilon'(U_h W_k - U_k W_h) + 2\sin^2\varphi'\,\frac{d\varepsilon'}{dz}(X_h U_k - X_k U_h),$$

$$X_k\,\frac{dW_h}{dz} - X_h\,\frac{dW_k}{dz} = \alpha(X_h V_k - X_k V_h) + 2\sin^2\varphi'\,\frac{1}{\varepsilon'}\,\frac{d\varepsilon'}{dz}\,(X_h U_k - X_k U_h)\,.$$

Folglich erhalten wir:

$$0 = \varepsilon' X_h\,\frac{dW_k}{dz} + W_k\,\frac{d\,\varepsilon' X_h}{dz} - \varepsilon' X_k\,\frac{dW_h}{dz} - W_h\,\frac{d\,\varepsilon' X_h}{dz}$$
$$-\,U_h\,\frac{d\,\varepsilon' V_k}{dz} - \varepsilon' V_k\,\frac{dU_h}{dz} + U_k\,\frac{d\,\varepsilon' V_h}{dz} + \varepsilon' V_h\,\frac{dU_k}{dz}$$

oder:

$$0 = \frac{d}{dz}\,\varepsilon'\left\{\begin{vmatrix} X_h, & X_k \\ W_h, & W_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_h, & U_k \\ V_h, & V_k \end{vmatrix}\right\}.$$

Führen wir also wieder die vier Systeme particulärer Lösungen ein, welche durch die Anfangsbedingungen (19) bestimmt werden, so erhalten wir zwischen denselben die Relationen (22) und hieraus, gerade so, wie oben, die Relationen (23). Denken wir uns ferner die Grössen $l_1',\ l_2' \ldots$ den Gleichungen (20) gemäss bestimmt durch die Lösungen $X,\ U,\ V,\ W,$ so gelten auch zwischen den sechzehn Grössen $l',\ m',\ p',\ q'$ die Relationen (24) und (25).

Wir müssen nun die Werthe von $u',\ w',\ \Lambda'$ noch einführen in die entsprechenden Grenzgleichungen (2, b) und (3, b). Es sind diese:

für $z = 0$: $w' = w$, $u' = u$, $\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\Lambda' - 3\frac{a'}{\varepsilon'^2}\frac{d\varepsilon'}{dz}w' = \Lambda$,

und für $z = c$: $w' = w_1$, $u' = u_1$, $\frac{\partial u'}{dz} = \frac{\partial u_1}{dz_1}$, $\Lambda' - 3\frac{a}{\varepsilon'^2}\frac{d\varepsilon'}{dz}w' = \Lambda_1$.

Wir haben nun, wenn X, U, V, W die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (18, b) bezeichnen:

$$w' = Xe^{i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

$$u' = iUe^{i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = -i\alpha\frac{\sin^2\varphi' X + V}{\sin^2\varphi'}e^{i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)},$$

$$\Lambda' - 3\frac{a'}{\varepsilon'^2}\frac{d\varepsilon'}{dz}w' = \frac{\alpha a'}{\varepsilon'\sin^2\varphi'}(W - 2\sin^2\varphi' U)e^{i\left(\alpha x - 2\pi\frac{t}{T}\right)}.$$

Es ist ferner mit Benutzung der vier Systeme particulärer Lösungen zu setzen:

$$X = AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4,$$

u. s. w.

Wenn wir nun diese Werthe für u', w', Λ' und die S. 534 und 535 angegebenen Werthe für u, w, Λ und u_1, w_1, Λ_1 in die Grenzgleichungen für $z = 0$ und für $z = c$ einsetzen, so erhalten wir genau dieselben Gleichungen, wie S. 536 und 537.

Hieraus geht hervor, dass die Grössen M, N, M', N' in derselben Weise, wie früher, ausgedrückt werden durch die sechzehn Grössen X, U, V, W; wir haben wieder die Gleichungen (17) und (20).

Da ferner, wie wir eben gefunden haben, zwischen den Grössen X, U, V, W dieselben Relationen gelten, wie früher, kann genau ebenso, wie S. 527 nachgewiesen werden, dass die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft erfüllt ist; wir erhalten ferner für den Fall, dass eine Lichtwelle in dem zweiten Medium sich fortpflanzt und an der Grenze mit dem ersten Medium reflectirt und gebrochen wird, die Formeln (26) für die Grössen (M), (N), (M'), (N').

Der einzige Unterschied zwischen den Formeln, welche wir auf Grund der Bedingung (a) und auf Grund der Bedingung (b) erhalten, besteht also darin, dass die Grössen X, U, V, W das eine Mal Lösungen der Gleichungen (18), das andre Mal dagegen Lösungen der Gleichungen (18, b) sein sollen.

Somit gelten die Reihenentwicklungen, welche wir S. 522 ff. für die Grössen X_1, U_1, u. s. w. angegeben haben, im Allgemeinen nicht mehr, wenn statt der Bedingung (a) die Bedingung (b) angenommen wird; sie gelten nur dann noch, wenn die Dichtigkeit ε' constant ist, wenn also die beiden Bedingungen zusammenfallen.

Dagegen könnten wir mittelst der Differentialgleichungen (18, b) gerade so, wie wir dies früher mittelst der Differentialgleichungen (18) gethan haben, Reihenentwicklungen ableiten, und es würde sich ergeben, dass diese Reihenentwicklungen immer convergiren, sobald die früher in Bezug auf die Werthe von ε' und $\sin\varphi'$ gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, und sobald der Differentialquotient $\frac{d\varepsilon'}{dz}$ innerhalb der Grenzen 0 und c von z immer einen endlichen Werth behält. Wir sehen jedoch hier von der Angabe dieser Reihenentwicklungen ab, da sie sehr complicirt werden, wenn keinerlei Abhängigkeit zwischen den Werthen von ε' und $\sin\varphi'$ angenommen wird.

Dagegen wollen wir noch die Werthe der Grössen M, N, M', N' für den Fall berechnen, dass die Dicke c der Uebergangsschicht gegen eine Wellenlänge sehr klein ist; denn mit den Reihenentwicklungen (21) gelten auch die S. 524. für diesen Fall angegebenen Werthe nicht mehr. Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, dass gegen diese Anwendung unsrer Formeln ein grosses Bedenken obwaltet. Wenn nämlich, wie wir jetzt voraussetzen, die Dichtigkeiten der beiden homogenen Medien eine endliche Verschiedenheit besitzen, so muss die Dichtigkeit ε' ihren Werth um eine endliche Grösse ändern, während z von 0 bis c zunimmt. Nun ist aber bei Ableitung der Incompressibilitätsbedingung angenommen worden, dass, wenn ε' den Werth der Dichtigkeit an der Stelle z bezeichnet, ihr Werth an der Stelle $z + w'$ gleich

$$\varepsilon' + \frac{d\varepsilon'}{dz} w'$$

könne gesetzt werden. Dies ist nur zulässig, wenn w' gegen c sehr klein ist. Folglich müssen wir, wenn wir die Dicke c der Uebergangsschicht sehr klein gegen eine Wellenlänge setzen wollen, die Verrückungen als sehr kleine Grössen betrachten, nicht nur gegen eine Wellenlänge, sondern gegen eine Grösse, welche selbst gegen eine Wellenlänge sehr klein sein soll. Wir sind übrigens um so weniger versucht, eine solche Annahme zu machen, als die Formeln für den Fall eines sehr raschen Uebergangs mit der Beobachtung wieder nicht werden in Einklang zu bringen sein.

d. Annahme eines sehr raschen stetigen Uebergangs von dem einen homogenen Medium zum andern.

Wir wollen also die Werthe der Grössen $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ für den Fall berechnen, dass die Dicke c der Uebergangsschicht sehr klein gegen eine Wellenlänge ist.

Es ergiebt sich dann, dass nach den jetzt anzunehmenden Diffe-

rentialgleichungen (18, b) für ein unendlich kleines c die Grösse $\overline{W_1}$ einen unendlich grossen Werth erhält. Wir müssen daher zuerst die Werthe der Grössen für ein sehr kleines c berechnen. Zu diesem Ende wollen wir statt der Variabeln z die Variable

$$\mathfrak{z} = \frac{z}{c}$$

einführen und ferner setzen

$$\sin\varphi' = n' \sin\varphi\,;$$

es sind dann 0 und 1 die Grenzen von $\mathfrak{z}$, welchen Werth auch c haben mag, und 1 und n die Grenzen von n', wenn n das Brechungsverhältniss der beiden homogenen Medien bezeichnet:

$$n = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\,.$$

Wir können nun die Grössen ε' und n' als gegebene Functionen von $\mathfrak{z}$ betrachten; wir werden ferner voraussetzen können, dass Integrale von der Form:

$$\int_0^1 \varepsilon' d\mathfrak{z}, \quad \int_0^1 n'^2 \frac{1}{\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{d\mathfrak{z}} d\mathfrak{z}, \quad \int_0^1 n'^2 \frac{1}{\varepsilon'^2} \left(\frac{d\varepsilon'}{d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z}, \text{ u. s. w.}$$

einen endlichen, nie unendlich grossen Werth haben.

Es nehmen nun, wenn wir noch

$$\gamma = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

setzen, die Differentialgleichungen (18, b) die folgende Form an:

$$\frac{d\cdot\varepsilon' X}{d\mathfrak{z}} = \gamma \sin\varphi\, \varepsilon' U,$$

$$\frac{dU}{d\mathfrak{z}} = -\frac{\gamma}{\sin\varphi}\left(\sin^2\varphi\, X + \frac{1}{n'^2} V\right),$$

$$\frac{d\cdot\varepsilon' V}{d\mathfrak{z}} = 2\sin^2\varphi\, n'^2 \frac{d\varepsilon'}{d\mathfrak{z}} X + \gamma \sin\varphi\, \varepsilon' \left\{(1 - 4n'^2 \sin^2\varphi)\, U + W\right\},$$

$$\frac{dW}{d\mathfrak{z}} = \frac{3\sin\varphi}{\gamma} n'^2 \left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 X - 2\sin^2\varphi\, n'^2 \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}} U - \gamma \sin\varphi\,(X + V).$$

Hieraus folgt durch partielle Integration:

$$\varepsilon' X = \varepsilon X_0 + \gamma \sin\varphi \int_0^{\mathfrak{z}} U \varepsilon' d\mathfrak{z},$$

$$U = U_0 - \frac{\gamma}{\sin\varphi} \int_0^{\mathfrak{z}} \left(\sin^2\varphi\, X + \frac{1}{n'^2} V\right) d\ ,$$

$$\varepsilon' V = \varepsilon V_0 + 2\sin^2\varphi \int_0^{\mathfrak{z}} X n'^2 \frac{d\varepsilon'}{d\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} + \gamma \sin\varphi \int_0^{\mathfrak{z}} \left\{U(1 - 4n'^2 \sin^2\varphi) + W\right\} \varepsilon' d\mathfrak{z}.$$

$$\overline{W} = W_0 + \frac{3\sin\varphi}{\gamma}\int_0^{\mathfrak{z}} X n'^2 \left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z} - 2\sin^2\varphi\int_0^{\mathfrak{z}} U n'^2 \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} - \gamma\sin\varphi\int_0^{\mathfrak{z}} (X+V)d\mathfrak{z}.$$

Um nun die Werthe der $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ mittelst dieser Gleichungen genau bis auf Grössen von der Ordnung γ zu berechnen, müssen wir zunächst die Werthe der $\overline{X}$ genau bis auf Grössen von der Ordnung γ^2 bestimmen, wegen des Gliedes mit dem Factor $\frac{1}{\gamma}$ in dem Ausdruck für $\overline{W}$. Wir finden so:

$$\varepsilon' \overline{X}_1 = \varepsilon,$$
$$\overline{U}_1 = 0,$$
$$\varepsilon' \overline{V}_1 = 2\varepsilon\sin^2\varphi\int_0^{\mathfrak{z}} n'^2 \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} + 3\varepsilon\sin^2\varphi\int_0^{\mathfrak{z}}\left\{ d\mathfrak{z}\,\varepsilon'\int_0^{\mathfrak{z}} \frac{n'^2}{\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z}\right\},$$
$$\overline{W}_1 = \frac{3\varepsilon\sin\varphi}{\gamma}\int_0^{\mathfrak{z}} \frac{n'^2}{\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z};$$
$$\varepsilon' \overline{X}_2 = \gamma\sin\varphi\int_0^{\mathfrak{z}} \varepsilon' d\mathfrak{z},$$
$$\overline{U}_2 = 1,$$
$$\varepsilon' \overline{V}_2 = 0,$$
$$\overline{W}_2 = -2\sin^2\varphi\int_0^{\mathfrak{z}} n'^2 \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} + 3\sin^2\varphi\int_0^{\mathfrak{z}}\left\{ d\mathfrak{z}\,\frac{n'^2}{\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 \int_0^{\mathfrak{z}} \varepsilon' d\mathfrak{z}\right\};$$

$$\varepsilon' \overline{X}_3 = 0, \qquad \varepsilon' \overline{X}_4 = 0,$$
$$\overline{U}_3 = 0, \qquad \overline{U}_4 = 0,$$
$$\varepsilon' \overline{V}_3 = \varepsilon, \qquad \varepsilon' \overline{V}_4 = 0,$$
$$\overline{W}_3 = 0; \qquad \overline{W}_4 = 1.$$

Hieraus ergeben sich für die Grössen l, m; p, q die folgenden Werthe, genau bis auf Grössen von der Ordnung γ:

$$l_1 = 1 + 2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1 + \overline{W}_2, \qquad m_1 = 0,$$
$$l_2 = \overline{W}_1, \qquad m_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(1 - 2\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi_1) + \overline{V}_1,$$
$$l_3 = 2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1 + \overline{W}_2, \qquad m_3 = 0,$$
$$l_4 = \overline{W}_1; \qquad m_4 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1) + \overline{V}_1;$$
$$p_1 = -(2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1) - \overline{W}_2, \qquad q_1 = 0,$$
$$p_2 = -\overline{W}_1, \qquad q_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1) - \overline{V}_1,$$
$$p_3 = 1 - 2\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi_1 - \overline{W}_2, \qquad q_3 = 0,$$
$$p_4 = -\overline{W}_1; \qquad q_4 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(1 + 2\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi_1) - \overline{V}_1.$$

Der Einfachheit wegen haben wir die Grössen $\overline{W}_1$, $\overline{V}_1$ und $\overline{W}_2$ beibehalten.

Berücksichtigen wir nun, dass für ein unendlich kleines γ

$$\overline{W}_1 = 3\,\frac{\sin\varphi}{\gamma}\int_0^1 \frac{n'^2}{\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z}$$

unendlich gross wird, der einzige Fall ausgeschlossen, wo ε' constant ist, dass demnach die Grössen l_2, l_4, $-p_2$ und $-p_4$ unendlich grosse positive Werthe erhalten, während die übrigen Grössen endlich bleiben, so ergiebt sich aus den Gleichungen (17), S. 519:

$$\mathsf{M} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}(l_1 + p_1 + q_1),$$

$$\mathsf{N} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}(p_3 + q_3 + q_4 - q_2 + l_3),$$

$$\mathsf{M}' = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi_1}\, m_1,$$

$$\mathsf{N}' = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}(m_2 - m_3 - m_4)$$

oder:

(7, b) $\mathsf{M} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}$, $\mathsf{N} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi_1}\,\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}$, $\mathsf{M}' = 0$, $\mathsf{N}' = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$.

Wir erhalten also jetzt ganz andere Werthe, wie oben S. 524, für den Fall eines sehr raschen Uebergangs von dem einen Medium zum andern*).

---

*) Die Werthe von M, N, M′, N′ sind unter der Voraussetzung erhalten, dass die Componenten des molecularen Drucks für eine Stelle der Uebergangsschicht bestimmt werden durch die Ausdrücke von S. 540 mit einer Elasticitätsconstanten. Dies ist eine sehr beschränkende Annahme. Wird nämlich berücksichtigt, dass in der Uebergangsschicht nicht, wie in einem homogenen unkrystallinischen Medium, alle Richtungen, sondern nur die Richtungen, welche auf der Normale an die Grenze senkrecht stehen, als gleichwerthig zu betrachten sind, so ergeben sich auf dem von Poisson zur Bestimmung der Druckcomponenten eingeschlagenen Wege Ausdrücke mit drei Constanten und auf dem noch allgemeinern Wege, wie er z. B. in dem Lamé'schen Lehrbuche verfolgt ist, Ausdrücke mit fünf Constanten. Führt man für die Moleculardruckcomponenten diese allgemeinsten Ausdrücke ein, so wird die Form der Differentialgleichungen (18, b) nicht wesentlich geändert; namentlich bleiben die Relationen (22) und (23) zwischen den particulären Lösungen bestehen. Betrachtet man ferner den Fall, wo die Dicke c der Uebergangsschicht sehr klein gegen eine Wellenlänge ist, so erhält man genau dieselben Formeln, wie wir sie eben gefunden haben; es kann auch das Integral, welches in dem Werth von $\overline{W}_1$ vorkommt, eben so wenig verschwinden, wie das oben erhaltene

$$3\int_0^1 \frac{n'^2}{\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon' d\mathfrak{z}}\right)^2 d\mathfrak{z}$$

Allein auch die jetzt erhaltenen Werthe sind mit den Resultaten der Beobachtung nicht in Einklang zu bringen. Denn da für das senkrecht auf die Einfallsebene schwingende Licht dieselben Formeln, wie früher, (S. 514), gelten:

$$(6) \qquad M = 1, \quad N = 0, \quad M' = 0, \quad N' = \frac{\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\varepsilon_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1},$$

so werden in den Gleichungen (III, a) und (IV, a), S. 502, F_2 und F_3 gleich null; es müsste also, nach den Gleichungen (V), S. 502, nicht nur M', sondern auch N gleich null werden. Nun kann aber $\frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{\varepsilon_1}$ nicht einmal einen kleinen Werth annehmen; folglich ist auch jetzt auf Grund der Annahme, dass die Dicke der Uebergangsschicht sehr klein gegen eine Wellenlänge sei, eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nicht herzustellen.

5.

Vergleichung mit der Beobachtung.

Wir haben im Vorhergehenden allgemeine Formeln für die Reflexion und Brechung des Lichtes abgeleitet, und es bleibt zu untersuchen übrig, ob und wie diese Formeln mit den Resultaten der Beobachtung in Einklang zu bringen sind. Wir können dabei über eine Anzahl von Grössen verfügen, deren directe Bestimmung durch die Beobachtung, wenigstens bis jetzt, nicht möglich ist; es sind dies erstens die Dicke c der Uebergangsschicht und zweitens das Verhältniss $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ der Aetherdichtigkeiten in den beiden durchsichtigen Medien; ferner ist das Gesetz vollständig unbekannt, nach welchem in der Grenzschicht der stetige Uebergang der Dichtigkeit ε' und des Brechungsverhältnisses n' von ihren Werthen für das eine homogene Medium zu denen für das andere stattfindet, und dieses Gesetz wird einen Einfluss auf die Formeln ausüben, sobald die Dicke c der Uebergangsschicht nicht sehr klein gegen eine Wellenlänge ist.

Denn es tritt an die Stelle von $3n'^2$ wieder eine Function von $\mathfrak{z}$, welche für $\mathfrak{z} = 0$ und $\mathfrak{z} = 1$ nothwendig einen endlichen positiven Werth besitzen muss.

Die Annahme der allgemeinern Ausdrücke für die Moleculardruckcomponenten führt also nur zu dem Resultate, dass für den Fall einer Uebergangsschicht, deren Dicke nicht sehr klein im Vergleich mit einer Wellenlänge ist, die Werthe der Lösungen X, U, V, W nicht nur von zwei Functionen der Variabeln z (ε' und n'), sondern von einer grössern Anzahl solcher Functionen (sechs) abhängen. Es ist jedoch, wenigstens vorläufig, gar kein Grund vorhanden, noch allgemeinere Ausdrücke für die Grössen $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ aufzusuchen.

Wir haben schon gesehen, dass diese letztere Annahme durch den Widerspruch mit der Erfahrung, zu welchem sie führt, ausgeschlossen wird. Wir sind daher genöthigt, der Länge c einen mit einer Wellenlänge vergleichbaren Werth zuzuschreiben; dann können aber die Grössen Z, Y, X, U, V, W nicht mehr durch geschlossene Ausdrücke dargestellt werden, und es muss vor allen Dingen genau festgestellt werden, welche Gleichungen zwischen jenen 20 Grössen stattfinden sollen, damit die Theorie mit der Erfahrung übereinstimme.

Und zwar kann eine solche Uebereinstimmung herzustellen versucht werden auf Grund der beiden Definitionen, welche für die Polarisationsebene sind angenommen worden. Machen wir die Voraussetzung, dass die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden, so müssen, wie wir früher (S. 501) gesehen haben, zwischen den Grössen M und M die Gleichungen bestehen:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathsf{M}+\mathsf{N}'}{M+N'} = \dfrac{\mathsf{M}'+\mathsf{N}}{M'+N} = \cos(\varphi-\varphi_1), \\[2ex] \dfrac{\mathsf{M}-\mathsf{N}'}{M-N'} = \dfrac{\mathsf{M}'-\mathsf{N}}{M'-N} = \cos(\varphi+\varphi_1); \end{cases}$$

nehmen wir dagegen umgekehrt an, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, so sind die Gleichungen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{M+N'}{\mathsf{M}+\mathsf{N}'} = \dfrac{M'+N}{\mathsf{M}'+\mathsf{N}} = \cos(\varphi-\varphi_1), \\[2ex] \dfrac{M-N'}{\mathsf{M}-\mathsf{N}'} = \dfrac{M'-N}{\mathsf{M}'-\mathsf{N}} = \cos(\varphi+\varphi_1). \end{cases}$$

Wir haben diese Relationen zunächst als nothwendig gefunden, damit für eine partielle Reflexion an der Grenze des ersten mit dem zweiten Medium Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung bestehe. Wie wir aber schon gezeigt haben, findet dann eine solche Uebereinstimmung auch für eine totale Reflexion statt, unter der einen Voraussetzung, dass in diesem Falle die Grössen M, N, M', N' einen reellen, dagegen die Grössen M', N', M, N einen rein imaginären Werth erhalten. Diese Voraussetzung ist erfüllt; denn, wie sofort ersichtlich ist, bleiben die Lösungen der Differentialgleichungen (10) und (18) oder (18, b) in dem Falle einer totalen Reflexion sämmtlich reell, und es wird überhaupt nur die Grösse $\cos\varphi_1$ imaginär; nach den Gleichungen (12) und (17) enthalten aber die Grössen M', N', M und N den Factor $\cos\varphi_1$ im Nenner, während die Grössen M, N, M' und N' von $\cos\varphi_1$ frei sind. Endlich stossen wir auf dieselben Gleichungen, wenn die Reflexion an der Grenze des zweiten mit dem ersten Medium stattfindet. Denn es sind in diesem Falle erstens φ und φ_1 mit einander zu vertauschen; dadurch bleiben die Formeln (III) und (IV) unberührt. Ferner treten die Grössen (M) und (M) an die Stelle der Grössen M und M; es ist aber nach S. 516:

$$(16)\qquad (\mathfrak{M}) = f N', \quad (N) = f N, \quad (\mathfrak{M}') = f \mathfrak{M}', \quad (N') = f \mathfrak{M},$$

und nach S. 530:

$$(26)\qquad (\mathsf{M}) = f \mathsf{N}', \quad (\mathsf{N}) = f \mathsf{N}, \quad (\mathsf{M}') = f \mathsf{M}', \quad (\mathsf{N}') = f \mathsf{N}';$$

folglich werden die Gleichungen (III) und (IV) ebensowenig geändert, wenn wir die Grössen $\mathfrak{M}$ und M durch die Grössen $(\mathfrak{M})$ und (M) ersetzen.

Demnach sind die Gleichungen (III) und (IV) nothwendig und hinreichend, damit Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung stattfinde.

Wir können nun, nach S. 502, die Gleichungen für die beiden Fälle zusammenfassen in den Gleichungen (V), und es sind dann die Grössen F, je nachdem die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene oder in der Polarisationsebene stattfinden sollen, bestimmt durch die Gleichungen (III, a) oder (IV, a). Setzen wir in diese Gleichungen die für die Grössen $\mathfrak{M}$ und M gefundenen Werthe ein ((12) S. 513 und (17) S. 519), so ergeben sich die folgenden vier Gleichungen als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Uebereinstimmung unsrer Theorie mit der Beobachtung:

$$(27)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} l_1 - F_1, & l_3 + l_4 \\ p_1 + q_1, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} l_2 - F_2, & l_3 + l_4 \\ p_2 + q_2, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} m_1 - F_3, & m_3 + m_4 \\ p_1 + q_1, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} m_2 - F_4, & m_3 + m_4 \\ p_2 + q_2, & p_3 + q_3 + p_4 + q_4 \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

und zwar ist zu setzen, wenn die Schwingungen senkrecht auf die Polarisationsebene stattfinden sollen:

$$(28,\ a)\qquad \begin{cases} F_1 = \cos^2\varphi_1\, \overline{Z_1} + \sin^2\varphi\, \overline{Y_2}, \\ F_2 = \cos^2\varphi \cos^2\varphi_1\, \overline{Z_2} - \overline{Y_1}, \\ F_3 = \overline{Y_1} - \sin^2\varphi \sin^2\varphi_1\, \overline{Z_2}, \\ F_1 = \cos^2\varphi\, \overline{Y_2} + \sin^2\varphi_1\, \overline{Z_1}, \end{cases}$$

wenn dagegen die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden sollen:

$$
(28,\ b)\qquad \begin{cases}
F_1 = \dfrac{\cos^2\varphi_1\,\overline{Z_1} - \sin^2\varphi\,\overline{Y_2}}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}\,,\\[2ex]
F_2 = \dfrac{\cos^2\varphi\,\cos^2\varphi_1\,\overline{Z_2} + \overline{Y_1}}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}\,,\\[2ex]
F_3 = \dfrac{\overline{Y_1} + \sin^2\varphi\,\sin^2\varphi_1\,\overline{Z_2}}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}\,,\\[2ex]
F_4 = \dfrac{\cos^2\varphi\,\overline{Y_2} - \sin^2\varphi_1\,\overline{Z_1}}{\cos(\varphi-\varphi_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}\,.
\end{cases}
$$

Aus den Gleichungen (17) folgen nun acht lineare Relationen zwischen den Grössen l, m, p, q und F.

Es müssen nämlich die Gleichungen (27) identisch in Bezug auf $\sin\varphi$ erfüllt sein. Nun folgt aus den Differentialgleichungen (10) mit den Anfangsbedingungen (11), S. 512, dass die Grössen Z_1 und Y_2 gerade, dagegen die Grössen Z_2 und Y_1 ungerade Functionen von $\sin\varphi$ sind; denn die Grösse α ist nach (9), S. 511, $\sin\varphi$ proportional. Ferner folgt aus den Differentialgleichungen (18), S. 520 und (18, b), S. 543, mit den Anfangsbedingungen (19), S. 520, dass die Grössen X_1, X_3, U_2, U_4, V_1, V_3, W_2, W_4 gerade, dagegen die Grössen X_2, X_4, U_1, U_3, V_2, V_4, W_1, W_3 ungerade Functionen von $\sin\varphi$ sind. Folglich sind die Grössen

$$F_1,\ F_4,\ l_1,\ l_3,\ m_2,\ m_4,\ p_1,\ p_3,\ q_2,\ q_4 \text{ gerade,}$$

dagegen die Grössen

$$F_2,\ F_3,\ l_2,\ l_4,\ m_1,\ m_3,\ p_2,\ p_4,\ q_1,\ q_3 \text{ ungerade}$$

Functionen von $\sin\varphi$.

Dann zerfällt aber jede der vier Gleichungen (27) in zwei, indem die geraden und die ungeraden Glieder für sich verschwinden müssen, und zwar sind diese acht Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(l_1-F_1)(p_3+q_4) &= l_3p_1 + l_4q_1\,, & (l_1-F_1)(q_3+p_4) &= l_3q_1 + l_4p_1\,,\\
(l_2-F_2)(p_3+q_4) &= l_3p_2 + l_4q_2\,, & (l_2-F_2)(q_3+p_4) &= l_3q_2 + l_4p_2\,,\\
(m_1-F_3)(p_3+q_4) &= m_3p_1 + m_4q_1\,, & (m_1-F_3)(q_3+p_4) &= m_3q_1 + m_4p_1\,,\\
(m_2-F_4)(p_3+q_4) &= m_3p_2 + m_4q_2\,, & (m_2-F_4)(q_3+p_4) &= m_3q_2 + m_4p_2\,.
\end{aligned}
$$

Indem wir aus diesen Gleichungen die Grössen F eliminiren, ergeben sich die vier folgenden:

$$
\begin{aligned}
(l_3q_1 + l_4p_1)(p_3+q_4) &= (l_3p_1 + l_4q_1)(q_3+p_4)\,,\\
(l_3q_2 + l_4p_2)(p_3+q_4) &= (l_3p_2 + l_4q_2)(q_3+p_4)\,,\\
(m_3q_1 + m_4p_1)(p_3+q_4) &= (m_3p_1 + m_4q_1)(q_3+p_4)\,,\\
(m_3q_2 + m_4p_2)(p_3+q_4) &= (m_3p_2 + m_4q_2)(q_3+p_4)\,,
\end{aligned}
$$

Es muss nun berücksichtigt werden, dass die Grössen p_3, q_3, p_4, q_4 durch Reihen nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$ in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$p_3 = \beta_3 + \sum_1^{\infty} {}_h A_3^{(h)} \sin^{2h} \varphi \,,$$

$$q_3 = \sum_0^{\infty} {}_h B_3^{(h)} \sin^{2h+1} \varphi \,,$$

$$p_4 = \sum_0^{\infty} {}_h A_4^{(h)} \sin^{2h+1} \varphi \,,$$

$$q_4 = \beta_4 + \sum_1^{\infty} {}_h B_4^{(h)} \sin^{2h} \varphi \,,$$

wo die Grössen β_3 und β_4 entweder den Werth 1, oder den Werth $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ haben. Es kommt nur darauf an, dass die niedrigsten Glieder richtig angegeben sind. Wenn nun die Grössen X, U, V, W Lösungen der Differentialgleichungen (18) sein sollen, so folgen die angegebenen Formen aus den Reihenentwicklungen (21), S. 522—523; es ist in diesem Falle:

$$\beta_3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \,, \quad \beta_4 = 1 \,.$$

Sollen dagegen die Grössen X, U, V, W Lösungen der Differentialgleichungen (18, b), S. 543, sein, so gelten jene Reihenentwicklungen nicht; man findet aber leicht unmittelbar aus der Form der Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen, dass die Reihen die oben angegebene Form annehmen; nur wird jetzt gerade umgekehrt

$$\beta_3 = 1 \quad \text{und} \quad \beta_4 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot$$

Hieraus ergiebt sich nun zunächst, dass die beiden Grössen $p_3 + q_4$ und $q_3 + p_4$ nicht gleichzeitig verschwinden können; denn die erstere wird für $\varphi = 0$ gleich $\beta_3 + \beta_4$. Folglich können die obigen vier Gleichungen nur bestehen, wenn:

$$(l_3^2 - l_4^2) \begin{vmatrix} p_1\,, & p_2 \\ q_1\,, & q_2 \end{vmatrix} = 0 \,, \quad (p_1^2 - q_1^2) \begin{vmatrix} l_3\,, & l_4 \\ m_3\,, & m_4 \end{vmatrix} = 0 \,,$$
u. s. w.

oder

$$\begin{vmatrix} l_3\,, & l_4 \\ m_3\,, & m_4 \end{vmatrix} = 0 \,, \quad \begin{vmatrix} p_1\,, & p_2 \\ q_1\,, & q_2 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Denn nach den beiden letzten Relationen (24) und (25), S. 527, zwischen den Grössen l, m, p, q ist:

$$\begin{vmatrix} l_3\,, & l_4 \\ m_3\,, & m_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1\,, & p_2 \\ q_1\,, & q_2 \end{vmatrix} ;$$

sollten aber beide Relationen nicht verschwinden, so müsste

$$l_3^2 = l_4^2, \quad p_1^2 = q_1^2$$

sein; hieraus würde folgen:

$$l_3 = 0, \quad l_4 = 0, \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 0,$$

weil immer von den beiden Grössen, deren Quadrate gleich sein sollen, die eine gerade und die andere ungerade ist.

Verschwinden aber die beiden Determinanten, so folgt aus der ersten und letzten der Relationen (24) oder (25):

$$\begin{vmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_3, & p_4 \\ q_3, & q_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Mit Rücksicht hierauf erhalten wir aus den vier mittleren der Relationen (24):

$$l_3 = l_2 a - l_1 b, \quad l_4 = l_2 c - l_1 d,$$
$$m_3 = m_2 a - m_1 b, \quad m_4 = m_2 c - m_1 d,$$

wenn:

$$a = \begin{vmatrix} p_1, & p_3 \\ q_1, & q_3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} p_2, & p_3 \\ q_2, & q_3 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} p_1, & p_4 \\ q_1, & q_4 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} p_2, & p_4 \\ q_2, & q_4 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir diese Werthe für l_3, m_3, l_4, m_4 in die vier Gleichungen von S. 552 ein, so ergiebt sich:

$$l_1 \{(p_1 d + q_1 b)(p_3 + q_4) - (p_1 b + q_1 d)(q_3 + p_4)\} =$$
$$= l_2 \{(p_1 c + q_1 a)(p_3 + q_4) - (p_1 a + q_1 c)(q_3 + p_4)\},$$
$$l_1 \{(p_2 d + q_2 b)(p_3 + q_4) - (p_2 b + q_2 d)(q_3 + p_4)\} =$$
$$= l_2 \{(p_2 c + q_2 a)(p_3 + q_4) - (p_2 a + q_2 c)(q_3 + p_4)\},$$
$$m_1 \{(p_1 d + q_1 b)(p_3 + q_4) - (p_1 b + q_1 d)(q_3 + p_4)\} =$$
$$= m_2 \{(p_1 c + q_1 a)(p_3 + q_4) - (p_1 a + q_1 c)(q_3 + p_4)\},$$
$$m_1 \{(p_2 d + q_2 b)(p_3 + q_4) - (p_2 b + q_2 d)(q_3 + p_4)\} =$$
$$= m_2 \{(p_2 c + q_2 a)(p_3 + q_4) - (p_2 a + q_2 c)(q_3 + p_4)\}.$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$$

sein soll, diese Determinante also nicht verschwinden kann, folgt aus den Gleichungen:

$$(p_1 d + q_1 b)(p_3 + q_4) = (p_1 b + q_1 d)(p_4 + q_3),$$
$$(p_2 d + q_2 b)(p_3 + q_4) = (p_2 b + q_2 d)(p_4 + q_3),$$
$$(p_1 c + q_1 a)(p_3 + q_4) = (p_1 a + q_1 c)(p_4 + q_3),$$
$$(p_2 c + q_2 a)(p_3 + q_4) = (p_2 a + q_2 c)(p_4 + q_3).$$

Setzen wir nun wieder die Werthe von a, b, c, d ein, so können diese Gleichungen in der Form geschrieben werden:

$$p_1 p_2 a' - p_1 q_2 b' + q_1 p_2 c' - q_1 q_2 d' = 0\,,$$
$$p_2 p_2 a' - p_2 q_2 b' + q_2 p_2 c' - q_2 q_2 d' = 0\,,$$
$$p_1 p_1 a' - p_1 q_1 b' + q_1 p_1 c' - q_1 q_1 d' = 0\,,$$
$$p_2 p_1 a' - p_2 q_1 b' + q_2 p_1 c' - q_2 q_1 d' = 0\,,$$

wo gesetzt ist:

$$a' = \begin{vmatrix} p_3 + q_4\,, & q_3 \\ p_4 + q_3\,, & q_4 \end{vmatrix}, \quad b' = \begin{vmatrix} p_3 + q_4\,, & p_3 \\ p_4 + q_3\,, & p_4 \end{vmatrix}, \quad c' = \begin{vmatrix} p_3 + q_4\,, & q_4 \\ p_4 + q_3\,, & q_3 \end{vmatrix},$$

$$d' = \begin{vmatrix} p_3 + q_4\,, & p_4 \\ p_4 + q_3\,, & p_3 \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir nun eine der vier Gleichungen, z. B. die dritte, so kann diese auf die Form gebracht werden:

$$p_1^2(q_4^2 - q_3^2) - q_1^2(p_3^2 - p_4^2) - 2p_1 q_1 (p_4 q_4 - p_3 q_3) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(p_1^2 - q_1^2) = 0,$$

indem

$$\begin{vmatrix} p_3\,, & p_4 \\ q_3\,, & q_4 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,,$$

oder:

$$\begin{vmatrix} p_1\,, & p_3 \\ q_1\,, & q_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} p_1\,, & p_4 \\ q_1\,, & q_4 \end{vmatrix}^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(p_1^2 - q_1^2).$$

Dieser Gleichung kann aber nur Genüge geleistet werden durch:

$$p_1 = 0\,, \quad q_1 = 0\,.$$

Denn p_1 ist eine gerade, q_1 dagegen eine ungerade Function von $\sin\varphi$; ferner verschwinden q_3 und p_4 für $\varphi = 0$, während $p_3 = \beta_3$ und $q_4 = \beta_4$ wird. Setzen wir also:

$$p_1 = \sum_0^\infty {}_h\, A_1^{(h)} \sin^{2(h+k)}\varphi\,,$$

$$q_1 = \sum_0^\infty {}_h\, B_1^{(h)} \sin^{(h+k)+1}\varphi\,,$$

so folgt aus der Gleichung zunächst, damit der Factor von $\sin^{2k}\varphi$, des niedrigsten Gliedes, verschwinde:

$$-\beta_4 (A_1^{(0)})^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(A_1^{(0)})^2, \text{ folglich: } A_1^{(0)} = 0\,;$$

dann:

$$\beta_3 (B_1^{(0)})^2 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}(B_1^{(0)})^2, \text{ folglich: } B_1^{(0)} = 0\,;$$

u. s. w.

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung:

$$p_2 = 0\,, \quad q_2 = 0\,.$$

Mithin kann den Gleichungen nur Genüge geleistet werden, wenn die Relationen stattfinden:

$$p_1 = 0\,, \quad q_1 = 0\,, \quad p_2 = 0\,, \quad q_2 = 0\,.$$

Nach den Relationen (24) oder (25) ist mit diesem Systeme das folgende identisch, welches wir auch auf ähnlichem Wege hätten ableiten können:

$$l_3 = 0\,, \quad m_3 = 0\,, \quad l_4 = 0\,, \quad m_4 = 0\,.$$

Aus den ursprünglichen Gleichungen aber folgt noch das weitere System:

$$l_1 = F_1\,, \quad l_2 = F_2\,, \quad m_1 = F_3\,, \quad m_2 = F_4\,.$$

Führen wir endlich statt der Grössen l, m, p, q die Grössen $\overline{X}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ ein, mittelst der Gleichungen (20), S. 521, so können die Relationen in der Form geschrieben werden:

$$(29)\quad \begin{cases} \overline{U}_2 + 2\sin^2\varphi\, \overline{U}_4 = F_1\,, & \overline{W}_2 + 2\sin^2\varphi\, \overline{W}_4 = 2\sin^2\varphi_1\, F_1\,. \\ \overline{U}_1 + (1-2\sin^2\varphi)\, \overline{U}_3 = F_2\,, & \overline{W}_1 + (1-2\sin^2\varphi\, \overline{W}_3 = 2\sin^2\varphi_1\, F_2\,. \\ \overline{X}_2 + 2\sin^2\varphi\, \overline{X}_4 = F_3\,, & \overline{V}_2 + 2\sin^2\varphi\, \overline{V}_4 = (1-2\sin^2\varphi_1)\, F_3\,, \\ \overline{X}_1 + (1-2\sin^2\varphi)\, \overline{X}_3 = F_4\,, & \overline{V}_1 + (1-2\sin^2\varphi)\, \overline{V}_3 = (1-2\sin^2\varphi_1)\, F_4\,; \end{cases}$$

oder auch in der Form:

$$(30)\quad \begin{cases} (1-2\sin^2\varphi_1)\, \overline{U}_4 + \overline{W}_4 = F_1\,, & (1-2\sin^2\varphi_1)\, \overline{U}_2 + \overline{W}_2 = (1-2\sin^2\varphi)\, F_1\,. \\ (1-2\sin^2\varphi_1)\, \overline{U}_3 + \overline{W}_3 = F_2\,, & (1-2\sin^2\varphi_1)\, \overline{U}_1 + \overline{W}_1 = 2\sin^2\varphi\, F_2\,. \\ 2\sin^2\varphi_1\, \overline{X}_4 + \overline{V}_4 = F_3\,, & 2\sin^2\varphi_1\, \overline{X}_2 + \overline{V}_2 = (1-2\sin^2\varphi)\, F_3\,. \\ 2\sin^2\varphi_1\, \overline{X}_3 + \overline{V}_3 = F_4\,, & 2\sin^2\varphi_1\, \overline{X}_1 + \overline{V}_1 = 2\sin^2\varphi\, F_1\,. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen (22) und (23) folgt das eine System aus dem andern.

Soll also Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung bestehen, so müssen die Grössen

$$\overline{Z},\ \overline{Y},\ \overline{X},\ \overline{U},\ \overline{V},\ \overline{W}$$

für jeden Werth, den $\sin\varphi$ annehmen kann, den Gleichungen (29) und (30) Genüge leisten. Und zwar haben diese Gleichungen eine verschiedene Form, je nachdem die Schwingungen eines geradlinig polarisirten Strahls senkrecht auf die Polarisationsebene oder in der Polarisationsebene stattfinden; in dem erstern Falle sind die Grössen F bestimmt durch die Gleichungen (28, a), in dem letztern Falle durch die Gleichungen (28, b).

Indem ich die weitere Behandlung dieser Gleichungen einer künftigen Untersuchung vorbehalte, will ich hier nur noch Folgendes beifügen.

Die Gleichungen (29) und (30) müssen identisch erfüllt sein in Bezug auf $\sin\varphi$. Nimmt man nun an, dass die Grössen Z, Y, X, U, V, W nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$ entwickelbar seien (eine Annahme, welche man kaum wird umgehen können), so führt jede

der acht Gleichungen auf eine unendliche Anzahl Gleichungen, die von dem Einfallswinkel φ frei sind; wir erhalten nämlich die Bedingung, dass eine Reihe nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$ für jeden Werth, den $\sin\varphi$ annehmen kann, gleich null sei, und es kann dieser Bedingung nur dadurch genügt werden, dass die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von $\sin\varphi$ verschwinden. Es ist noch hervorzuheben, dass alle Reihen nach Potenzen von $\sin^2\varphi$ fortschreiten. Auf diesem Wege ergeben sich demnach acht Gleichungen erster Ordnung, acht Gleichungen zweiter Ordnung, u. s. w., und die Gleichungen aller Ordnungen müssen erfüllt sein, wenn unsre Formeln für die durch Beobachtung direct bestimmten Grössen genau mit den Fresnel'schen oder mit den Neumann'schen übereinstimmen sollen. Damit aber genügende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung stattfinde, brauchen jedenfalls nur die Gleichungen der niedrigsten Ordnungen, etwa bis zur fünften oder sechsten, angenähert erfüllt zu sein.

Die Gleichungen erster Ordnung lassen sich nun ohne Schwierigkeit aufstellen und discutiren. Es ergiebt sich zunächst, dass diese Gleichungen dieselbe Form annehmen, mögen wir nun die eine oder die andere Definition der Polarisationsebene zu Grunde legen; es liefern nämlich die Gleichungen (28, a) und die Gleichungen (28, b) dieselben Glieder niedrigster Ordnung für die Grössen F. Es zeigt sich aber ferner, dass, sobald man die Incompressibilitätsgleichung (b) annimmt, sobald also die Grössen X, U, V, W Lösungen der Differentialgleichungen (18, b) sein sollen, die Gleichungen erster Ordnung immer erfüllt sind, wie auch der stetige Uebergang von dem einen Medium zum andern stattfinden mag, und wie auch die Aetherdichtigkeiten in den beiden durchsichtigen Medien sich zu einander verhalten mögen. Geht man dagegen aus von der Incompressibilitätsgleichung (a), versteht man also unter den X, U, V, W die Lösungen der Differentialgleichungen (18), so sind die Gleichungen erster Ordnung im Allgemeinen nicht mehr erfüllt; sondern sie führen auf Bedingungen, die bei einem bestimmten, von Eins verschiedenen Verhältniss der Aetherdichtigkeiten die Art und Weise des Uebergangs bis zu einem gewissen Grade bedingen müssen. Die Gleichungen sind natürlich immer erfüllt, wenn die Dichtigkeit constant ist; es fallen ja dann die Bedingungen (a) und (b) zusammen.

Es spricht dies entschieden dafür, dass, wenn man nicht von vornherein die Dichtigkeit constant setzen will, die Bedingung (b) und die Differentialgleichungen (18, b) anzunehmen sind. Dann führen die Gleichungen erster Ordnung zu keinerlei Bedingung für die Art und Weise des Uebergangs und für das Verhältniss der Dichtigkeiten.

Versucht man nun auch die Gleichungen höherer Ordnung aufzustellen und weiter zu untersuchen, so stösst man auf grosse Schwierig-

keit. Man muss zwar für die einzelnen Coefficienten der Reihen, welche nach Potenzen von $\sin^2\varphi$ fortschreiten, immer Reihenentwicklungen finden können, die unter gewissen einfachen, jedenfalls zulässigen Voraussetzungen convergiren; allein die Rechnung wird sehr weitläufig, und aus den Resultaten derselben möchten sich weitere Folgerungen kaum ableiten lassen. Aber so viel ist zu übersehen, dass schon die Gleichungen zweiter Ordnung eine wesentlich verschiedene Form erhalten, je nachdem man von der einen oder von der andern Definition der Polarisationsebene ausgeht, und dass in den beiden Fällen, welchen Werth man auch dem Verhältniss der Aetherdichtigkeiten zuschreibt, jene Gleichungen nicht mehr erfüllt sind bei jeder Art des Uebergangs. Sie führen also zu Bedingungen für die Art des Uebergangs, namentlich zur Bestimmung einer untern Grenze für die Dicke c der Uebergangsschicht. Aehnliches wird auch von den Gleichungen höherer Ordnung gelten. Dagegen bleibt die Frage unentschieden, ob durch die unendlich grosse Zahl von Gleichungen die Art des Uebergangs und das Verhältniss der Aetherdichtigkeiten eindeutig und vollständig bestimmt werden, und andrerseits, ob bei Annahme der einen oder der andern Definition für die Polarisationsebene den sämmtlichen Gleichungen überhaupt könne genügt werden.

Man wird suchen müssen, dieser Frage auf einem andern Wege näher zu treten, indem man den Gleichgewichtszustand von zwei aneinander grenzenden Systemen ponderabler Molecüle, welche von Aetheratmosphären umgeben sind, näher betrachtet und daraus Bedingungen abzuleiten sucht, nach welchen der Uebergang von dem einen Aethermedium zum andern stattfinden muss. Es kann dann das Problem der Reflexion und Brechung gewissermassen als Probe dienen, und möglicher Weise gelangt man auf diesem Wege schliesslich zu einer Entscheidung über die anzunehmende Definition der Polarisationsebene.

Um noch einmal zurückzukommen auf die Cauchy'schen Formeln und auf die von Jamin angestellten Beobachtungen, sei erwähnt, dass nach den S. 504 angegebenen Formeln zu den Ausdrücken (28, a) und (28, b) für die Grössen F weitere Glieder mit dem Factor E müssen hinzugefügt werden, damit unsre Formeln mit denen Cauchy's übereinstimmen. Diese Modification lässt, wenn der Ellipticitätscoefficient E von dem Einfallswinkel unabhängig ist, die Gleichungen erster Ordnung unberührt und setzt in den Gleichungen höherer Ordnung an die Stelle der Null Ausdrücke mit dem Factor E, also immer kleine Grössen. Hieraus folgt, dass, wenn Uebereinstimmung mit den Cauchy'schen Formeln stattfinden soll, die Gleichungen höherer Ordnung nur angenähert erfüllt sind, und wir können umgekehrt schliessen, dass wir, wenn den Gleichungen höherer Ordnung nicht genau, sondern nur angenähert genügt wird, Formeln für die Reflexion und Brechung

erhalten, welche zu ganz ähnlichen Abweichungen von den Fresnel'schen Gesetzen führen, wie sie Jamin beobachtet hat. Diese Beobachtungen haben ferner ergeben, dass bei der Reflexion an der Grenze mit Luft der Ellipticitätscoefficient E für schwach brechende Substanzen einen negativen, dagegen für stark brechende Substanzen einen positiven Werth habe; doch wird dieses Resultat kaum als festgestellt zu betrachten sein. Gilt es aber allgemein, so müsste sich aus der Betrachtung des oben erwähnten Gleichgewichtszustandes ein Grund ableiten lassen, warum die Abweichungen von den Fresnel'schen oder von den Neumann'schen Formeln bei schwacher Brechung in dem einen, bei starker Brechung in dem entgegengesetzten Sinne stattfinden.

Schliesslich muss noch ein Punkt erwähnt werden, der möglicher Weise eine Entscheidung über die Zulässigkeit unsrer Formeln herbeiführt. Es ergiebt sich nämlich aus unsern Entwicklungen als nothwendige Folge, dass eine genaue Uebereinstimmung unsrer Formeln mit den Fresnel'schen oder mit den Neumann'schen Formeln nur für eine bestimmte Farbe zu erreichen ist; denn es kommt in unsern Formeln die Wellenlänge λ in der Verbindung $\frac{c}{\lambda}$ vor, wo die Dicke c der Uebergangsschicht eine von der Farbe ganz unabhängige Grösse ist. Die Gleichungen (29) und (30) müssen nun schliesslich zu einer Relation zwischen $\frac{c}{\lambda}$ und dem Brechungsverhältniss n führen; diese letztere Grösse ändert sich aber mit der Farbe sehr wenig; bei einer ersten Annäherung kann sie als constant betrachtet werden. Demnach können jene Gleichungen nur für einen Werth der Wellenlänge λ genau erfüllt sein; für alle andern Farben aber müssen sich nothwendig Abweichungen von der Art ergeben, wie sie Jamin beobachtet hat. Da jedoch solche Abweichungen, ganz specielle Fälle ausgenommen, nur bei Anwendung sehr intensiven Lichtes, des directen Sonnenlichtes, beobachtet sind, lässt sich nicht erwarten, dass bei Anwendung farbigen Lichtes die Beobachtungen mit den bisherigen Mitteln genügende Genauigkeit besitzen, um die Abhängigkeit der erwähnten Abweichungen von der Farbe festzustellen. Vor Allem aber muss die Theorie soweit entwickelt werden, dass bestimmte an der Erfahrung zu prüfende Resultate vorliegen.

Leipzig, den 8. April 1872.

Sur la méthode d'intégration de M. Tchébychef.

Par G. Zolotareff à St. Petersbourg.

Dans une note insérée dans le Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg*), M. Tchébychef a fait connaître, sans démonstration, sa méthode d'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

où α, β, γ, δ désignent des nombres rationnels. Suivant la marche indiquée par M. Tchébychef, on obtient cette intégrale une fois qu'il est possible de l'exprimer en termes finis; on démontre, dans le cas contraire, l'impossibilité d'une pareille expression.

Cette note de M. Tchébychef a été réimprimée dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville (1864 p. 225 et suiv.). Il est aisé de voir d'après les recherches d'Abel et de Jacobi que cette méthode est liée intimement au développement du radical $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ en fraction continue et aux fonctions elliptiques.

En étudiant cette liaison je suis parvenu non seulement à démontrer la méthode de M. Tchébychef, mais encore à trouver quelques relations nouvelles qui se rattachent au développement de $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ en fraction continue.

Je me propose de démontrer, dans ce mémoire, la méthode d'intégration de M. Tchébychef.

I.

Considérons, avec Jacobi**), deux Variables x et z liées par l'équation

$$(1)\quad (ax^2+2bx+c)z^2+2(a'x^2+2b'x+c')z+(a''x^2+2b''x+c'')=0$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(2)\quad (az^2+2a'z+a'')x^2+2(bz^2+2b'z+b'')x+(cz^2+2c'z+c'')=0$$

---

*) Voir: Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg. Tome III. 1860.

**) Jacobi. Mathematische Werke. Band 3. §. 83.

En posant

$(a'x^2 + 2b'x + c')^2 - (a''x^2 + 2b''x + c'')(ax^2 + 2bx + c) = Rx$

$(bz^2 + 2b'z + b'')^2 - (az^2 + 2a'z + a'')(cz^2 + 2c'z + c'') = R_1 z$

on obtient, en vertu des équations précédentes,

$$(3) \qquad z = \frac{-(a'x^2 + 2b'x + c') \pm \sqrt{Rx}}{ax^2 + 2bx + c}$$

$$(4) \qquad x = \frac{-(bz^2 + 2b'z + b'') \pm \sqrt{R_1 z}}{az^2 + 2a'z + a''}$$

L'équation (1) différentiée nous donne

$$\left\{ (ax^2 + 2bx + c)z + (a'x^2 + 2b'x + c') \right\} dz$$
$$+ \left\{ (az^2 + 2a'z + a'')x + (bz^2 + 2b'z + b'') \right\} dx = 0.$$

Or, des expressions de z et de x on déduit

$$(ax^2 + 2bx + c)z + (a'x^2 + 2b'x + c') = \pm \sqrt{Rx}$$
$$(az^2 + 2a'z + a'')x + (bz^2 + 2b'z + b'') = \pm \sqrt{R_1 z},$$

et par suite

$$\frac{dz}{\sqrt{R_1 z}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{Rx}}.$$

Au moyen de l'équation (1) on peut transformer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

en celle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

c'est-à-dire telle que le polynôme placé sous le radical contienne le facteur z. Déterminons à cet effet les constantes $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ de la sorte que Rx soit égal à $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ et que $R_1 z$ ait la forme $z^4 + lz^3 + mz^2 + nz$.

On a alors les équations suivantes:

$$a'^2 - aa'' = 1, \; 4a'b' - 2ab'' - 2a''b = \alpha,$$
$$4b'^2 + 2a'c' - ac'' - a''c - 4bb'' = \beta,$$
$$4b'c' - 2bc'' - 2b''c = \gamma, \; c'^2 - cc'' = \delta,$$
$$b^2 - ac = 1, \; b''^2 - a''c'' = 0.$$

Comme il n'y a ci-dessus que sept équations servant à déterminer les neuf inconnues a, b, c etc., nous en pouvons choisir deux à volonté. La transformation employée par M. Tchébychef s'obtient en posant

$$a = 0, \; a'' = 0.$$

Des équations précédentes il vient

$$b'' = 0, \; a' = \pm 1, \; b = \pm 1.$$

Prenons $a' = 1$, $b = -1$.

Des mêmes équations on déduit

$$b' = \frac{\alpha}{4}, \; c' = \tfrac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right), \; c'' = \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$c = -\frac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de la variable dans les expressions $R_1 z$ et $z^4 + lz^3 + mz^2 + n$, on obtient

$$l = -\alpha - \frac{(4\beta - \alpha^2)^2 - 64\delta}{2\alpha^3 - 8\alpha\beta + 16\gamma},$$

$$m = -2\beta + \tfrac{3}{4}\alpha^2$$

$$n = -\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{8}\alpha^3$$

Quant aux signes devant les radicaux dans les formules (3) et (4) nous en choisirons dans la première le signe négatif et dans la seconde positif. —

D'après cela

$$z = \frac{x^2 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{4\beta - \alpha^2}{8} + \sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}{2x + \frac{\frac{1}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 - \delta}{\frac{\alpha}{4}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\gamma}{2}}}$$

$$x = \frac{z^2 - \frac{\alpha}{2}z + \sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}{2z}$$

Les équations précédentes nous conduisent à celles-ci:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \frac{dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}}$$

$$\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\left(z - \frac{\alpha}{2} + 2A\right)dz}{\sqrt{z^4 + lz^3 + mz^2 + nz}} + \tfrac{1}{2}\log z.$$

C'est la transformation dont se sert M. Tchébychef dans son mémoire.

II.

Maintenant nous allons établir les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'intégrale de la différentielle

$$\frac{(z + A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

puisse s'exprimer en logarithmes.

Si cette intégrale s'exprime sous forme finie elle s'obtient, comme on sait, d'après la formule

$$\lambda\int\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \log\,(P'+Q'\sqrt{Rz}) + \text{const.}$$

où P' et Q' désignent les fonctions entières dont les degrès sont respectivement λ et $\lambda-2$ et qui satisfont à l'équation

$$P'^2 - Q'^2 Rz = 1. \tag{5}$$

Dans le cas $z=0$, on a $Rz=0$, $P'=\pm 1$. On peut supposer d'ailleurs $P'=1$, car si l'on avait $P'=-1$, l'équation (5) subsisterait encore pour les valeurs $-P'$ et $-Q'$.

Cela posé nous pouvons écrire l'intégrale précédente comme il suit:

$$\lambda\int_0^z\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \log\,(P'+Q'\sqrt{Rz}).$$

Soient g, g', g'' les trois racines de l'équation

$$z^3 + lz^2 + mz + n = 0$$

On peut supposer que parmi les valeurs 0 (zéro), g, g', g'' il n'y ait pas deux égales entre elles, car dans le cas contraire l'intégrale

$$\int\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

s'exprimerait sous forme finie, quel que soit le paramétre A; mais ce cas nous laissons de coté.

En remarquant que Rz s'annule pour $z=g, g', g''$ on conclut de l'équation (5), que P est égal à ± 1 pour ces valeurs de z; on aura par suite

$$\lambda\int_0^g\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \mu\pi i,\quad \lambda\int_{g'}^{g''}\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = \mu'\pi i$$

où μ et μ' représentent des nombres entiers qui dépendent évidemment des chemins d'intégration. Mais dans le but que nous nous proposons if faut exprimer sous une autre forme les conditions d'intégrabilité en logarithmes.

Réduisons pour cet effet l'intégrale

$$\int\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}}$$

à la forme canonique.

En posant

$$z = \frac{g\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{am}u - \sin^2\operatorname{am}a}$$

$$\varkappa^2 = \frac{g''}{g'}\cdot\frac{g'-g}{g''-g},\quad \sin^2\operatorname{am}a = \frac{g''-g}{g''}$$

et par conséquent

$$g'' = \frac{g}{\cos^2 \operatorname{am} a}, \quad g' = \frac{g}{\Delta^2 \operatorname{am} a}$$

on a

$$\sqrt{Rz} = \frac{g(g''-g)}{g''} \sqrt{g'(g''-g)} \cdot \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u du}{(\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} a)^2}$$

$$\frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} = M du - 2 \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a du}{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} a}$$

$$\text{où } M = -2(A+g) \frac{g''}{g'(g''-g)^3} \cdot \sin^2 \operatorname{am} a .$$

Donc

$$(6) \qquad \begin{aligned} \lambda \int_0^z \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}} &= \log (P' + Q' \sqrt{Rz}) \\ &= \lambda \left(M - 2 \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} \right) u + \lambda \log \frac{\mathrm{H}(a+u)}{\mathrm{H}(a-u)} \end{aligned}$$

ou Θ et H sont les fonctions Jacobiennes. Pour déterminer les constantes a et A remarquons que z reprend la même valeur toutes les fois qu'on augmente ou diminue u de $2K$ ou $2K'i$ et, par conséquent, de $2mK + 2m'K'i$, m et m' désignant des nombres entiers. Dans ce cas l'accroissement du second terme de l'équation (6) doit être égal à $2s\pi i$, où s est un nombre entier. Par conséquent

$$(7) \qquad \begin{aligned} \lambda \left(M - 2 \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} \right) (2mK + 2m'K'i) + \lambda \log \frac{\mathrm{H}(a+u+2mK+2m'K'i)}{\mathrm{H}(a-u-2mK-2m'K'i)} \\ - \lambda \log \frac{\mathrm{H}(u+a)}{\mathrm{H}(u-a)} = 2s\pi i . \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\mathrm{H}(u+2m'K'i) = (-1)^{m'} \mathrm{H}(u) e^{-\frac{\pi i}{K} m'(u+m'K'i)}$$

$$\mathrm{H}(u+2mK) = (-1)^m \mathrm{H}(u)$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{H}(u+a+2mK+2m'K'i)}{\mathrm{H}(a-u-2mK-2m'K'i)} = \frac{\mathrm{H}(a+u)}{\mathrm{H}(a-u)} e^{-\frac{2\pi i m' a}{K}} .$$

D'après cela l'équation (7) peut s'écrire

$$\lambda \left(M - 2 \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} \right) (2mK + 2m'K'i) - \frac{2\pi i \lambda a m'}{K} = 2s\pi i$$

Posant dans cette équation $m = 1$, $m' = 0$ et désignant par ν' la valeur correspondante de s, on obtient

$$(8) \qquad M - 2 \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} = \frac{\nu' \pi i}{\lambda K} .$$

Ensuite, faisant $m = 0$, $m' = 1$; et désignant par $-\nu$ la valeur correspondante de s, on aura

$$a = \frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda} .$$

De l'équation (8) on déduit la valeur de M où de A.

III.

La détermination de l'intégrale

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{Rz}},$$

dans le cas où elle s'exprime en termes finis, se réduit, comme l'on sait, à la détermination des fonctions P et Q, satisfaisant à l'équation

$$P^2 - Q^2 Rz = a, \tag{9}$$

a désignant une constante. De toutes les solutions de l'équation (9) on peut naturellement préférer celle où P atteint le moindre degré possible. On sait que ces fonctions P et Q peuvent être trouvées au moyen du développement de $\sqrt{Rz}$ en fraction continue, et que leurs coefficients s'expriment rationellement en ceux de Rz. Lorsque ces derniers sont rationnels, les coefficients de P et Q le seront aussi. Nous supposerons les coefficients l, m, n, de Rz entiers.

Quant à l'équation (9) il y a deux cas à distinguer, savoir: 1) lorsque λ, degré de la fonction P, est un nombre impair, et 2) lorsque λ est pair.

Nous allons démontrer actuellement, que le second cas ne peut avoir lieu que lorsque Rz se décompose en deux facteurs du second degré à coefficients rationnels satisfaisant à certaines conditions que nous allons signaler ci-dessous.

Remarquant que, d'après l'équation (9), P^2 acquiert la valeur a lorsque z s'annule et désignant cette valeur par b^2, on peut mettre l'équation (9) sous la forme qui suit

$$P - b^2 = Q^2 Rz$$

d'où il vient

$$P - b = \pm Q_1^2 (z^2 + pz)$$

$$P + b = \pm Q_2^2 (z^2 + rz + s)$$

où $\quad Q_1 Q_2 = Q, \; Rz = (z^2 + pz)(z^2 + rz + s).$

En effet les fonctions $P - b$ et $P + b$ n'ont pas de facteurs communs, car autrement chacun de ces facteurs diviserait leur différence, ce qui est évidemment impossible. Il en suit que Q doit être égal au produit de Q_1 et Q_2, Q_1 étant lui-même le produit des facteurs de Q appartenant à $P - b$, et Q_2 celui des facteurs, qui sont communs à Q et à $P + b$. Quant au polynôme Rz on ne peut faire à son égard que deux suppositions. En effet, $P - b$ et $P + b$ étant des fonctions de degrés pairs, Rz doit figurer comme facteur dans l'une de ces fonctions (savoir dans $P - b$, si $z = 0$, $P = b$, ce qui peut toujours être supposé), ou être égal au produit de deux facteurs $z^2 + pz$ et $z^2 + rz + s$, dont le premier appartient à $P - b$ et e

le second à $P+b$. La première supposition doit être rejetée, puisqu'elle nous conduirait aux équations

$$P-b=\pm Q_1^2 Rz$$
$$P+b=\pm Q_2^2$$

ou bien, à l'équation

$$Q_2^2-Q_1^2 Rz=\pm 2b\,;$$

ce qui nous fait voir, que de toutes les fonctions satisfaisant à l'équation (9), P et Q ne sont pas du moindre degré possible.

D'après cela nous ne nous occuperons que des équations

$$(10)\qquad \begin{aligned} P-b&=\pm Q_1^2(z^2+pz)\\ P+b&=\pm Q_2^2(z^2+rz+s)\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les nombres p, r, s sont rationnels. Quant à p cela résulte immédiatement de ce que l'équation $\frac{P-b}{z}=0$ à coefficients rationnels a la racine $z=-p$, dont le degré de multiplicité est impair, tandis que ses autres racines ont des nombres pairs pour leurs degrés de multiplicité. En outre, p étant une racine rationnelle de l'équation

$$z^3+lz^2+mz+n=0$$

à coefficients entiers, on en conclut qu'il est entier. Il en est de même pour r et s comme le montre l'égalité

$$z^3+lz^2+mz+n=(z+p)(z^2+rz+s)$$

Il résulte de ce qui précède, que les coefficients Q_1 et Q_2 sont rationnels.

Des équations (10) il vient

$$(11)\qquad Q_2^2(z^2+rz+s)-Q_1^2(z^2+pz)=\pm 2b\,.$$

En attribuant successivement à z les valeurs zéro et $-p$ et en désignant par A_1 et A_2 les valeurs correspondantes de Q_2, il en suit, que

$$(12)\qquad \begin{aligned} A_1^2 s&=\pm 2b\\ A_2^2(p^2-pr+s)&=\pm 2b\,;\end{aligned}$$

par conséquent

$$s(p^2-pr+s)=\frac{4b^2}{A_1^2A_2^2}=\text{nombre carré};$$

c'est la première relation entre les coefficients p, r, s.

Les racines de l'équation

$$z^2+rz+s=0$$

peuvent être imaginaires ou réelles. Dans le premier cas on a inégalité $4s-r^2>0$; dans le second désignons ces racines par z_1 et z_2

et par B_1 et B_2 les valeurs correspondantes de Q_1. Faisant dans (11) successivement $z = z_1$ et $z = z_2$, on trouve

$$-B_1^2(z_1^2 + pz_1) = \pm 2b$$
$$-B_2^2(z_2^2 + pz_2) = \pm 2b$$

si $s > 0$, $\pm 2b > 0$, en vertu des équations (12); par conséquent

$$z_1^2 + pz_1 < 0$$
$$z_2^2 + pz_2 < 0.$$

En additionant ces inégalités on aura

$$z_1^2 + z_2^2 + p(z_1 + z_2) < 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$r^2 - pr - 2s < 0.$$

mais $r^2 > 4s$, donc $pr - 2s > 0$.

Si, au contraire, $s < 0$, on a d'après (12)

$$p^2 - pr + s < 0$$

d'où $pr - s > 0$ et par suite $pr - 2s > 0$ en vertu de $s < 0$.

D'après cela l'inégalité $pr - 2s > 0$ doit avoir lieu, si $r^2 - 4s > 0$. Ainsi, pour que l'équation (11) ait lieu il est nécessaire qu'il existe au moins l'une des inégalités

$$4s - r^2 > 0, \; pr - 2s > 0.$$

IV.

En s'appuyant sur les résultats obtenus, nous allons démontrer que l'intégrale

$$\lambda \int_0^z \frac{(z + A)\, dz}{\sqrt{Rz}}$$

lorsqu'elle s'exprime par log $(P + Q\sqrt{Rz})$ où P désigne une fonction de degré pair λ, peut être réduite à une autre, qui s'exprime par log $(P' + Q'\sqrt{Rz})$, P' étant une fonction de degré impair.

Remarquons pour cela que, si nous parvenons de transformer au moyen d'une substitution rationnelle l'intégrale $\int^z \frac{(z + A)\, dr}{\sqrt{Rz}}$, qui s'exprime en termes finis, en une autre $\int^z \frac{(z' + A')\, dz'}{\sqrt{z'^4 + l' z'^3 + m' z'^2 + n' z'}}$, où l', m', n' sont rationnels, et dans laquelle la fonction $z'^4 + l' z'^3 + m' z'^2 + n' z'$ ne se décompose maintenant en facteurs du second degré $z'^2 + p' z'$ et $z'^2 + r' z' + s'$ à coefficients rationnels de manière que $s'(p'^2 - p'r' + s')$ devienne un nombre carré et, en outre, qu'une des inégalités

$$4s' - r'^2 > 0, \; p'r' - 2s' > 0$$

au moins soit satisfaite, nous aurons

$$\lambda' \int \frac{(z' + A')\, dz'}{\sqrt{Rz'}} = \log (P' + Q' \sqrt{Rz'})$$

où P' est une fonction de degré impair λ'.

Pour transformer l'intégrale de cette manière M. Tchébychef emploie la substitution

$$z_1 = \frac{(p-r)^2 (z^2 + pz)}{(r-p)z + s} \tag{13}$$

et remarque qu'au moyen de pareilles substitutions on peut arriver à l'intégrale de la forme desirée, où à une telle dont l'expression en logarithmes est connue à priori.

D'après l'expression de z on a

$$z^2 + pz = z_1 \cdot \frac{(r-p)z + s}{(p-r)^2}$$

$$z^2 + rz + s = \frac{\left\{z_1 + (p-r)^2\right\}\left\{(r-p)z + s\right\}}{(p-r)^2}$$

par conséquent

$$\sqrt{(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)} = \frac{((r-p)z + s) \cdot \sqrt{z_1 (z_1 + (p-r)^2)}}{(p-r)^2}. \tag{14}$$

En outre, de la même équation (13) il vient

$$(p-r)z = -\frac{p(p-r) + z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{p(p-r) + z_1}{2}\right)^2 + sz_1}.$$

Nous avons preféré le signe négatif devant le radical pour avoir une valeur infinie de z, pour $z_1 = \infty$.

En différentiant (13), on trouve

$$\frac{(r-p)\,dz}{(r-p)z + s} = \frac{dz_1}{\sqrt{(p(p-r) + z_1)^2 + 4sz_1}}$$

$$\frac{(r-p)^2 (z + A)\,dz}{(r-p)z + s} = \frac{1}{2}\, \frac{p(p-r) + z_1 + 2A(r-p)}{\sqrt{(p(p-r) + z_1)^2 + 4sz_1}}\, dz_1 + \frac{1}{2}\, dz_1. \tag{15}$$

D'après les équations (14) et (15) on aura

$$\int \frac{(z + A)\,dr}{\sqrt{(z^2 + pz)(z^2 + rz + s)}} = \frac{1}{2} \int \frac{\left\{p(p-r) + z_1 + 2A(r-p)\right\} dz_1}{\sqrt{z_1 (z_1 + (p-r)^2)\,([p(p-r) + z_1]^2 + 4sz_1)}}$$
$$+ \log (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1 + (p-r)^2}).$$

Les racines de l'équation

$$(z_1 + p(p-r))^2 + 4sz_1 = 0$$

sont
$$p(r-p) - 2s \pm \sqrt{4s(p^2 - pr + s)};$$

elles sont rationnelles à cause de $s(p^2 - pr + s) =$ un nombre carré. Ainsi, toutes les racines du nouveau polynôme du 4me degré, placé sous le radical, seront des nombres rationnels. Nous allons chercher d'abord combien de fois ce polynôme se décompose en facteurs

$(z_1^2 + p_1 z_1)(z_1^2 + r_1 z_1 + s_1)$ satisfaisant aux conditions, dont nous avons parlé plus haut. Essayons d'abord de poser

$$p_1 = (p-r)^2$$

donc

$$r_1 = 2(p(p-r) + 2s)$$

$$s_1 = p^2(p-r)^2$$

il en résulte

$$s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1) = p^2(p-r)^4(r^2-4s)$$

$$r_1^2 - 4s_1 = 16s(s - pr + p^2) > 0$$

$$p_1 r_1 - 2s_1 = 2(p-r)^2(2s-pr).$$

Pour que $s_1 \ (p_1^2 - p_1 r_1 + s)$ soit un nombre carré il est nécessaire que $r^2 - 4s$ ne soit pas négatif; mais dans ce cas, d'après ce qui a été dit plus haut $pr - 2s$ doit être positif; et cette dernière condition étant satisfaite les nombres $p_1 \ r_1 \ s_1$ ne satisfont à aucune des inégalités $4s_1 - r_1^2 > 0$, $p_1 r_1 - 2s_1 > 0$.

Ainsi, il suffit de poser

$$p_1 = p(p-r) + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$$

$$s_1 = (p-r)^2 \left[p(p-r) + 2s \mp 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right.$$

$$r_1 = (p-r)^2 + (p-r)p + 2s \mp 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}.$$

D'où il vient

$$s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$$

$$= \pm 4(p-r)^2 \sqrt{s_1(p^2 - pr + s)} \,.\, [rp - 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}]$$

$$r_1^2 - 4s_1 = [r^2 - rp + 2s \pm 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\,]^2$$

$$r_1 p_1 - 2s_1 = (p-r)^2 \left[rp - 2s \pm 6\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right].$$

Il est aisé de voir qu'il faut, dans les formules ci-dessus, affecter du signe positif le radical $\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$; en effet, comme l'inégalité $4s_1 - r_1^2 > 0$ n'est évidemment pas satisfaite, posons $r_1 p_1 - 2s_1 > 0$. D'après cela le signe négatif devant $\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$ ne peut être retenu que lorsque $rp - 2s$ est positif et supérieur à $6\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$; mais alors $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$ deviendrait négatif et, par conséquent, ne pourrait pas être un carré. Posons donc

$$p_1 = p(p-r) + 2s + 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$$

$$r_1 = p(p-r) + 2s + (p-r)^2 - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}$$

$$s_1 = (p-r)^2 \left\{p(p-r) + 2s - 2\sqrt{s(p^2 - pr + s)}\right\}$$

Si $s_1(p_1^2 - p_1 r_1 + s_1)$ est encore un nombre carré, nous ferons de nouveau la transformation en passant aux nombres p_2, r_2, s_2, qui s'expriment en p_1, r_1, s_1 de la même manière que p_1, r_1, s_1 s'expriment en p, r, s et ainsi de suite. Si, en opérant comme il a été dit plus

haut, nous rencontrions des nombres égaux $p_i = r_i$, nous trouverions l'intégrale correspondante au système p_i, r_i, s_i d'après la formule

$$\int \frac{(z_i + \frac{1}{2} p_i) dz_i}{\sqrt{(z_i^2 + p_i z_i)(z_i^2 + p_i z_i + s_i)}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} + \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}{\sqrt{z_i^2 + p_i z_i} - \sqrt{z_i^2 + p_i z_i + s_i}}$$

V.

Il nous reste maintenant à prouver que lorsque nous ne rencontrerons pas de nombres p_i et r_i qui soient égaux entre eux, nous arriverons après un nombre fini d'opérations aux nombres p_ν, r_ν, s_ν, de sorte que $s_\nu\,(p_\nu^2 - r_\nu p_\nu + s_\nu)$ ne sera pas un carré.

D'après ce qui précède ils existent entre les nombres p_μ, r_μ, s_μ et $p_{\mu-1}$, $r_{\mu-1}$, $s_{\mu-1}$ les relations suivantes:

$$s_\mu\,(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu) = 4(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4 .$$
$$.(r_{\mu-1} p_{\mu-1} - 2 s_{\mu-1} + 2\sqrt{s_{\mu-1}(p^2_{\mu-1} - p_{\mu-1} r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}).\sqrt{s_{\mu-1}(p^2_{\mu-1} - p_{\mu-1} r_{\mu-1} + s_{\mu-1})},$$
$$r_\mu p_\mu - 2 s_\mu = (p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^2 (r_{\mu-1} p_{\mu-1} - 2 s_{\mu-1} + 6\sqrt{s_{\mu-1}(p^2_{\mu-1} - p_{\mu-1} r_{\mu-1} + s_{\mu-1})}) .$$

Soient

$$A_\mu^2 = \frac{s_\mu\,(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)}{(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4\,(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})^4 \ldots\ldots (p-r)^4}$$

$$B_\mu = \frac{r_\mu p_\mu - 2 s_\mu}{(p_{\mu-1} - r_{\mu-1})^4\,(p_{\mu-2} - r_{\mu-2})^4 \ldots\ldots (p-r)^4}$$

donc

$$A_\mu^2 = 4\,(B_{\mu-1} + 2 A_{\mu-1})\,A_{\mu-1}$$
$$B_\mu = B_{\mu-1} + 6 A_{\mu-1} .$$

Comme $A_0 = \sqrt{s\,(p^2 - pr + s)}$ et $B_0 = rp - 2s$ sont des entiers, A_μ et B_μ le seront aussi pour toutes les valeurs de μ, pourvu que $s_\mu\,(p_\mu^2 - p_\mu r_\mu + s_\mu)$ soit un carré.

Démontrons à présent que tout diviseur commun impair de A_μ et de B_μ sera aussi un commun diviseur de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$.

En effet, soit k_μ le plus grand diviseur impair commun à A_μ et B_μ et $k_{\mu-1}$ le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. En posant

$$A_\mu = k_\mu a_\mu ,\; B_\mu = k_\mu b_\mu ,$$
$$A_{\mu-1} = k_{\mu-1}\,a_{\mu-1} ,\; B_{\mu-1} = k_{\mu-1} b_{\mu-1}$$

on a

$$k_\mu^2 a_\mu^2 = 4 k_{\mu-1}^2\,(b_{\mu-1} + 2 a_{\mu-1})\,a_{\mu-1} \tag{16}$$
$$k_\mu b_\mu = k_{\mu-1}\,(b_{\mu-1} + 6 a_{\mu-1}) .$$

Il en suit, que k_μ sera divisible par $k_{\mu-1}$, parceque, dans le cas contraire, a_μ et b_μ auraient eu quelque diviseur commun impair et par conséquent k_μ n'aurait pas été le plus grand commun diviseur impair des nombres A_μ et B_μ. Soit $k_\mu = \lambda k_{\mu-1}$, λ étant un entier impair.

Des équations (16), on a

$$\lambda^2 a_\mu = 4\lambda a_{\mu-1} b_\mu - 16 a^2_{\mu-1}$$
$$\lambda b_\mu = b_{\mu-1} + 6 a_{\mu-1}$$

On conclut de la première équation que $a_{\mu-1}$ et λ ont un diviseur commun, et de la seconde que ce diviseur appartient aussi à $b_{\mu-1}$; ce qui ne peut avoir lieu, car $k_{\mu-1}$ est le plus grand commun diviseur impair de $A_{\mu-1}$ et de $B_{\mu-1}$. Il en resulte, le plus grand commun diviseur impair de A_μ et de B_μ sera en même temps le plus grand commun diviseur impair de A_0 et de B_0. Reciproquement, soit k le plus grand diviseur commun à ces derniers nombres (qui peut aussi être pair). En effectuant le calcul des nombres A_1, B_1, A_2, B_2 etc on trouvera que k sera le diviseur commun de A_μ et de B_μ. Soient

$$A_\mu = k A_\mu', \; B_\mu = k B_\mu'$$

alors

$$A_\mu'^2 = 4 A_{\mu-1}' \, (B_{\mu-1}' + 2 A_{\mu-1}')$$
$$B_\mu' = B_{\mu-1}' + 6 A_{\mu-1}'$$

D'après ce qui précède, il est clair que B_μ' et A_μ' sont sans diviseur commun impair. Considérons à présent la fraction $\frac{B_0 + 2A_0}{A_0}$ après qu'elle soit réduite à ses moindres termes, c'est-à-dire après la division de ses termes par k, le plus grand commun diviseur de A_0 et de B_0 ou de A_0 et de $B_0 + 2A_0$, ce qui est la même chose. Suivant la notation adoptée cette fraction deviendra $\frac{B_0' + 2A_0'}{A_0'}$. Remarquons que les termes de cette fraction sont positifs. Quant au dénominateur cela se voit immédiatement, et le numérateur ne peut être négatif que lorsque $B_o = rp - 2s < 0$. En outre, en remarquant que dans ce cas le nombre

$$B_0^2 - 4A_0^2 = (rp - 2s)^2 - 4s\,(p^2 - pr + s) = p^2\,(r^2 - 4s)$$

doit être négatif, en vertu que $4s - r^2 > 0$, on voit que B_o est inférieur à $2A_0$ donc le numérateur $B_0 + 2A_0$ est positif. Considérons à présent le cas où la fraction $\frac{B_0' + 2A_0'}{A_0'}$ se réduit à l'unité. Alors on a $B_0 = - A_0$. En effectuant le calcul on trouve

$$A_1 = 2A_0, \; B_1 = 5A_0, \; A_2^2 = 8 \,.\, 9 \,.\, A_0^2$$

A_2 n'est pas déjà un nombre rationnel. Nous nous occuperons ensuite du cas, où au moins un des termes de la fraction $\frac{B_0' + 2A_0'}{A_0'}$ ait des

diviseurs impairs. Soit q^f celui des diviseurs dont le degré de multiplicité f est le moindre q étant un nombre premier. Des expressions

$$A_1'^2 = 4A_0'(B_0' + 2A_0')$$
$$B_1'^2 = B_0' + 6A_0' = B_0' + 2A_0' + 4A_0'$$

il suit que $A_1'^2$ est divisible par q, et B_1' ne l'est pas. En outre, pourque A_1' devienne un nombre entier, f doit être pair et, par conséquent, A_1' admet le diviseur $q^{\frac{f}{2}}$. Des expressions

$$A_2'^2 = 4A_1'(B_1' + 2A_1')$$
$$B_2' = B_1' + 6A_1'$$

on voit encore que $A_2'^2$ est divisible par q, et B_2' ne l'est pas. Pour que A_2' soit un nombre rationnel et entier, $\frac{f}{2}$ doit être pair, donc A_2' admet $\frac{f}{4}$ fois le diviseur q. On prouvera de la même manière que B_3' ne sera pas divisible par q, et que A_3' admettra le diviseur q au degré $\frac{f}{8}$, lorsqu'il sera un nombre rationnel et entier. Suivant la même marche on voit que le nombre A_μ' contenant q au degré impair ne sera pas un carré et par conséquent $A_{\mu+1}'$ ne sera pas un nombre rationnel; il est évident que μ est inférieure à f.

Considérons enfin le cas, où l'un des termes de la fraction $\frac{B_0' + 2A_0'}{A_0'}$ est égal à 2^f où f est l'exposant quelconque, et l'autre est l'unité.

Soient d'abord

$$B_0' + 2A_0' = 1,\ A_0' = 2^f.$$

En évaluant A_1', B_1' etc..., on aura

$$A_1' = 2^{\frac{f+2}{2}},\ B_1' = 1 + 2^{\frac{f+2}{2}},$$ où f doit être pair. Le numérateur de la fraction irréductible

$$\frac{2A_1' + B_1'}{A_1'} = \frac{\left(1 + 2^{\frac{f+2}{2}}\right)^2}{2^{\frac{f+2}{2}}}$$

ne renferme que des facteurs impairs, dont les degrés ne sont pas supérieurs à f. En effet, cela résulte de ce que pour $f = 2$, le numérateur devient 5^2, et pour $f > 2$, $1 + 2^{\frac{f+2}{2}} < 3^{\frac{f}{2}}$.

Il résulte de là qu'il suffit de répéter des mêmes opérations moins de f- fois pour arriver au nombre A_μ^2 qui ne sera pas un carré. Soient maintenant $B_0' + 2A_0' = 2^f$, $A_0 = 1$. Remarquons que f ne peut pas être égal à 2, car alors B_0' fut aussi égal à 2, et par suite $B_0 = 2A_0$ c'est-à-dire $B_0^2 - 4A_0^2 = p^2(r^2 - 4s) = 0$; donc il faut

admettre $p=0$ ou $r^2-4s=0$; dans les deux suppositions l'équation

$$z(z+p)(z^2+rz+s)=0$$

ait des racines égales, mais nous avons fait abstraction de ce cas, comme cela a été dit plus haut. Après avoir démontré que f ne peut pas être égal à 2, passons aux calculs des nombres A_1' B_1' etc. Nous avons

$$A_1' = 2.2^{\frac{f}{2}}, \text{ où } f \text{ doit être pair,}$$
$$B_1' = 2^2(1+2^{f-2}).$$

Le numérateur de la fraction

$$\frac{2A_1'+B_1'}{A_1'} = \frac{\left(1+2^{\frac{f-2}{2}}\right)}{2^{\frac{f-2}{2}}}$$

ne contiendra que des facteurs impairs dont les exposants ne surpassent $f-2$. Il suffit donc d'opérer ces calculs un nombre de fois inférieur à $f-2$ pour arriver au nombre A_μ^2 qui ne sera pas un carré.

VI.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit qu'en transformant, au moyen de la formule

$$z_1 = \frac{(p-r)^2(z^2+pz)}{(r-p)z+s}$$

l'intégrale

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{(z^2+pz)(z^2+rz+s)}}$$

on obtient une intégrale de la même forme et, en outre, il a été montré qu'après un nombre fini d'opérations, on rencontre l'intégrale dans laquelle $p_i=r_i$ ou celle dans laquelle la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en deux facteurs $(z^2+pz)(z^2+rz+s)$ dont les coefficients satisfont à cette condition-ci:

$$s(p^2-pr+s) = \text{un nombre carré}$$

et au moins à l'une des inégalités

$$4s-r^2>0,\ rp-2s>0.$$

Il résulte de là qu'on peut toujours se borner aux intégrales dans lesquelles la fonction placée sous le radical ne se décompose pas en facteurs satisfaisants aux conditions précédentes. Afin d'évaluer de pareilles intégrales M. Tchébychef se sert de nouveau des transformations sucessives.

D'après sa méthode, passons de l'intégrale

$$\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}$$

à celle-ci

$$\int \frac{(z_1+A')\,dz_1}{\sqrt{z_1^4+l_1z_1^3+m_1z_1^2+n_1z_1}}$$

eu égard à la transformation de l'article I. c'est à dire en posant

$$z_1 = \frac{\frac{1}{16}l^3-\frac{1}{4}lm+\frac{1}{2}n}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}-z^2-\frac{1}{2}lz-\frac{4m-l^2}{8}}$$

$$l_1 = -l-\frac{(l^2-4m)^2}{2l^3-8lm+16n}$$

$$m_1 = -2m+\frac{3}{4}l^2$$

$$n_1 = -n+\frac{1}{2}lm-\frac{1}{8}l^3$$

De s nombres l_1, m_1, n_1 nous passerons aux nombres l_2, m_2, n_2 etc., en posant généralement

$$(17)\qquad l_{i+1} = -l_i-\frac{(l_i^2-4m_i)^2}{2l_i^3-8l_im_i+16n_i}$$

$$m_{i+1} = -2m_i+\frac{3}{4}l_i^2$$

$$n_{i+1} = -n_i+\frac{1}{2}l_im_i-\frac{1}{8}l_i^3$$

et en prenant $l_0=l$, $m_0=m$, $n_0=n$.

Maintenant allons chercher où nous conduisent ces transformations succesives lorsque l'intégrale $\int \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{z^4+lz^3+mz^2+nz}}$ s'exprime en termes finis, et pour cet effet considérons les relations entre les racines des équations

$$z^3+lz^2+mz+n=0,\ z_1^3+l_1z_1^2+m_1z_1+n_1=0, \text{ etc.}$$

Soient $g_i, g_i' \, g_i''$ les racines de l'équation

$$z_i^3+l_iz_i^2+m_iz_i+n_i=0;$$

$g_0, g_0' \, g_0''$ étaient désignés plus haut par g, g', g''. Il est aisé de faire voir que g_{i+1}, g_{i+1}', g_{i+1}'' sont liés à g_i, g_i', g_i'' de la manière suivante:

$$(18)\qquad g_{i+1} = \frac{(g_i+g_i'-g_i'')(g_i+g_i''-g_i')}{2(g_i'+g_i''-g_i)}$$

$$g_{i+1}' = \frac{(g_i'+g_i-g_i'')(g_i'+g_i''-g_i)}{2(g_i+g_i''-g_i')}$$

$$g_{i+1}'' = \frac{(g_i'+g_i''-g_i)(g_i+g_i''-g_i')}{2(g_i'+g_i-g_i'')}$$

En effet, en multipliant ces expressions il vient

$$g_{i+1}\,g_{i+1}'\,g_{i+1}'' = -n_{i+1} = \frac{1}{8}(g_i+g_i'-g_i'')(g_i+g_i''-g_i')(g_i'+g_i''-g_i)$$

mais

$$g_i+g_i'+g_i'' = -l_i$$

donc

$$-n_{i+1} = \left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)\left(-\frac{l_i}{2} - g_i'\right)\left(-\frac{l_i}{2} - g_i''\right)$$

$$= n_i - \tfrac{1}{2}\, l_i m_i + \tfrac{1}{8}\, l_i^3 .$$

C'est la troisième formule (17).

Ensuite

$$m_{i+1} = g_{i+1} g_{i+1}' + g_{i+1}\, g_{i+1}'' + g_{i+1}'\, g_{i+1}''$$

$$= \tfrac{1}{4}\,(g_i + g_i' - g_i'')^2 + \tfrac{1}{4}\,(g_i + g_i'' - g_i')^2 + \tfrac{1}{4}\,(g_i' + g_i'' - g_i)^2$$

$= -2m_i + \frac{3}{4}\, l_i^2$, c'est la seconde formule (17).

En additionnant enfin les expressions (18), il vient

$$-l_{i+1} = \frac{(g_i+g_i'-g_i'')^2\,(g_i+g_i''-g_i')^2+(g_i''+g_i-g_i')^2\,(g_i'+g_i''-g_i)^2+(g_i'+g_i''-g_i)^2\,(g_i+g_i'-g_i'')^2}{2\,(g_i'+g_i''-g_i)\,(g_i+g_i''-g_i')\,(g_i+g_i'-g_i'')}$$

par conséquent

$$l_{i+1} n_{i+1} = \left(-\frac{l_i}{2} - g_i''\right)^2\left(-\frac{l_i}{2} - g_i'\right)^2 + \left(-\frac{l_i}{2} - g_i'\right)^2\left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)^2$$

$$+ \left(-\frac{l_i}{2} - g_i\right)^2\left(-\frac{l_i}{2} - g_i''\right)^2 .$$

Le second nombre de l'équation précédente est une fonction symétrique et entière des racines g_i, g_i', g_i''. Après l'avoir exprimé en coefficients l_i, m_i, n_i, on a

$$l_{i+1} n_{i+1} = (m_i - \tfrac{1}{4}\, l_i^2)^2 + l_i\,(n_i - \tfrac{1}{2}\, m_i l_i + \tfrac{1}{8}\, l_i^3)$$

donc

$$l_{i+1} = -\, l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8m_i l_i + 16n_i}$$

C'est la première formule (17).

VII.

A présent nous allons faire connaître les expressions de g_i, g_i' g_i'' en fonctions elliptiques. Après avoir posé

$$\varkappa^2 = \frac{g_0''\,(g_0' - g_0)}{g_0'\,(g_0'' - g_0)} = \frac{g''\,(g' - g)}{g\,(g'' - g)}\;,\ \sin^2 am\, a = \frac{g_0'' - g_0}{g_0''} = \frac{g'' - g}{g''}$$

nous avons eu

$$g_0' = \frac{g_0}{\Delta^2\, \mathrm{am}\, a}\,,\ g_0'' = \frac{g_0}{\cos^2 \mathrm{am}\, a}\,.$$

Ces formules nous donnent de même

$$g_0' + g_0'' - g_0 = g_0\, \frac{1 - \varkappa^2 \sin^4 \mathrm{am}\, a}{\cos^2 \mathrm{am}\, a\, \Delta^2\, \mathrm{am}\, a}$$

$$g_0'' + g_0 - g_0' = g_0 \cdot \frac{1 - 2\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a + \varkappa^2 \sin^4 \mathrm{am}\, a}{\cos^2 \mathrm{am}\, a\, \Delta^2\, \mathrm{am}\, a}$$

$$g_0 + g_0' - g_0'' = g_0 \cdot \frac{1 - 2 \sin^2 \mathrm{am}\, a + \varkappa^2 \sin^4 \mathrm{am}\, a}{\cos^2 \mathrm{am}\, a\, \Delta^2\, \mathrm{am}\, a}\,.$$

D'où, ayant égard aux formules (18), en y posant $i = 0$, on trouve

$$g_1 = \frac{g_0}{2} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} 2a \,.\, \cos \operatorname{am} 2a\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} a)}{\cos^2 \operatorname{am} a\, \Delta^2 \operatorname{am} a.}$$

$$g_1' = \frac{g_0}{2} \cdot \frac{\cos \operatorname{am} 2a \,.\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} a)}{\Delta \operatorname{am} 2a \,.\, \cos^2 \operatorname{am} a \,.\, \Delta^2 \operatorname{am} a}$$

$$g_1'' = \frac{g_0}{2} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} 2a\, (1 - \varkappa^2 \sin^4 \operatorname{am} a)}{\cos am 2a \,.\, \cos^2 \operatorname{am} a\, \Delta^2 \operatorname{am} a}$$

donc

$$g_1' = \frac{g_1}{\Delta^2 \operatorname{am} 2a}, \; g_1'' = \frac{g_1}{\cos^2 \operatorname{am} 2a}$$

$$\varkappa^2 = \frac{g_1''\, (g_1' - g_1)}{g_1'\, (g_1'' - g_1)}, \; \sin^2 \operatorname{am} 2a = \frac{g_1'' - g_1}{g_1''},$$

c'est-à-dire, lorsque des racines g_0, g_0', g_0'', on passe aux racines g_1, g_1', g_1'' le module $\varkappa$ reste invariable et l'argument a se redouble. Il en résulte qu'on peut immédiatement écrire les valeurs de g_i, g_i', g_i'':

(19ᵃ)
$$g_i' = \frac{g_i}{\Delta^2 \operatorname{am} 2^i a}, \; g_i'' = \frac{g_i}{\cos^2 \operatorname{am} 2^i a}$$

$$g_. = g_{i-1} \cdot \frac{\sin \operatorname{am} 2^{i-1} a \cos \operatorname{am} 2^i a \;\Delta \operatorname{am} 2^i a}{\sin \operatorname{am} 2^i a \cos \operatorname{am} 2^{i-1} a\, \Delta \operatorname{am} 2^{i-1} a}$$

et par conséquent

(19ᵇ)
$$g_i = g_1 \frac{\sin \operatorname{am} 2a \cos \operatorname{am} 2^i a\, \Delta \operatorname{am} 2^i a}{\sin \operatorname{am} 2^i a \cos \operatorname{am} 2a \,.\, \Delta \operatorname{am} 2a}.$$

VIII.

Supposons maintenant que

$$\int \frac{(z + A)\, dz}{\sqrt{z^4 + l z^3 + m z^2 + n z}},$$

(point de départ de nos transformations) s'exprime en termes finis, la constante A ayant une valeur convenable. Il a été démontré que le paramètre a acquiert dans ce cas la valeur $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, où ν, ν' et λ sont des entiers, dont le dernier est un nombre impair. Soit à présent σ le moindre entier satisfaisant à la congruence

$$2^\sigma \equiv 2 \pmod{\lambda}$$

laquelle est toujours soluble, λ étant un nombre impair. Soit $2^\sigma = 2 + h\lambda$, où le nombre h est évidemment pair.

Si, dans las formules (18) et (19) on attribue à i la valeur σ et si l'on remplace a par $\frac{\nu K + \nu' K' i}{\lambda}$, on aura

$$g_\sigma = g_1, \; g_\sigma' = g_1', \; g_\sigma'' = g_1''$$

et par conséquent,

$$l_\sigma = l_1, \; m_\sigma = m_1, \; n_\sigma = n_1.$$

Donc, si l'intégrale donnée s'exprime en termes finis, les quantités l_i, m_i, n_i sont periodiques. Si les nombres ν et ν' sont pairs, on aura

$$l_{\sigma-1} = l_0,\ m_{\sigma-1} = m_0,\ n_{\sigma-1} = n_0$$

et par conséquent la période commencera par l_0, m_0, n_0. Mais lorsque au moins l'un des nombres ν et ν' sera impair, la période ne commencera que par l_1, m_1, n_1.

Maintenant nous allons démontrer que, dans le cas de périodicité, tous les nombres l_i, m_i, n_i sont des entiers, pourvu que le soient l_0, m_0, n_0.

Posons

$$\frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i} = \alpha_i$$

i étant un entier quelconque, et démontrons que dans le cas de périodicité les systèmes l_i m_i n_i et tous les nombres α_i seront entiers. Nous allons le prouver d'abord pour le nombre α_0 et pour cet effet cherchons la forme génerale des expressions l_i, m_i, n_i en l_0, m_0, n_0 et α_0, lesquelles sont respectivement égales à l, m, n, α.

On a

$$(20) \qquad \begin{aligned} l_1 &= -l - \alpha,\ 4m_1 = -8m + 3l^2 \\ 8n_1 &= -8n + 4lm - l^3. \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que l_i, m_i, n_i peuvent être exprimés en α par les formules

$$l_i = \frac{\Phi_i \alpha}{\varphi_i \alpha},\ 4m_i = \frac{\Psi_i \alpha}{\psi_i \alpha},\ 8n_i = \frac{\Omega_i \alpha}{\omega_i \alpha}$$

où Φ_i, φ_i, Ψ_i, ψ_i, Ω_i, ω_i sont des fonctions entières rationnelles de α à coefficients entiers (ces coefficients renferment l, m, n). En outre, ces fonctions seront de la forme

$$(21) \qquad \begin{aligned} \Phi_i \alpha &= 3\alpha^{p_i} + \cdots\cdots\cdots, & \varphi_i \alpha &= 2^{i-1}(\alpha^{p_i - 1} + \cdots\cdot) \\ \Psi_i \alpha &= 3\alpha^{q_i} + \cdots\cdots & \psi_i \alpha &= 2^{2i-4}(\alpha^{q_i - 2} + \cdots\cdot) \\ \Omega_i \alpha &= \alpha^{r_i} + \cdots\cdots & \omega_i \alpha &= 2^{3i-6}(\alpha^{r_i - 3} + \cdots\cdot) \end{aligned}$$

Les exposants des termes vont en décroissant; nous avons affecté des parenthèses les fonctions entières de α à coefficients entiers. On peut très aisement verifier ces formules pour les nombres l_2, m_2, n_2. En effet, après avoir substitué dans les formules (17) au lieu de l_1, m_1, n_1 leurs valeurs (20), on aura

$$l_2 = \frac{3\alpha^4 + \cdots\cdot}{2\alpha^3 + \cdots\cdot},\ 4m_2 = 3\alpha^2 + \cdots\cdot,\ 8n_2 = \alpha^3 + \cdots\cdots$$

donc $\psi_2 \alpha$ et $\omega_2 \alpha$ sont égaux à l'unité.

Afin d'établir la généralité des formules (21), nous supposerons qu'elles subsistent pour un nombre quelconque i et prouverons qu'elles ont encore lieu pour $i + 1$.

Nous avons

$$l_{i+1} = -l_i - \frac{(l_i^2 - 4m_i)^2}{2l_i^3 - 8l_i m_i + 16n_i} =$$

$$= -\frac{2\Phi_i\alpha\,\psi_i\alpha\,[\Phi_i^3\alpha\,\psi_i\alpha\,\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha\Psi_i\alpha\,\omega_i\alpha\,\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\,\varphi_i^3\alpha\,\psi_i\alpha] + \omega_i\alpha\,[\Phi_i^2\alpha\,\psi_i\alpha - \Psi_i\alpha\,\varphi_i^2\alpha]^2}{2\varphi_i\alpha\,\psi_i\alpha\,[\Phi_i^3\alpha\,\psi_i\alpha\,\omega_i\alpha - \Phi_i\alpha\,\Psi_i\alpha\,\omega_i\alpha\,\varphi_i^2\alpha + \Omega_i\alpha\,\varphi_i^3\alpha\,\psi_i\alpha]}.$$

Après avoir remplacé les fonctions $\Phi_i\alpha$, $\varphi_i\alpha$ etc.... par leurs valeurs, on obtient, en réduisant

$$l_{i+1} = \frac{3\alpha^{p_{i+1}} + \ldots\ldots}{2^i\,(\alpha^{p_{i+1}-1} + \ldots\ldots)}$$

où

$$p_{i+1} = 4p_i + 2q_i + r_i - 7;$$

D'une manière analogue on trouve

$$4m_{i+1} = \frac{3\Phi_i^2\alpha\,\psi_i\alpha - 2\varphi_i^2\alpha\,\Psi_i\alpha}{\psi_i\alpha\,\varphi_i^2\alpha}$$

$$= \frac{3\alpha^{q_{i+1}} + \ldots\ldots}{2^{2i-2}\,(\alpha^{q_{i+1}-2} + \ldots\ldots)}$$

où $q_{i+1} = 2p_i + q_i - 2$.

$$8n_{i+1} = -\frac{\Omega_i(\alpha)\,\psi_i\alpha\,\varphi_i^3\alpha - \omega_i(\alpha)\,\Psi_i(\alpha)\,\Phi_i(\alpha)\,\varphi_i^2(\alpha) + \Phi_i^3(\alpha)\,\psi_i\alpha\,\omega_i\alpha}{\omega_i(\alpha)\,\psi_i(\alpha)\,\varphi_i^3(\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha^{r_{i+1}} + \ldots\ldots}{2^{3i-3}\,(\alpha^{r_{i+1}-3} + \ldots\ldots)}$$

où

$$r_{i+1} = 3p_i + q_i + r_i - 5.$$

Par conséquent les formules (21) ont lieu pour $i+1$, c'est ce que nous voulions prouver. Il a été démontré plus haut que lorsque l'intégrale donnée s'exprime en logarithmes, nous arriverons de nouveau aux nombres l_1, m_1, n_1, les systèmes l_i, m_i, n_i se succédant périodiquement. Soient comme il a été supposé $l_\sigma = l_1$, $m_\sigma = m_1$, $n_\sigma = n_1$.

On a dans ce cas

$$8n_1 = \frac{\Omega_\sigma\alpha}{\omega_\sigma\alpha} \tag{22}$$

ou

$$\Omega_\sigma\alpha - 8n_1\,\omega_\sigma\alpha = 0.$$

En remarquant que

$$8n_1 = -8n + 4lm - l^3$$

est un nombre entier, on voit, que α est une racine rationnelle de l'équation à coefficients entiers, dont le premier terme a l'unité pour coefficient, donc α sera un nombre entier. De ce que

$$\alpha = \frac{(l^2 - 4m)^2}{2l^3 - 8lm + 16n}$$

est un nombre entier on voit que l doit être pair, par conséquent

$$l_1 = -l - \alpha, \quad m_1 = -2m + \tfrac{3}{4} l^2,$$
$$n_1 = -n + \tfrac{1}{2} lm - \tfrac{1}{8} l^3$$

seront des nombres entiers.

Soit à présent

$$\frac{(l_1^2 - 4m_1)^2}{2l_1^3 - 8l_1 m_1 + 16 n_1} = \alpha_1 .$$

En remplaçant dans la formule (22) les nombres l, m, n, par l_1, m_1, n_1 et α par α_1, on aura $8n_{\sigma+1}$ au lieu $8n_\sigma$ savoir

$$8n_{\sigma+1} = 8n_2 = \frac{\Omega_\sigma'(\alpha_1)}{\omega_\sigma'(\alpha_1)},$$

les nombres l_1, m_1, n_1 entrent dans les coefficients des fonctions Ω_σ' et ω_σ' de la même manière que l, m, n dans ceux de Ω_σ et ω_σ.

Comme

$$8n_2 = -8n_1 + 4l_1 m_1 - l_1^3$$

est un nombre entier on voit, d'après l'équation

$$\Omega_\sigma'(\alpha_1) - 8n_2 \omega_\sigma'(\alpha_1) = 0$$

que α_1 est un nombre entier, donc l_2, m_2, n_2 seront aussi des entiers. On voit de la même manière que l_3, m_3, n_3 etc. . . sont aussi des entiers.

IX.

Pour achever la démonstration de la méthode de M. Tchébychef, il ne nous reste qu'à faire voir, que les nombres des systèmes l_i, m_i, n_i que l'on obtient avant que la périodicité soit manifestée, ne surpasse pas une limite finie. Nous reprendrons, pour cet effet, les relations qui existent entre les racines g_{i+1}, g_{i+1}' g_{i+1}'' et g_i, g_i', g_i''. On a.

$$g_{i+1}'(g_{i+1}'' - g_{i+1}) = \frac{g_{i+1}^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2^i a}{\Delta^2 \mathrm{am}\, 2^i a \cos^2 \mathrm{am}\, 2^i a} = \frac{g_i \sin^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}{\Delta^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a \cos^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}$$
$$= g_i'(g_i'' - g_i)$$

$$g_{i+1}(g_{i+1}' - g_{i+1}'') = -g_{i+1}^2 \frac{\varkappa'^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2^i a}{\cos^2 \mathrm{am}\, 2^i a\, \Delta^2 \mathrm{am}\, 2^i a} = -\frac{g_i^2 \varkappa'^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}{\Delta^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a \cos^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}$$
$$= g_i(g_i' - g_i'')$$

$$g_{i+1}''(g_{i+1} - g_{i+1}') = -g_{i+1}^2 \frac{\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2^i a}{\cos^2 \mathrm{am}\, 2^i a\, \Delta^2 \mathrm{am}\, 2^i a} = -\frac{g_i^2 \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}{\Delta^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a \cos^2 \mathrm{am}\, 2^{i-1} a}$$
$$= g_i''(g_i - g_i').$$

Des relations ci-dessus il vient

$$g_{i+1}^2 (g_{i+1}' - g_{i+1}'')^2 + g_{i+1}'^2 (g_{i+1}'' - g_{i+1})^2 + g_{i+1}''^2 (g_{i+1} - g_{i+1}')^2$$
$$= g_i^2 (g_i' - g_i'')^2 + g_i'^2 (g_i'' - g_i)^2 + g_i''^2 (g_i - g_i')^2.$$

En y introduisant les coefficients l_i, m_i, n_i, l_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} au ieu des racines, on aura

$$m_{i+1}^2 - 3 l_{i+1} n_{i+1} = m_i^2 - 3 l_i n_i .$$

Des mêmes relations on a

$$g_{i+1}^2 g_{i+1}'^2 g_{i+1}''^2 (g_{i+1} - g_{i+1}')^2 (g_{i+1}' - g_{i+1}'')^2 (g_{i+1}'' - g_{i+1})^2$$
$$= g_i g_i'^2 g_i''^2 (g_i - g_i')^2 (g_i' - g_i'')^2 (g_i'' - g_i)^2$$

ou, ce qui revient au même

$$n_{i+1}^2 (4 l_{i+1}^3 n_{i+1} - l_{i+1}^2 m_{i+1}^2 - 18 l_{i+1} m_{i+1} n_{i+1} + 4 m_{i+1}^3 + 27 n_{i+1}^2)$$
$$= n_i^2 (4 l_i^3 n_i - l_i^2 m_i^2 - 18 l_i m_i n_i + 4 m_i^3 + 27 n_i^2).$$

Il suit des égalités obtenues, que le nombre de différentes systèmes l_i, m_i, n_i ne surpassera pas celui des solutions entières des équations

$$Y^2 - 3 XZ = m^2 - 3 ln$$
$$Z^2 (4 X^3 Z - X^2 Y^2 - 18 XYZ + 4 Y^3 + 27 Z^2)$$
$$= n^2 (4 l^3 n - l^2 m^2 - 18 lmn + 4 m^3 + 27 n^2).$$

Ces solutions X, Y, Z ne peuvent être qu'en nombre limité, comme l'a démontré M. Tchébychef lui-même*).

*) Journal de Mathém. Liouville 1864. p. 235.

Verbesserung.

In der Note auf Seite 560 ist zu lesen pag. 83 statt §. 83.

Sur les formes quadratiques positives quaternaires.

Par A. Korkine et G. Zolotareff.

La recherche des limites précises des minima des formes quadratiques positives de déterminant donné, les variables étant des nombres entiers, présente des grandes difficultés et constitue un des points les plus importants dans la théorie de ces formes. Jusqu'à présent on ne connaît les limites précises des minima que pour les formes binaires et ternaires. Dans nos efforts de trouver ces limites pour des formes avec un nombre plus grand des variables nous avons obtenu quelques résultats non sans importance pour la solution du problème, que nous nous sommes proposé, résultats, que nous fairons connaître dans un autre mémoire.

Dans cette note nous allons nous occuper des formes quaternaires, et comme premier résultat de nos recherches nous allons démontrer la limite précise de leurs minima. Il est très-remarquable qu'elle suit immédiatement de la limite connue pour les formes ternaires.

Soit

$$f = \sum_{i=1,\, k=1}^{i=4,\, k=4} a_{ik}\, x_i\, x_k$$

une forme quaternaire positive de déterminant $-D$.

Il est permis de supposer que le coefficient a_{11} soit le minimum de f, car dans le cas contraire on peut trouver une forme équivalente à f, qui satisfait à cette condition.

Cela posé, considérons la forme

$$F(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$$

qui se déduit de f par la substitution

$$\begin{aligned}
x_1 &= X_1 + l X_2 + m X_3 + n X_4\\
x_2 &= \phantom{X_1 +{}} l_1 X_2 + m_1 X_3 + n_1 X_4\\
x_3 &= \phantom{X_1 +{}} l_2 X_2 + m_2 X_3 + n_2 X_4\\
x_4 &= \phantom{X_1 +{}} l_3 X_2 + m_3 X_3 + n_3 X_4.
\end{aligned}$$

Les coefficients de cette substitution l, m . . . . . sont des entiers, qui ne sont assujetties qu'à la seule condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Il est évident, que le minimum commun a_{11} de f et F figure dans F comme le coefficient de X_1^2.

Faisons dans F

$$X_1 = 0,$$

en laissant les autres variables quelconques, et désignons par $-\Delta$ le déterminant de la forme ternaire

$$F(X_1, X_2, X_3, 0).$$

Il est facile de voir que le minimum de cette forme est aussi a_{11}, et par conséquent en vertu de la limite connue des minima des formes ternaires nous aurons

$$(2) \qquad a_{11} \leq \sqrt[3]{2\Delta}.$$

Soient maintenant

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

les variables de la forme

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

adjointe à f, respectivement correspondantes à x_1, x_2, x_3, x_4, c'est à dire, soit φ (y_1, y_2, y_3, y_4) le produit Df (x_1, x_2, x_3, x_4) transformé par la substitution:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \; y_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \; y_3 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}, \; y_4 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Le nombre Δ est representé*) par la forme φ en y faisant

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= m_2 l_3 - m_3 l_2 \\ y_3 &= m_3 l_1 - m_1 l_3 \\ y_4 &= m_1 l_2 - m_2 l_1 \end{aligned}$$

où les quantités

$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$$

ne sont assujetties qu'à la condition (1), à laquelle on peut évidemment satisfaire par le choix convenable de n_1, n_2, n_3, si les nombres

$$\begin{aligned} & m_2 l_3 - m_3 l_2 \\ & m_3 l_1 - m_1 l_3 \\ & m_1 l_2 - m_2 l_1 \end{aligned}$$

n'ont point de diviseur commun.

---

*) Mathematische Werke von Jacobi. 2. Band. — Hermite, première lettre sur la théorie des nombres. p. 223.

Nous disposerons de $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ de sorte que la forme ternaire

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4)$$

reçoive la valeur minimum en y posant

$$y_2 = m_2 l_3 - m_3 l_2$$
$$y_3 = m_3 l_1 - m_1 l_3$$
$$y_4 = m_1 l_2 - m_2 l_1 .$$

Cela est toujours possible en vertu du théorème connu*), et les nombres y_2, y_3, y_4 qui donnent le minimum de φ n'ayant point de diviseur commun, la condition unique pour les entiers

$$l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$$

est satisfaite.

Ainsi le minimum de

$$\varphi(0, y_2, y_3, y_4) \tag{3}$$

sera précisement la quantité Δ et par conséquent en ayant égard à ce que le déterminant de la forme (3) est $-D^2 a_{11}$, il viendra

$$\Delta \leq \sqrt[3]{2 D^2 a_{11}} . \tag{4}$$

Les inégalités (2) et (4) donnent

$$a_{11} \leq \sqrt[4]{4 D} .$$

La limite $\sqrt[4]{4D}$ est précise, car il est le minimum de la forme positive

$$\sqrt[4]{4D}\,[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4]$$

de déterminant $-D$.

Nous avons donc le théorème suivant: *On peut assigner aux variables de toute forme quadratique positive quaternaire de déterminant $-D$ des valeurs entiers telles que la valeur de la forme ne surpasse point la quantité*

$$\sqrt[4]{4D} ,$$

et il existe de telles formes dont les minima sont égaux à

$$\sqrt[4]{4D} .$$

---

*) Gauss: Disquisitiones Arithmeticae, art. 279.

Théorèmes sur les groupes de substitutions.

Par M. L. Sylow à Frederikshald en Norvege.

On sait que si l'ordre d'un groupe de substitutions est divisible par le nombre premier n, le groupe contient toujours une substitution d'ordre n. Ce théorème important est contenu dans un autre plus général que voici: „Si l'ordre d'un groupe est divisible par n^α, n étant premier, le groupe contient un faisceau partiel d'ordre n^α“. La démonstration même du théorème fournit quelques autres propriétés générales des groupes de substitutions. J'y ajouterai encore quelques propositions moins générales qui s'y ratachent ou qui en écoulent, dont quelques unes pourtant sont déjà connues par un travail de M. E. Mathieu.

Les notations et les termes employés sont ceux de M. C. Jordan.

1. Si G est un groupe de substitutions dont l'ordre N est divisible par le nombre premier n, on sait que G contient une substitution d'ordre n, mais nous pouvons supposer plus généralement qu'il contienne un groupe g d'ordre n^α, dont par conséquent chaque substitution est d'un ordre diviseur de n^α. Nous désignerons les substitutions de g par

$$1\ \theta_1\ \theta_2\ \ldots\ .$$

tandis que les substitutions de G en général seront désignées par

$$1\ \psi_1\ \psi_2\ \ldots\ .\ .$$

Enfin nous supposerons que G ne contient aucun groupe partiel dont l'ordre est une puissance de n supérieure à n^α. Or G contient toujours des substitutions permutables à g, savoir les substitutions de ce dernier elles-mêmes, mais il est possible qu'il en contient un nombre plus grand; en tous cas ces substitutions forment un groupe γ, qui contient g, et dont l'ordre sera désigné par $n^\alpha \nu$; ce nombre est à son tour un diviseur de N; nous pouvons donc faire:

$$N = n^\alpha \nu h\ .$$

Les substitutions du groupe γ seront désignées par

$$1\ \varphi_1\ \varphi_2\ \ldots\ .\ .\ .$$

Les θ sont donc comprises parmi les φ, ainsi que celles-ci parmi les ψ.

Cela posé, nous allons d'abord démontrer que le nombre ν doit être premier à n. Soient $x_0\, x_1\, x_2 \ldots$ les lettres que le groupe G permute entre elles, et soit y_0 une fonction rationnelle des x, invariable par les substitutions de g mais variable par toute autre substitution. Cette fonction prend par les substitutions de γ les ν valeurs différentes

$$y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_{\nu-1}\,.$$

Chacune de ces fonctions est invariable par les substitutions de g mais variable par toute autre substitution. En effet, si y_1 se déduit de y_0 par la substitution φ_1, y_1 est invariable par le groupe transformé de g par φ_1, mais variable par toute autre substitution; mais φ_1 étant permutable à g, le groupe transformé se confond avec g. Or si l'on opère dans les y les substitutions de γ, on aura entre ces quantités un groupe γ' nécessairement transitif et isomorphe à γ. Pour en avoir l'ordre il faut diviser celui de γ par le nombre des substitutions φ qui n'altèrent aucune des y, c'est-à-dire par n^α. L'ordre de γ' est donc ν. Si maintenant ν était divisible par n, γ' devrait contenir une substitution d'ordre n; une substitution correspondante φ_1 de γ devrait remplir la condition

$$\varphi_1{}^n = \theta_a\,.$$

Mais puisque φ_1 est permutable à g, on voit que dans ce cas les substitutions $\theta_q\,\varphi_1{}^p$ formeraient un groupe d'ordre $n^{\alpha+1}$ contenu dans G. Cela étant contraire à l'hypothèse, on conclut que ν est premier à n.

Notons ici que les θ sont les seules substitutions de γ dont les ordres sont des puissances de n. En effet, si φ_1 est une substitution de γ étrangère à g, les substitutions $\theta_q\varphi_1{}^p$ forment un groupe dont l'ordre est égal à $n^\alpha m$, m désignant l'exposant de la puissance la moins élevée de φ_1 qui appartient à g. Or on voit sans peine que les seules puissances de φ_1 qui appartiennent à g sont celles dont les exposants sont des multiples de m, d'où il suit immédiatement que m est un diviseur de l'ordre de φ_1. Si donc l'ordre de φ_1 était une puissance de n, on aurait $m = n^\beta$, ce qui est impossible, le groupe des $\theta_q\,\varphi_1{}^p$ ne pouvant être d'ordre $n^{\alpha+\beta}$.

Le nombre h n'est pas non plus divisible par n. Pour le faire voir imaginons une fonction rationnelle des x invariable par les substitutions de γ, mais variable par toute autre substitution. Soit z_0 cette fonction, et représentons par

$$z_0\, z_1\, z_2 \ldots z_{h-1}$$

les h valeurs qu'elle prend par les substitutions de G. Effectuons dans les z les substitutions de g; par cela z_0 ne varie pas, mais chacune des autres z prend un nombre de valeurs qui est un diviseur de l'ordre de g, c'est-à-dire une puissance de n. Cette puissance ne peut se réduire à l'unité; si par exemple z_1 était invariable par g

et que z_1 se déduise de z_0 par la substitution ψ_1, z_0 devrait être invariable par le groupe transformé de g par ψ_1^{-1}; or, le seul groupe d'ordre n^α contenu dans γ étant g, ψ_1^{-1} devrait être permutable à g, ce qui n'a pas lieu. Si donc on partage les fonctions $z_1 \ldots . z_{h-1}$ en systèmes, en réunissant ensemble celles qui se permutent entre elles par les substitutions de g, le nombre de fonctions contenues dans chaque système sera une puissance de n. Par conséquent le nombre h est de la forme $np+1$. L'ordre de g égale donc la plus grande puissance de n qui divise l'ordre de G. Les résultats obtenus se résument ainsi:

Théorème I. Si n^α désigne la plus grande puissance du nombre premier n qui divise l'ordre du groupe G, ce groupe contient un autre g de l'ordre n^α; si de plus $n^\alpha \nu$ désigne l'ordre du plus grand groupe contenu dans G dont les substitutions sont permutables à g, l'ordre de G sera de la forme $n^\alpha \nu (np+1)$.

2. Évidemment g n'est pas le seul groupe d'ordre n^α contenu dans G, excepté seulement le cas $p=0$. Mais on pourrait demander si G en contient d'autres que g et ses transformés par les substitutions de G. Voilà ce que nous allons rechercher. Soit g' un groupe d'ordre n^α contenu dans G mais différent de g, et soient

$$1 \; \theta_1' \; \theta_2' \ldots .$$

ses substitutions. Effectuons ces substitutions dans les fonctions z, et réunissons en systèmes celles qui par cela s'échangent entre elles. Comme nous l'avons déjà dit, le nombre des fonctions contenues dans chaque système doit être un diviseur de n^α; on doit donc avoir une égalité de la forme

$$np + 1 = n^a + n^b + n^c + \cdots$$

n^a, n^b, $n^c \ldots$ désignant le nombre des fonctions contenues dans les divers systèmes. Mais cela exige qu'au moins un des exposants $a\; b\; c \ldots$ soit nul; en d'autres termes, il faut qu'au moins une des fonctions z soit invariable par toutes les substitutions de g'. Soit z_k cette fonction, et supposons qu'elle se déduise de z_0 par la substitution ψ_k. On z_k n'est invariable que par les substitutions $\psi_k^{-1}\varphi_a\psi_k$; de plus $\psi_k^{-1}\varphi_a\psi_k$ est semblable à φ_a, et parmi les φ_a il n'y a que les θ dont les ordres sont des puissances de n. Il faut donc qu'on ait

$$\theta_b' = \psi_k^{-1}\theta_a\psi_k$$

pour toutes les valeurs de b. Le groupe g' est donc le transformé de g par ψ_k.

Si d'ailleurs on remplace ψ_k par $\varphi_r\psi_k$, on a évidemment le même groupe transformé. De l'autre côté ψ_k ne peut être remplacée que par $\varphi_r\psi_k$. En effet, si l'on a

$$\psi_l^{-1}\theta_a\psi_l = \psi_k^{-1}\theta_b\psi_k$$

pour toute valeur de a, il s'ensuit

$$\psi_k \psi_l^{-1} \theta_a \psi_l \psi_k^{-1} = \theta_b$$

d'où l'on conclut

$$\psi_l \psi_k^{-1} = \varphi_r$$

ou

$$\psi_l = \varphi_r \psi_k .$$

On peut donc énoncer ce théorème:

Théorème II. Tout étant posé comme au théorème précédent, le groupe G contient précisément $np+1$ groupes distincts d'ordre n^α; on les obtient tous en transformant l'un quelconque d'entre eux par les substitutions de G, tout groupe étant donné par $n^\alpha \nu$ transformantes distinctes.

Par un raisonnement analogue on voit que tout groupe contenu dans G d'ordre n^β, β étant moindre que α, est le transformé d'un groupe contenu dans g par une substitution de G, et qu'il y a *au moins* $n^\alpha \nu$ manières de l'obtenir par transformation. Il est en effet possible qu'il y en ait plus, puisque de la relation

$$\psi_k \psi_l^{-1} \theta_a \psi_l \psi_k^{-1} = \theta_b$$

on ne peut conclure

$$\psi_l \psi_k^{-1} = \varphi_r$$

à moins qu'elle n'ait lieu pour toute valeur de a.

3. Nous allons maintenant nous occuper du groupe g. Formons les transformées des substitutions $1\,\theta_1\,\theta_2\,.\,.\,.\,.$ par une d'elles; comme par cela on ne fait que les reproduire dans un autre ordre, on a une substitution entre les substitutions θ elles mêmes. Si on les transforme successivement par toutes les substitutions de g, on a un groupe de substitutions; cela résulte en effet immédiatement de l'identité:

$$\theta_b^{-1} \theta_a^{-1} \theta_r \theta_a \theta_b = (\theta_a \theta_b)^{-1} \theta_r (\theta_a \theta_b) .$$

Le groupe entre les θ qu'on obtient de cette manière est nécessairement intransitif, la substitution identique au moins étant invariable par les transformations; mais il y a aussi d'autres substitutions invariables, comme nous allons voir. En effet on peut réunir en systèmes celles des substitutions qui s'échangent entre elles par les transformations; cela fait, les transformations produiront un groupe transitif entre les substitutions de chaque système. Or le nombre de substitutions θ contenues dans un système est un diviseur de l'ordre du groupe correspondant; mais on voit par un raisonnement familier que l'ordre de ce groupe est égal à n^α divisé par le nombre des transformations qui ne font varier aucune des substitutions du système considéré. Ainsi donc le nombre de substitutions contenues dans chaque système est une puissance de n. La substitution identique étant invariable, on doit avoir une égalité de la forme

$$n^\alpha = 1 + n^a + n^b + \cdots$$

où $1\, n^a\, n^b \ldots$ sont les nombres des substitutions des divers systèmes. Cela exige qu'au moins $n-1$ des exposants $ab\ldots$ soient nuls. Il y a donc dans le groupe g au moins n substitutions, y comprise la substitution identique, qui sont invariables; en d'autres termes il y a dans g au moins n substitutions échangeables à toutes les substitutions du groupe.

Or puisque, deux substitutions étant échangeables, leurs puissances le sont également, il y aura toujours parmi les substitutions échangeables à toutes les autres une substitution d'ordre n. Soit θ_0 cette substitution, et soit y_0 une fonction rationnelle des x, invariable par θ_0^i mais variable par toute autre substitution, et représentons par

$$y_0\; y_1\; y_2\; \cdots\cdots$$

les $n^{\alpha-1}$ valeurs qu'elle prend par les substitutions de g. En effectuant dans les y les substitutions de g on aura entre ces fonctions un groupe isomorphe à g, dont l'ordre est évidemment $n^{\alpha-1}$. En vertu de ce qui vient d'être démontré ce groupe doit contenir une substitution d'ordre n échangeable à toutes les substitutions du groupe. Soit maintenant θ_1 une substitution correspondante de g. Effectuée n fois de suite θ_1 doit ramener toutes les y à leurs places primitives, donc

$$\theta_1^n = \theta_0^a.$$

De plus, si ϑ désigne une substitution quelconque de g, θ_1 doit produire entre les y la même substitution que sa transformée par ϑ, c'est-à-dire, on a

$$\vartheta^{-1}\theta_1\vartheta = \theta_0^b\theta_1\,.$$

Les substitutions $\theta_0^i\theta_1^k$ constituent évidemment un groupe d'ordre n^2. Si maintenant on forme une fonction rationnelle des x invariable par les $\theta_0^i\theta_1^k$, mais variable par toute autre substitution, et qu'on raisonne sur cette fonction, comme nous avons raisonné sur y_0, on voit que g doit contenir une substitution θ_2 qui remplit les conditions

$$\theta_2^n = \theta_0^c\theta_1^d$$
$$\vartheta^{-1}\theta_2\vartheta = \theta_0^e\theta_1^f\theta_2\,.$$

En continuant ainsi on démontre le théorème suivant:

Théorème III. Si l'ordre d'un groupe est n^α, n étant premier, une substitution quelconque ϑ du groupe peut être exprimée par la formule

$$\vartheta = \theta_0^i\theta_1^k\theta_2^l \ldots \theta_{\alpha-1}^r$$

où

$$\theta_0^n = 1$$
$$\theta_1^n = \theta_0^a$$
$$\theta_2^n = \theta_0^b\theta_1^c$$
$$\theta_3^n = \theta_0^d\theta_1^e\theta_2^f$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et où l'on a

$$\vartheta^{-1}\theta_0\vartheta = \theta_0$$
$$\vartheta^{-1}\theta_1\vartheta = \theta_0^{\beta}\theta_1$$
$$\vartheta^{-1}\theta_2\vartheta = \theta_0^{\gamma}\theta_1^{\delta}\theta_2$$
$$\vartheta^{-1}\theta_3\vartheta = \theta_0^{\epsilon}\theta_1^{\zeta}\theta_2^{\eta}\theta_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que les facteurs de composition du groupe sont tous égaux à n, nous pouvons donc énoncer comme corollaire la proposition suivante:

Si l'ordre d'une équation algébrique est une puissance d'un nombre premier, l'équation est résoluble par radicaux.

Supposons que le groupe g soit transitif et que le nombre des lettres soit égal à n^β. Dans ce cas la substitution que nous avons nommée θ_0 est régulière, c'est-à-dire qu'elle déplace toutes les lettres, et que toutes ces cycles en contiennent un même nombre; car autrement elle ne serait pas évidemment échangeable à toutes les substitutions du groupe. De plus le groupe sera imprimitif; en effet les substitutions remplaceront les lettres contenues dans un même cycle de θ_0 par des lettres d'un même cycle. Donc l'équation le partagera par la résolution d'une équation de degré $n^{\beta-1}$ en $n^{\beta-1}$ équations de degré n. Évidemment les groupes de ces dernières équations, ainsi que celui de l'équation auxiliaire, ne contiendront que des substitutions dont les ordres sont des puissances de n; les équations de degré n seront par suite abéliennes. Donc:

Théorème IV. Si le degré d'une équation irréductible est n^β, n étant premier, et que l'ordre de son groupe soit également une puissance de n, l'une quelconque de ses racines se déterminera par une suite de β équations abéliennes de degré n.

Pour le cas $n = 2$ cette dernière proposition a été démontrée par M. J. Petersen (Om de Ligninger, der kunne löses ved Kvadratrod etc. Kjöbenhavn 1871).

Ces résultats peuvent même être généralisés. En effet, si l'ordre du groupe d'une équation est égal à $n^\alpha m$, m étant moindre que n, on a, en employant le théorème I, $p = 0$, $m = \nu$. Par suite toutes les substitutions du groupe sont permutables au groupe partiel que nous avons désigné par g. Le groupe se réduit donc à g, si l'on adjoint les fonctions que nous avons désignées par $y_0 y_1 \ldots$, et qui sont les racines d'une équation dont l'ordre et le degré sont égaux à m. Si donc l'équation auxiliaire est résoluble par radicaux, l'équation donnée l'est également. De là s'ensuit comme conséquence immédiate:

Théorème V. Si l'ordre d'une équation algébrique est

$$n^\alpha n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3} \ldots\ldots,$$

$n\ n_1\ n_2\ n_3 \ldots\ldots$ étant premiers, si de plus on a

$$n > n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3} \dots$$
$$n_1 > n_2^{\alpha_2} n_3^{\alpha_3} \dots$$
$$n_2 > n_3^{\alpha_3} \dots$$

l'équation est résoluble par radicaux.

4. De ce qui précède on tire aussi une démonstration simple du théorème de M. E. Mathieu: *Tout groupe transitif entre n^α lettres, n désignant un nombre premier, contient une substitution régulière d'ordre n.* (Voir le journal de M. Liouville 1861.)

Soit G un groupe transitif de degré $n^\alpha m$, et soit N son ordre. Or N est divisible par $n^\alpha m$; faisons donc

$$N = n^{\alpha+\beta} m N',$$

N' étant supposé premier à n; soit de plus G' le groupe d'ordre $n^\beta N'$ qui contient les substitutions de G qui ne déplacent pas x_0. Maintenant G contient un groupe g d'ordre $n^{\alpha+\beta}$, et les substitutions de ce dernier qui ne déplacent pas x_0 forment un groupe g', dont nous désignerons l'ordre par n^γ. Or g' est évidemment contenu dans G', donc on a

$$\gamma \leq \beta.$$

Mais si l'on désigne par r le nombre des places qui sont successivement occupées par x_0, quand on effectue toutes les substitutions de g, on a, comme on sait,

$$r n^\gamma = n^{\alpha+\beta}$$

donc $$r \geq n^\alpha.$$

Le nombre r est nécessairement une puissance de n; d'ailleurs ce qui vient d'être démontré pour x_0 a aussi lieu pour chacune des x. Donc chaque lettre prend par le groupe g un nombre de places qui est une puissance de n égale ou supérieure à n^α.

Si maintenant on suppose $m = 1$, on voit que g doit être transitif. Cela étant, g doit contenir une substitution régulière comme nous l'avons déjà dit. Le théorème est donc démontré.

Il y a un autre cas où l'on peut également démontrer l'existence de substitutions régulières. Supposons en effet $\alpha = 1$ avec $m < n$. Puisque $n^2 > mn$, on conclut que chaque lettre prend par les substitutions de g précisément n places différentes. Si donc m réunit dans un même système les lettres qui s'échangent entre elles, on aura m systèmes de n lettres chacun. Soit maintenant c un cycle d'une substitution de g, c représentera une substitution circulaire des n lettres d'un même système. Or si une autre substitution de g fait subir aux mêmes lettres un déplacement, ce déplacement ne sera autre chose qu'une puissance de c, car dans le cas contraire on pourrait des deux substitutions dériver une troisième qui ne soit pas d'ordre n. Soit donc θ une substitution de g, on a

$$\theta = c_1 c_2 \ldots . c_r$$

c_k désignant une substitution circulaire entre les lettres du $k^{\text{ième}}$ système. Si maintenant $r < m$, le groupe g doit contenir une substitution θ_1 qui permute les lettres du $(r+1)^{\text{ième}}$ système, et d'après ce qui vient d'être dit on a

$$\theta_1 = c_1^{\delta} c_2^{\varepsilon} \ldots c_r^{\zeta} c_{r+1} c_{r+2} \ldots . c_s,$$

les nombres $\delta\ \varepsilon \ldots \zeta$ pouvant être nuls. On en tire

$$\theta^p \theta_1 = c_1^{p+\delta} c_2^{p+\varepsilon} \ldots c_r^{p+\zeta} c_{r+1} c_{r+2} \ldots c_s.$$

Or, puisque le nombre des systèmes est inférieur à n, on peut déterminer p de sorte qu'aucun des nombres $p+\delta$, $p+\varepsilon$, $\ldots p+\zeta$ ne soit égal à zéro. On obtient ainsi une substitution ayant $r+s$ cycles. Si $r+s < m$, on déterminera de la même manière une substitution de g qui a plus de $r+s$ cycles; en continuant ainsi on finira par trouver une substitution régulière.

Théorème VI. Une groupe transitif entre nm lettres, n étant premier, et $m < n$, contient une substitution régulière d'ordre n.

En vertu de ces deux théorèmes tout groupe transitif entre un nombre de lettres moindre de 12 contient des substitutions régulières. Mais déjà pour le degré 12 il existe des groupes transitifs qui en sont dépourvus. Ainsi les substitutions du groupe dérivé de

$$\theta_0 = (x_0 x_1 x_2)(x_3 x_4 x_5)(x_6 x_7 x_8)$$
$$\theta_1 = (x_3 x_4 x_5)(x_6 x_8 x_7)(x_9 x_{10} x_{11})$$
$$\varphi = (x_0 x_3 x_6 x_9 x_1 x_4 x_8 x_{11})(x_2 x_5 x_7 x_{10})$$

sont semblables les unes à θ_0, les autres aux puissances de φ. Un autre exemple est le groupe dérivé de $\theta_0\ \theta_1$ et des substitutions suivantes

$$(x_0 x_3 x_1 x_4)(x_2 x_5)(x_6 x_9 x_7 x_{11})(x_8 x_{10})$$
$$(x_0 x_7 x_1 x_6)(x_2 x_8)(x_3 x_9 x_4 x_{11})(x_5 x_{10}).$$

Ces deux groupes sont d'ordre 72, et caractérisent des équations résolubles par radicaux.

5. Considérons maintenant les groupes transitifs de degré premier. Soit n le degré, N l'ordre du groupe. Puisque N est divisible par n mais non divisible par n^2, on a

$$N = n\nu(np+1)$$

Supposons les lettres rangées dans un ordre tel qu'une substitution circulaire du groupe est exprimée par

$$\theta = |k \quad k+1|;$$

alors les substitutions permutables au groupe dérivé de θ sont de la forme

$$|k \quad ak+b|$$

Or $n\nu$ est égal à l'ordre de ce dernier groupe, donc ν est égal au nombre des substitutions du groupe donné qui sont de la forme $|k \ ak|$; ν est donc un diviseur de $n-1$. On a donc ce théorème:

Théorème VII. L'ordre d'un groupe transitif entre un nombre premier de lettres est de la forme $n\nu(np+1)$, où n est le degré, $np+1$ le nombre des substitutions régulières essentiellement différentes, c'est-à-dire, qui ne sont pas des puissances les unes des autres, et où ν est le nombre des substitutions de la forme $|k \ ak|$, une substitution circulaire quelconque étant désignée par $|k \ k+1|$.

Ces résultats sont en partie connus par les recherches de M. E. Mathieu, qui a démontré que le nombre des substitutions circulaires essentiellement différentes est de la forme $np+1$, et qu'il y en a au moins $\frac{N}{n\nu}$, un tel nombre pouvant être déduit des $|k \ k+b|$ en les transformant par les substitutions du groupe. Ce qu'il faut ajouter aux propositions de M. Mathieu pour avoir le théorème ci-dessus c'est donc que toutes les substitutions circulaires peuvent être déduite de la manière mentionnée, un point sur lequel M. Mathieu semble avoir conservé des doutes.

Qu'on se rapelle ici ces deux propositions également dues à M. E. Mathieu:

1) *Si $p > 0$, ν ne peut être égal à 1.*
2) *Si $p > 0$, et que n soit de la forme $4h+3$, ν ne peut être égal à 2.*

Étant donné l'ordre N d'un groupe transitif entre n lettres, notre théorème permet de déterminer le nombre des substitutions circulaires et le nombre des substitutions permutables au groupe dérivé d'une substitution circulaire. En effet ν, étant moindre que n, est complètement déterminé par la congruence

$$\frac{N}{n} \equiv \nu \bmod n;$$

et puis on a

$$np+1 = \frac{N}{n\nu}.$$

Prenons pour exemple le groupe du degré $\frac{q^r-1}{q-1}$, q étant un nombre premier, que l'on peut déduire du groupe linéaire à r indices. Si r est un nombre premier impair, il peut arriver que $\frac{q^r-1}{q-1}$ est un nombre premier. Faisons donc

$$n = \frac{q^r-1}{q-1}$$

$$N = \frac{q^r-1}{q-1}(q^r-q)(q^r-q^2)\ldots(q^r-q^{r-1}).$$

Or on voit aisément que q est une racine primitive de la congruence

$$z^r \equiv 1 \bmod n;$$

par suite on a

$$z^{r-1} + z^{r-2} + \ldots + z + 1 \equiv (z-q)(z-q^2)\ldots(z-q^{r-1}).$$

Si maintenant on fait

$$z \equiv q^r \equiv 1,$$

on obtient

$$(q^r - q)(q^r - q^2)\ldots(q^r - q^{r-1}) \equiv r.$$

c'est-à-dire

$$\frac{N}{n} \equiv r$$

Si donc on choisit les indices de sorte qu'une substitution circulaire est représentée par $|k \quad k+1|$, le groupe contiendra r substitutions de la forme $|k \quad ak|$ savoir les $|k \quad q^i k|$; le nombre des substitutions circulaires essentiellement différentes sera $\frac{q^r - q}{r}(q^r - q^2)\ldots(q^r - q^{r-1})$.

La formule $N = n\nu(np+1)$ réduit considérablement le nombre des diviseurs du produit $2.3\ldots.n$ propres à désigner l'ordre d'un groupe transitif. Si par exemple on fait $n = 7$, ν doit être égal à 6 ou à 3, excepté pour les équations résolubles par radicaux. Mais s'il existe un groupe d'ordre $7(7p+1)6$, il y en a aussi un d'ordre $7(7p+1)3$ contenant celles des substitutions du premier groupe qui équivalent à un nombre pair de transpositions. Pour avoir les valeurs de $7p+1$ il suffit donc d'examiner le cas $n=3$; donc $7p+1$ doit être un diviseur du nombre $2.5.4.3$, et par conséquent égal à un des nombres $1, 2^3, 5.3, 5.3.2^3$, dont le troisième doit être rejeté, puisqu'il n'y a pas de groupe d'ordre 5.3 entre 6 lettres. Pour $n = 11$ il n'y aura que 15 cas à examiner etc.

Examinons maintenant la composition des groupes en question. Soient donc G et H deux groupes transitifs, et soit G contenu dans H et permutable à ses substitutions. Soit de plus $n(np+1)\nu$ l'ordre de G, et désignons par $\theta_0\theta_1\ldots\theta_{np}$ ses substitutions circulaires essentiellement différentes. G contient donc les $np+1$ groupes d'ordre n: $\theta_0{}^r, \theta_1{}^r, \ldots \theta_{np}{}^r$. Si l'on transforme ces groupes par une substitution circulaire quelconque de H, qui sera désignée par θ', on doit les reproduire dans un autre ordre; on a donc une substitution entre les $np+1$ groupes. Mais on voit sans peine que si un groupe $\theta_i{}^r$ n'est pas invariable par la transformation, il doit faire partie d'un cycle de n groupes. Donc au moins un des groupes est invariable par la transformation. Si nous supposons que c'est $\theta_0{}^r$, ce groupe est permutable à θ', d'où l'on conclut

$$\theta' = \theta_0{}^b.$$

En effet, si l'on choisit les indices de sorte que

$$\theta'_0 = |k \quad k+1|,$$

il n'y a parmi les $n(n-1)$ substitutions $|k \quad ak+b|$, seules permutables à θ_0^r, que les $|k \quad k+b|$ qui sont d'ordre n. Toutes les substitutions circulaires de H font donc partie de G.

Réciproquement, si G et H contiennent les mêmes substitutions circulaires et que H contienne G, H est composé avec G. Soit toujours $n(np+1)\nu$ l'ordre de G, celui de H sera $n(np+1)\nu\nu_1$, ν_1 étant un diviseur de $\frac{n-1}{\nu}$. Les substitutions de la forme $|k \quad ak|$ contenues dans H sont les puissances d'une seule d'entre elles; désignons celle-là par φ; celles qui appartiennent à G seront par conséquent les puissances de φ^{ν_1}. Or il est facile à voir que H dérive des substitutions $\theta_0\, \theta_1 \ldots \theta_{np}\, \varphi$. En effet le groupe dérivé de ces substitutions est contenu dans H; de l'autre côté son ordre ne peut être moindre que $n(np+1)\nu\nu_1$, puisqu'il a $np+1$ substitutions circulaires et $\nu\nu_1$ substitutions $|k \quad ak|$. De même G dérive des substitutions $\theta_0\, \theta_1 \ldots \theta_{np}\, \varphi^{\nu_1}$. G est donc permutable aux substitutions de H, s'il est permutable à φ. Or cela a lieu, car premièrement les transformées de $\theta_0\, \theta_1 \ldots \theta_{np}$ par φ sont des substitutions circulaires appartenant à H et par suite à G; secondement φ^{ν_1} est échangeable à φ.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème VIII. Pour qu'un groupe transitif de degré premier soit composé avec un groupe partiel, il faut et il suffit que le second groupe possède toutes les substitutions circulaires du premier.

Soit donnée une équation dont le groupe est H. Si l'on forme une fonction des racines invariable par les substitutions de G, mais variable par toute autre substitution, elle sera évidemment racine d'une équation abélienne de degré ν_1. En adjoignant cette fonction on réduit le groupe de l'équation à G.

Si donc une équation irréductible de degré n est composée, elle devient simple par l'adjonction de la racine d'une équation abélienne, dont le degré est un diviseur de $n-1$.

En supposant $p=0$, on retombe sur une propriété connue des équations résolubles par radicaux.

Ueber die simultanen Invarianten binärer Formen.

Von Paul Gordan in Giessen.

An mehreren Orten habe ich gezeigt, dass sowohl die Invarianten (resp. Covarianten) einer binären Form als auch die simultanen Invarianten mehrerer solcher Formen durch eine endliche Anzahl Invarianten als ganze Functionen ausdrückbar sind. Das System dieser letzteren nannte ich vollständig (vgl. Clebsch, Theorie der binären Formen, Leipzig 1872.), weil die simultanen Invarianten seiner Formen sich als ganze Functionen derselben ausdrücken lassen.

Einer der wesentlichsten Sätze, welche die Vollständigkeit der Formensysteme begründen, ist der folgende:

„Bilden die Formen:

$$A_1,\ A_2 \ldots\ldots\ldots A_\mu \text{ und } B_1,\ B_2 \ldots\ldots B_\nu$$

vollständige Formensysteme, dann giebt es eine endliche Anzahl ihrer simultanen Invarianten (resp. Covarianten), durch welche alle übrigen als ganze Functionen ausdrückbar sind."

Dieser Satz lehrt, dass, wenn einzelne binäre Formen endliche Invarianten-Systeme besitzen, ein Gleiches für ihre simultanen Invarianten stattfindet. Ich beabsichtige hier einen neuen einfacheren Beweis für denselben zu geben, welcher, wie ich in einem späteren Aufsatze zeigen werde, die Ausdehnung auf *ternäre* Formen gestattet.

§ 1.

Symbolische Produkte. Anordnung. Reducible und aequivalente Formen.

Ich will die gegebenen Formen A_i und B_i symbolisch durch:

$$A_i = a_{i,x}{}^{m_i} = a_{i_1,x}{}^{m_i} \ldots\ldots$$

$$B_i = b_{i,x}{}^{n_i} = b_{i_1,x}{}^{n_i} \ldots\ldots$$

bezeichnen; ihre Grade sind dann die Zahlen:

$$m_1,\ m_2 \ldots m_\mu,\ n_1,\ n_2,\ \ldots n_\nu\,;$$

die grösste derselben sei n.

38*

Die simultanen Invarianten lassen sich durch symbolische Produkte darstellen, in denen nur die Symbole a und b der Formen A und B vorkommen, welche somit aus symbolischen Factoren:

$$a_x, \; b_x, \; (a a'), \; (b b'), \; (a b)$$

zusammengesetzt sind.

Diese symbolischen Produkte sollen nach der Anzahl der in ihnen auftretenden Klammerfactoren

$$(a a') \quad (b b') \quad (a b)$$

so geordnet werden, dass zuerst die Formen A und B selbst zu stehen kommen; ihnen folgen die symbolischen Produkte P, welche nur einen Klammerfactor enthalten; dann die mit zwei solchen Factoren behafteten u. s. w. Die in *dieser* Anordnung früher auftretenden symbolischen Produkte will ich *frühere Formen* nennen. Symbolische Produkte, welche durch frühere Formen als ganze Functionen ausdrückbar sind, mögen *reducibel* heissen; zwei symbolische Produkte nenne ich *äquivalent*, deren jedes durch das andere und frühere Formen ausdrückbar ist.

In diesem Sinne lassen sich alle simultanen Invarianten durch die irreducibeln Formen als ganze Functionen ausdrücken; es handelt sich also nur darum zu zeigen, dass die Anzahl der irreducibeln endlich ist. In dem System der irreducibeln Formen darf man jede Form durch eine äquivalente ersetzen, ohne seinen Charakter als solches zu verletzen.

§ 2.

Symbolische Produkte, welche einen der Faktoren (aa') oder (bb') besitzen.

Um die irreducibeln Formen zu erhalten muss man alle reducibeln ausscheiden; hierhin gehören alle diejenigen symbolischen Produkte, welche entweder einen Factor (aa') oder (bb') enthalten. Es genügt, den Beweis für die einen Factor (aa') besitzenden zu führen, da sich das Verfahren auf die übrigen, in denen ein Factor (bb') vorkommt, übertragen lässt. Es soll also der Satz bewiesen werden:

„*Enthält ein symbolisches Produkt P den Factor $(aa')^k$, dann lässt es sich auf frühere symbolische Produkte zurückführen.*"

Beweis. Die in dem Klammerfactor (aa') auftretenden Symbole a und a' mögen den Formen:

$$A = a_x^r \;, \; A' = a_x'^s$$

entnommen sein. Das symbolische Produkt:

$$F = (a a')^k a_x^{r-k} a_y'^{s-k}$$

ist eine Form mit 2 Reihen Variabler x und y und kann daher (vgl. Clebsch § 7) als Aggregat von Polaren anderer Formen:

$$\varphi \quad \psi \quad \chi$$

dargestellt werden. Diese letzteren sind simultane Invarianten der Formen A, also da das System derselben vollständig ist, ganze Functionen der A. Ihre Polaren sind daher auch ganze Functionen der Polaren der A und somit ist auch F eine ganze Function solcher Polaren. Ein Gleiches kann man von dem symbolischen Produkte:

$$F_1 = (a a')^k a_{x_1} a_{x_2} \ldots \ldots a_{x_{r-k}} a'_{y_1} a'_{y_2} \ldots a'_{y_{s-k}}$$

beweisen, worin die x_i und y_i beliebige Variable bedeuten.

Aus F_1 entsteht aber das symbolische Produkt P dadurch, dass man Factoren a_{x_i} und a_{y_i}' passend durch Factoren:

$$a_x\,;\ a'_x\,;\ (a a_i)\,;\ (a' a_i)\,;\ (a b)\,;\ (a' b)$$

ersetzt und sodann mit einem keines der beiden Symbole a a' enthaltenden symbolischen Factor multiplicirt.

Dieselben Operationen kann man in dem angedeuteten Ausdrucke von F ausführen, in welchem F als ganze Function der Polaren der Formen A dargestellt wurde. In dieser Darstellung von F treten gar keine Klammerfactoren auf; man erhält also dann auch für P ein Aggregat symbolischer Produkte, welche mindestens k symbolische Factoren weniger als P enthalten. Somit ist P reducibel.

§ 3.

Symbolische Produkte (P) und ihre Aequivalenz.

Man kann nach dem vorigen Satze alle symbolischen Produkte, welche einen der Factoren $(a a')$, $(b b')$ besitzen, als reducibel ausscheiden und braucht von jetzt an nur noch die symbolischen Produkte zu untersuchen, in denen nur die Factoren:

$$a_x\,,\ b_x\,,\ (a b)$$

vorkommen; ich will sie durch (P) bezeichnen.

Die symbolischen Produkte (P) sind keineswegs von einander unabhängig; vielmehr kann man sie mittelst der bekannten Identitäten:

$$a'_x (a b) = a_x (a' b) + b_x (a a')\,;\ b'_x (a b) = b_x (a b') - a_x (b b')$$

auf einander zurückführen. Ersetzt man in einem Produkte (P) den Factor $a'_x (a b)$ durch seinen Werth aus der ersten Identität, dann erhält man die Summe zweier symbolischen Produkte, welche dieselbe Anzahl Klammerfactoren wie P besitzen und von denen das letztere nach § 2 reducibel ist. Hieraus folgt der Satz:

„*Ersetzt man in einem symbolischen Produkte* (P) *einen symbolischen Factor* $a'_x (a b)$ *durch* $a_x (a' b)$ *oder einen symbo-*

lischen Faktor $b'_x (ab)$ durch $b_x (ab')$, dann erhält man eine äquivalente Form.“

Von jedem symbolischen Produkte (P) aus kann man durch mehrfache Anwendung dieser Operation zu jedem andern symbolischen Produkte gelangen, welches dieselben Symbole und eine gleiche Anzahl von Klammerfactoren besitzt. Hieraus folgt der Satz:

„Zwei symbolische Produkte (P) sind äquivalent, wenn sie gleichviel Klammerfactoren besitzen und wenn in ihnen dieselben Symbole vorkommen.“

§ 4.

Criterien der Reducibilität. Charaktere. Zahlensystem S.

Diejenigen symbolischen Produkte (P) sind reducible, für welche äquivalente Formen existiren, welche *wirkliche* Produkte $(P_1) \cdot (P_2)$ von Formen (P_1) und (P_2) niedrer (nicht 0ter) Ordnung in den Coefficienten sind. Dieser Fall tritt dann ein, wenn ein symbolisches Produkt (P_1) existirt, welches nur in (P) vorkommende Symbole enthält und bei welchem weder die Anzahl der symbolischen Factoren a_x noch die der Factoren b_x noch die der Factoren (ab) *grösser* als in (P) ist, während mindestens eine dieser Zahlen *kleiner* als in (P) ist.

Um die Begriffe schärfer zu fixiren, will ich folgende Beziehungen einführen. — Die Anzahl der *verschiedenen* in (P) auftretenden Symbole, welche die Form A_1 darstellen, soll durch h_1 bezeichnet werden; desgleichen die Anzahl der *verschiedenen* die übrigen Formen:

$$A_2 , A_3 \dots A_\mu , B_1 , B_2 \dots B_\nu$$

darstellenden Symbole durch:

$$h_2 , h_3 \dots\dots h_\mu , k_1 , k_2 \dots\dots k_\nu$$

endlich die Anzahl der Factoren:

$$a_x , b_x \text{ und } (ab)$$

durch N_1, N_2 und m. Diese Zahlen

$$h_1 \dots h_\mu \; k_1 \dots k_\nu , N_1 , N_2 , m$$

nenne ich die Charaktere der Form (P), zwischen ihnen bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} N_1 + m = h_1 m_1 + h_2 m_2 \dots h_\mu m_\mu \\ N_2 + m = k_1 n_1 + k_2 n_2 \dots\dots k_\nu n_\nu \end{cases}$$

Jedem Zahlensystem $h_1 \dots\dots m$, welches diese Relationen befriedigt, entsprechen eine Anzahl symbolischer Produkte (P), deren Charaktere diese Zahlen sind; alle diese symbolischen Produkte sind nach § 3 äquivalent.

Ist das symbolische Produkt (P) reducibel, dann giebt es ein symbolisches Produkt (P_1), dessen Charaktere nicht grösser sind als die entsprechenden von (P), während mindestens einer der Charaktere von (P_1) kleiner ist, als der entsprechende von (P). Hieraus folgt der Satz:

„*Ein symbolisches Produkt (P) ist reducibel wenn ein Zahlensystem*:

$$h_1', h_2' \ldots h_\mu', k_1' \ldots k_\nu', N_1', N_2', m'$$

existirt, welches die Formeln befriedigt:

$$N_1' + m' = \Sigma h_i' m_i ; \; N_2' + m' = \Sigma k_i' n_i$$

und in welchem keine Zahl grösser und mindestens eine Zahl kleiner ist, als die entsprechenden Charaktere von (P)".

Solche Zahlensysteme will ich *Zahlensysteme S* nennen. Ein symbolisches Produkt (P) ist mithin reducibel oder nicht, je nachdem für dasselbe ein Zahlensystem S existirt oder nicht.

§ 5.

Schluss von n auf $n+1$. Symbolische Produkte Q und R.

Die symbolischen Produkte (P) kann man je nach den Formen A, B, deren Symbole in ihnen auftreten, in Gruppen eintheilen. Die einzigen symbolischen Produkte (P), bei denen nur eine dieser Formen durch Symbole vertreten ist, sind die Formen A, B selbst. In die 2[te] Gruppe gehören sodann die symb. Produkte (P), bei welchen 2 der Formen A, B durch Symbole vertreten sind; in die 3[te] Gruppe diejenigen bei denen es 3 sind u. s. w., in die letzte Gruppe endlich die symb. Produkte (P), in denen Symbole sämmtlicher $\mu + \nu$ Formen vorkommen. — Soll die Anzahl sämmtlicher irreducibler Formen endlich sein, so muss dies auch für jede dieser Gruppen der Fall sein; befinden sich umgekehrt in jeder Gruppe eine endliche Anzahl irreducibler Formen, dann ist auch die Anzahl aller irreducibler Formen (P) endlich. — Beim Beweise dieses Satzes für jede solche Gruppe kann man voraussetzen, er gelte bereits für die früheren Gruppen. — Hier wollen wir unsern Satz für die letzte Gruppe beweisen, also voraussetzen, er sei für die früheren Gruppen bewiesen. Hieraus folgt dann seine allgemeine Gültigkeit.

Ich will die Formen (P) in zwei Arten Q und R eintheilen; zur ersteren rechne ich diejenigen, bei denen mindestens einer der Charaktere h, k etwa $k_\nu \leq n$ ist (n ist im § 1 als grösster der Exponenten m_i, n_i definirt), zur zweiten die Formen (P), deren sämmtliche Cha-

raktere h, k grösser als n sind. — Von den Formen 2 behaupte ich, dass sie sich auf eine endliche Anzahl reduciren lassen, von den Formen R, dass sie reducibel sind.

§ 6.

Die Formen Q sind Formen K äquivalent. Die Anzahl der irreductibeln K ist endlich.

In dem symbolischen Produkte treten $k = k_r < n$ verschiedene die Form B_r darstellende Symbole auf, ich will sie durch:

$$b_{r_1} \quad b_{r_2} \ldots \quad b_{r_k}$$

allgemein durch b_r bezeichnen. Ersetzt man in Q nach Weglassung der symbolischen Factoren $b_{r,x}$ die Klammerfactoren $(a b_r)$ durch a_x, dann erhält man ein symbolisches Produkt G, welches keines der Symbole b_r enthält.

Nach der § 5 gemachten Voraussetzung ist die Anzahl der nur die übrigen Symbole enthaltenden irreducibeln Formen (P) endlich. Bezeichnet man dieselben durch:

$$C_1, \ C_2, \ \ldots . \ C_\varrho$$

dann ist nach § 4 G einer dieser Formen oder einem Produkte:

$$\Pi = C_1 \, . \, C_2 \ldots$$

äquivalent. Ersetzt man in Π eine passende Anzahl Factoren a_x durch $(a b_r)$ und multiplicirt man sodann mit den ergänzenden Factoren $b_{r,x}$, dann entsteht ein symbolisches Produkt k, welches nach § 3 dem symbolischen Produkte Q äquivalent ist. — Hieraus folgt der Satz:

> *„Alle symbolischen Produkte Q sind symbolischen Produkten K äquivalent, welche aus Formen C und ihren Produkten entstehen, indem man Factoren a_x durch $(a b_r)$ ersetzt und mit ergänzenden Factoren $b_{r,x}$ multiplicirt."*

In den Formen K kommen $h_r = h$ verschiedene Symbole der Form B_r vor; jedes dieser Symbole kommt n_r Mal vor, mithin existiren in K $h \, . \, n_r$ symbolische Factoren, welche ein Symbol b_r enthalten. Die Anzahl der Klammerfactoren $(a b_r)$ ist daher nicht grösser als $h \, . \, n_r$ mithin kleiner als n^2. Aus den Produkten Π, welche mehr als n^2 Factoren haben, entstehen daher Formen K, welche Factoren C besitzen, also reducibel sind. Die irreducibeln Formen K dagegen entstehen aus Produkten Π von weniger als n^2 Factoren, ihre Anzahl ist also endlich.

§ 7.

Reducibilität der Formen R.

Aus der zwischen den Charakteren eines symb. Produktes R bestehenden Relation (§ 4. F. I):

$$N_1 + m = h_1 m_1 + h_2 m_2 \dots h_\mu m_\mu$$

ergiebt sich nach den über die Formen R gemachten Voraussetzungen die Formel:

$$N_1 + m \geqq (1 + n)(m_1 + m_2 + \dots m_\mu)$$

und hieraus mindestens eine der Ungleichungen:

$$N_1 \geqq m_1 \quad \text{oder} \quad m \geqq n m_1 \geqq m_1 n_1$$

Für $N_1 \geqq m_1$ ist das Zahlensystem:

$h_1' = 1$; $h_2' = h_3' \dots h_\mu' = k_1' = \dots k_\nu' = 0$; $N_1 = m_1$; $N_2 = m = 0$

für $m \geqq m_1 n_1$ das Zahlensystem:

$h_1' = n_1$; $k_1' = m_1$; $h_2' = \dots h_\mu' = k_2' \dots k_\nu' = 0$; $N_1 = N_2 = 0$; $m = m_1 n_1$

ein Zahlensystem S. (§ 4). In beiden Fällen ist also R reducibel.

Der Beweis, dass in dem combinirten Systeme der Formen A, B nur eine endliche Anzahl irreducibler Formen vorkommt, dass also dies combinirte Formensystem ein endliches ist, ist damit geliefert.

Giessen, den 8. April 1872.

Ueber die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs*).

Von Carl Neumann in Leipzig.

Befindet sich ein System ponderabler Körper in beliebiger Bewegung, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden, so werden die in Betracht kommenden Kräfte nach ihrem *Ursprung* (d. i. nach ihrer *Entstehungsweise*) einzutheilen sein in

(a) *ordinäre,*

(b) *elektrostatische,*

(c) *elektrodynamische,*

wobei als ordinäre Kräfte alle diejenigen bezeichnet sein sollen, welche den ponderablen Massen inhärent sind, ferner als elektrostatische alle diejenigen (theils ponderomotorischen theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von den elektrischen *Ladungen*, endlich als elektrodynamische alle diejenigen (wiederum theils ponderomotorischen theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von den elektrischen *Strömungen.*

Es handelt sich hier vorzugsweise um die Kräfte (c), also um die Kräfte elektrodynamischen Ursprungs.

(c_I) *Das ponderomotorische Elementargesetz*

dieser Kräfte (c) ist bekanntlich schon von Ampère aufzustellen versucht worden. Sodann ist später

(c_{II}) *das elektromotorische Elementargesetz*

dieser Kräfte von Weber zu eruiren versucht worden. Doch unterliegt es keinem Zweifel, dass wir, trotz der eben genannten grossartigen und Epoche machenden Arbeiten, von einer endgiltigen Kenntniss jener beiden Gesetze noch immer weit entfernt sind. Ebenso wenig kann andrerseits bezweifelt werden, dass die definitive Feststellung

---

*) In etwas veränderter Form wiederholt aus den Sitzungsberichten der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. vom 3. August 1872.

jener beiden Gesetze eine der wichtigsten Aufgaben ist, welche im ganzen Gebiete der Physik unserer gegenwärtigen Zeit vorliegen. Dieser Aufgabe sind die nachfolgenden Zeilen*) gewidmet.

Zunächst wird in § 1. die Frage erörtert werden, ob für das Gesetz (c_I) ein *Potential* existiren kann. Sodann soll in § 2. ein betrachtender Blick geworfen werden auf diejenigen Arbeiten, welche zur Entdeckung der Gesetze (c_I) und (c_{II}) bisher unternommen worden sind. Endlich soll in § 3. gezeigt werden, dass ein ziemlich sicherer Weg existirt zur Auffindung des Gesetzes (c_{II}), sobald man das Gesetz (c_I) als *bekannt* voraussetzt, nämlich als feststehend betrachtet in der demselben von Ampère gegebenen Fassung.

§ 1.

Ueber die Frage, ob ein Potential existiren kann für die ponderomotorische Einwirkung einzelner elektrischer Stromelemente auf einander.

Sind A und B zwei Drahtringe, welche durchflossen sind von *gleichförmigen***) elektrischen Strömen J_0 und J_1, so wird das *Potential* P der beiden Stromringe auf einander — nach der von meinem Vater gegebenen Definition — dargestellt sein durch

$$(1) \qquad P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma\left(\frac{1+k}{2}\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{\cos\vartheta_0\cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds_0 und Ds_1 der beiden Ringe. Dabei bezeichnet r die gegenseitige Entfernung der Elemente Ds_0, Ds_1; ferner haben ε, ϑ_0, ϑ_1 die bekannten Bedeutungen:

$$\varepsilon = (Ds_0,\, Ds_1), \qquad \vartheta_0 = (Ds_0,\, r), \qquad \vartheta_1 = (Ds_1,\, r),$$

wo die *Richtung* r gerechnet sein soll von Ds_1 nach Ds_0 hin. Endlich repräsentiren A^2 und k zwei Constanten, von denen die letztere *ad libitum* gewählt werden darf, weil das Integral

$$\Sigma\Sigma\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} - \frac{\cos\vartheta_0\cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1$$

jederzeit *Null* ist, wie beschaffen die beiden Ringe hinsichtlich ihrer Form und relativen Lage auch sein mögen. Diese Definition des Potentiales P zu Grunde gelegt, gilt folgender Satz:

---

*) Es sind diese Zeilen als ein Auszug zu betrachten aus einer umfangreichen Untersuchung, welche demnächst als separates Werk in der Teubner'schen Verlagsbuchhandlung erscheinen wird unter dem Titel: „*Die elektrischen Kräfte.*"

**) Der in einem Drahte vorhandene elektrische Strom mag *gleichförmig* oder *ungleichförmig* genannt werden, jenachdem die Stromstärke *nur* eine Function der Zeit, oder aber eine Function von Zeit und Bogenlänge ist.

Befinden sich die Stromringe A, B in beliebiger Bewegung, so wird die während eines Zeitelementes dt von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit dS_A^B dargestellt sein durch:

$$(2) \qquad dS_A^B = -\left(\frac{\partial P}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial P}{\partial \pi'}\, d\pi' + \cdots\right),$$

vorausgesetzt, dass man unter π, π', ... irgend welche Parameter versteht, durch deren Werthe die räumliche Lage des Ringes A sich bestimmt mit Bezug auf ein absolut unbewegliches Axensystem, ferner unter $d\pi$, $d\pi'$, ... die Zuwüchse dieser Parameter während der Zeit dt.

Oder kürzer ausgedrückt: *Für jedes Zeitelement ist die vom Ringe B auf den Ring A ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich dem negativen partiellen Zuwachs des Potentials P, genommen nach der räumlichen Lage von A.*

Dieser Satz ist durch eine leichte Verallgemeinerung aus denjenigen Sätzen hervorgegangen, welche von meinem Vater aufgestellt worden sind, speciell mit Bezug auf *parallel fortschreitende* oder *drehende* Bewegungen.

Das Potential P (1) kann so dargestellt werden:

$$(3) \qquad P = \Sigma\Sigma \quad p\, Ds_0\, Ds_1\,,$$

wo alsdann p definirt ist durch die Formel:

$$(4) \quad p\, Ds_0\, Ds_1 = -A^2 J_0 J_1 \left(\frac{1+k}{2}\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1\,.$$

Andererseits kann die Arbeit dS_A^B dargestellt werden durch:

$$(5) \qquad dS_A^B = \Sigma\Sigma dS_0^1\,,$$

wo alsdann dS_0^1 diejenige Arbeit vorstellt, welche ein *einzelnes* Element Ds_1 des Ringes B ausübt auf ein *einzelnes* Element Ds_0 des Ringes A.

Durch Substitution der Werthe (3), (5) gewinnt der oben genannte in (2) enthaltene allgemeine Satz folgende Gestalt:

$$(6) \quad \Sigma\Sigma dS_0^1 = -\Sigma\Sigma\left(\frac{\partial p}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial p}{\partial \pi'}\, d\pi' + \ldots\right) Ds_0\, Ds_1\,.$$

Die von B auf A ausgeübte Arbeit ist also — können wir sagen — von solcher Beschaffenheit, als *würde* von jedem einzelnen Element Ds_1 auf jedes einzelne Element Ds_0 eine Arbeit dS_0^1 ausgeübt von dem Werthe:

$$(7) \qquad dS_0^1 = -\left(\frac{\partial p}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial p}{\partial \pi'}\, d\pi' + \cdots\right) Ds_0 Ds_1\,,$$

$$= -\left(\frac{\partial (p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial (p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial \pi'}\, d\pi' + \cdots\right).$$

Jene frühere Formel (2) ist zu bezeichnen als ein für zwei gleichförmige Stromringe gültiges *Integralgesetz*; andererseits wird die Formel

(7) zu charakterisiren sein als ein aus diesem Integralgesetz, durch Repartirung auf die einzelnen Elementenpaare, sich ergebendes *Elementargesetz*.

Selbstverständlich ist ein solcher Process der Repartirung vom mathematischen Standpunkte aus völlig unberechtigt, ebenso unberechtigt, als wollte man aus einer gegebenen Gleichung $a + b = \alpha + \beta$ den Schluss ziehen, dass $a = \alpha$ und $b = \beta$ sein müsse. Auch würde die Formel (7) ein Elementargesetz repräsentiren, welches, wie leicht zu übersehen, mit dem Ampère'schen Elementargesetz in Widerspruch steht.

Doch könnte man die Dinge von einem *andern* Standpunkte aus betrachten. Man könnte nämlich behaupten, wirklich durch Erfahrung constatirt sei das Ampère'sche Elementargesetz keineswegs, sondern nur das aus diesem sich ergebende, durch (2) angedeutete, Integralgesetz. Demgemäss habe *jedes andere* Elementargesetz, falls dasselbe nur ebenfalls hinleite zu jenem Integralgesetz (2), *gleiche* Berechtigung wie das Ampère'sche. Der Acceptirung des durch (7) ausgedrückten *neuen* Elementargesetzes an Stelle des Ampère'schen stünde also kein Bedenken entgegen; überdiess falle zu seinen Gunsten noch der Umstand ins Gewicht, dass dasselbe, dem Ampère'schen gegenüber, den Vorzug habe, verträglich zu sein mit der Existenz eines *elementaren* Potentiales; denn dieses *neue* Elementargesetz (7) einmal acceptirt, sei offenbar der Ausdruck pDs_0Ds_1 nichts Anderes als das Potential der Elemente Ds_0 und Ds_1 aufeinander.

Auf solche Empfehlung hin, mag nun das proponirte neue Elementargesetz (7) einer genaueren Betrachtung unterworfen werden. — Der Ausdruck pDs_0Ds_1, (4), ist abhängig von den *Orten*, zugleich aber auch von den *Richtungen* der Elemente Ds_0, Ds_1. Jenem neuen Elementargesetz (7) zufolge ist daher die ponderomotorische Einwirkung dieser beiden Elemente auf einander von solcher Art, dass durch sie eine *gewisse* (nämlich von Null verschiedene) Arbeit z. B. auch dann verrichtet wird, wenn das eine Element fest aufgestellt, das andere aber in Umdrehung versetzt wird um seinen eigenen Mittelpunkt. Mit anderen Worten: Jenem Gesetze (7) zufolge besteht die ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente aufeinander nicht nur in gewöhnlichen promovirenden, sondern daneben noch in gewissen revolvirenden Kräften*).

---

*) Man unterscheidet zwischen translatorischen Kräften einerseits und zwischen Koppelkräften oder Drehungsmomenten andererseits. Es mag mir hier der Bequemlichkeit willen gestattet sein, die erstern als *promovirende Kräfte* oder kürzer als *Promoventen*, die letztern als *revolvirende Kräfte* oder kürzer als *Revolventen* zu bezeichnen.

Im höchsten Grade bedenklich müsste es wohl sein, wenn man irgend ein Elementargesetz adoptiren wollte, welches in Widerspruch steht mit dem allgemeinen Princip der Action und Reaction. Zu untersuchen ist daher, ob jene durch das Elementargesetz (7) zwischen zwei elektrischen Stromelementen Ds_0, Ds_1 indicirten Promoventen und Revolventen den Anforderungen dieses Princips Genüge leisten, ob diese Promoventen und Revolventen von solcher Beschaffenheit sind, dass eine gegenseitige Zerstörung derselben eintritt, sobald die beiden Elemente starr mit einander verbunden gedacht werden. Eine derartige Untersuchung lässt sich leicht anstellen und führt zu folgendem Ergebniss:

Sollen die durch das neue Elementargesetz (7) *zwischen irgend zwei elektrischen Stromelementen indicirten ponderomotorischen Promoventen und Revolventen dem allgemeinen Princip der Action und Reaction entsprechen, so ist erforderlich und ausreichend, dass der bisher unbestimmt gelassenen Constanten k der Werth* $+ 1$ *zuerkannt werde.* Die Constante k in dieser Weise einmal festgesetzt, gewinnen übrigens jene Promoventen und Revolventen eine sehr einfache Orientirung, indem die erstern zusammenfallen mit der Verbindungslinie r der betrachteten Elemente Ds_0, Ds_1, und die letztern senkrecht zu stehen kommen gegen die mit Ds_0, Ds_1 parallele Ebene.*)

Der Annahme des Gesetzes (7) scheint also kein Hinderniss entgegenzustehen. Würde doch auch die damit verbundene Fixirung der Constanten k in gutem Einklang stehen mit den Ansichten von Helmholtz. — Auf diese Ueberlegungen gestützt, hatte ich in der That zu Anfang des gegenwärtigen Jahres jenes neue *ponderomotorische* Elementargesetz (7) in sorgfältigster Weise untersucht, und z. B. gefunden, dass demselben zur Seite gestellt werden kann ein nicht minder einfaches *elektromotorisches* Elementargesetz, und dass beide Gesetze zusammen genommen den Anforderungen des allgemeinen Axiomes der lebendigen Kraft in bester Weise entsprechen.

Da traten plötzlich, vor etwa drei bis vier Monaten, Hindernisse mir in den Weg, welche ich für unübersteiglich halte, und welche mich nöthigten, den mit Mühe gebahnten Weg vollständig zu verlassen.

Denkt man sich nämlich den Stromring A zusammengesetzt aus zwei Theilen, von denen der eine α drehbar ist um eine feste Axe MN, während der andere α' eine völlig feste Aufstellung besitzt, und

*) Darunter ist zu verstehen, dass die bekannten *geometrischen Charakteristiken* dieser Revolventen (oder Koppelkräfte) gegen die genannte Ebene (Ds_0, Ds_1) senkrecht stehen, dass also die Ebenen dieser Revolventen (oder Koppelkräfte) jener Ebene (Ds_0, Ds_1) parallel sind.

andererseits den Stromring B ersetzt durch ein fest aufgestelltes Solenoid, dessen geometrische Axe zusammenfällt mit der Linie MN, so wird die *relative Lage* zwischen dem Theile α und zwischen dem Solenoid B, falls man jenen Theil α um die Linie MN in Umdrehung versetzt, fortwährend *dieselbe* bleiben. Die während irgend eines Zeitelementes dt dieser Umdrehung vom Solenoide B auf den *Theil* α ausgeübte ponderomotorische Arbeit dS_α^B hat zufolge des neuen Elementargesetzes (7) den Werth:

(8) $$dS_\alpha^B = -\frac{\partial(\Sigma\Sigma p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial\pi}\, d\pi\,,$$

falls man nämlich unter π den Umdrehungswinkel, unter $d\pi$ seinen Zuwachs während der Zeit dt versteht. Dabei ist im Ausdrucke

(9) $$\Sigma\Sigma p D s_0\, D s_1$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt zu denken über alle Elemente Ds_0 des *Theiles* α und über alle Elemente Ds_1 des Solenoides B. Die relative Lage zwischen α und B bleibt aber während der Umdrehung, wie schon bemerkt, beständig *dieselbe*, mithin der Werth des Integrales (9) ebenfalls beständig *derselbe*. Somit folgt aus (8) sofort, dass

(10) $$dS_\alpha^B = 0$$

ist, dass also die vom Solenoide B auf den Theil α während seiner Umdrehung ausgeübte ponderomotorische Arbeit beständig *Null* bleibt, und dass mithin jener Theil α, falls er etwa zu Anfang in Ruhe sich befindet, trotz der Einwirkung des Solenoides beständig in Ruhe *bleiben* wird. Solches aber steht in directem Widerspruch mit der Erfahrung.

Die Vorstellung, das Ampère'sche Elementargesetz dürfe oder müsse ersetzt werden durch jenes neue in (7) *genannte Elementargesetz, überhaupt die Vorstellung, für die den elektrischen Strömen eigenthümlichen ponderomotorischen Kräfte existire ein elementares Potential, — diese Vorstellungen brechen also zusammen unter dem Gewicht der empirischen Thatsachen.*

Das Wort Potential kann allerdings in sehr verschiedenen Bedeutungen gebraucht werden; hiedurch ist geboten das eben ausgesprochene Ergebniss etwas sorgfältiger zu formuliren, nämlich etwa in folgender Weise:

Für die ponderomotorischen Kräfte, welche zwei gleichförmige elektrische Stromringe auf einander ausüben, ist von meinem Vater ein Potential P eingeführt worden, welches die charakteristische Eigenschaft besitzt, durch seinen negativen partiellen Zuwachs nach der räumlichen Lage des einen Ringes jederzeit diejenige ponderomotorische Arbeit auszudrücken, welche dieser von Seiten des anderen Ringes erleide. — Dass ein derselben Eigenschaft sich erfreuendes Potential auch exis-

tiren könne für irgend zwei einzelne Stromelemente, ist den empirischen Thatsachen gegenüber ein Ding der Unmöglichkeit.

Mit Bezug auf gewisse specielle Fälle wird allerdings der Anwendbarkeit eines solchen elementaren Potentials kein Hinderniss entgegenstehen. Doch wird ein solches Potential, eben *weil* seine Anwendbarkeit auf specielle Fälle eingeschränkt ist, niemals angesehen werden dürfen als der Ausdruck des *wirklichen* Elementargesetzes, sondern als der eines *scheinbaren*, welches in jenen speciellen Fällen mit dem wirklichen äquivalent ist.

§ 2.

Ueber diejenigen Untersuchungen, welche ihren Ausgang genommen haben von der Annahme teleskopischer Wirkungen.

Maxwell und Hankel haben bekanntlich Theorien construirt auf der Basis *mikroskopischer* Einwirkungen, mit Zuhülfenahme eines umgebenden Mediums. *Hier* indessen werde ich mich beschränken auf die Betrachtung der von der Annahme *teleskopischer* Wirkungen ausgehenden Untersuchungen, also vorzugsweise auf die Arbeiten Ampère's, Weber's und meines Vaters. In diesen Arbeiten sind im Ganzen dreierlei Gattungen von Gesetzen zu unterscheiden:

Punktgesetze,
Elementargesetze,
Integralgesetze.

Es mag nämlich der erste, zweite oder dritte Name in Anwendung gebracht werden, jenachdem das betreffende Gesetz sich bezieht auf zwei elektrische *Massenpunkte*, oder auf zwei *Elemente* elektrischer Ströme, oder endlich auf zwei *geschlossene* Ströme.

Ueber die Untersuchungen Ampère's.

Ampère stellte sich die Aufgabe, die ponderomotorische Wirkung zweier elektrischer Stromelemente auf einander zu ermitteln, und ging dabei aus von gewissen Prämissen, die theilweise allerdings eine Stütze finden in den Ergebnissen seiner experimentellen Untersuchungen, strenge genommen aber als Hypothesen zu bezeichnen sind. Diese Hypothesen können in folgender Ordnung aufgeführt werden:

(α) *Erste Hypothese.* Die ponderomotorische Einwirkung zweier elektrischen Stromelemente aufeinander ist proportional mit den Längen Ds und Ds_1 der beiden Elemente, und, abgesehen von diesen Factoren, nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente und von ihren Stromstärken.

(β) *Zweite Hypothese.* Sie ist mit jenen Stromstärken J und J_1 *proportional,* und schlägt also in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Strom*richtung* umgekehrt wird.

(γ) *Dritte Hypothese.* Ein Stromelement JDs kann, was seine ponderomotorische Einwirkung auf ein anderes Stromelement betrifft, ersetzt werden durch seine rechtwinkligen Componenten JDx, JDy, JDz.

(δ) *Vierte Hypothese.* Die ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente aufeinander besteht aus zwei entgegengesetzten Promoventen*) in der Richtung ihrer Verbindungslinie.

(ε) *Fünfte Hypothese.* Die ponderomotorische Wirkung zweier Stromelemente aufeinander ist, falls man die Winkel, welche die Elemente mit ihrer Verbindungslinie und mit einander einschliessen, constant erhält, umgekehrt proportional mit dem Quadrate ihrer Entfernung.

(ζ) *Sechste Hypothese.* Die ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes auf ein einzelnes Stromelement steht gegen letzteres *senkrecht.*

Am zuverlässigsten scheinen unter diesen Hypothesen die drei ersten (α, β, γ) zu sein; wenigstens sind dieselben bisher noch nie in Zweifel gezogen worden.

Bedenklich hingegen erscheint (nach meiner Ansicht) die Hypothese (δ). Denn dem allgemeinen Princip der Action und Reaction, durch welches Ampère bei Annahme derselben sich leiten liess, wird auch dann noch Genüge geschehen, wenn man jenen beiden Promoventen zwei einander parallele Revolventen von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung hinzugefügt sich denkt. — Sollte in der That die Hypothese (δ) einer solchen Correction bedürftig sein, so würden dadurch auch afficirt werden die beiden folgenden Hypothesen (ε, ζ).

Hievon abgesehen scheint die Hypothese (ε) bedenklich für den Fall *sehr kleiner* Entfernungen, die Hypothese (ζ) aber allgemein bedenklich, weil der betreffenden, von Ampère angestellten experimentellen Untersuchung offenbar nur wenig beweisende Kraft beizumessen ist.

Das ponderomotorische Elementargesetz, zu welchem Ampère auf Grund der Hypothesen (α, β, γ, δ, ε, ζ) gelangt, sagt bekanntlich aus, dass zwischen zwei Stromelementen $J_0\,Ds_0$ und $J_1\,Ds_1$ eine gegenseitige ponderomotorische Kraft R stattfindet, welche (repulsiv gerechnet) den Werth besitzt:

---

*) Vergl. die Note auf p. 605.

$$R = A^2 J_0 J_1 Ds_0 Ds_1 \frac{3\cos\vartheta_0\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2},$$

wo die Constante A^2, ebenso r, ϑ_0, ϑ_1, ε dieselben Bedeutungen haben, wie früher (p. 603.).

Ueber die Untersuchungen F. Neumann's.

Diese Untersuchungen nahmen ihren Ausgang von dem eben genannten Ampère'schen *Elementar*gesetz. Von dieser Grundlage aus gelang es meinem Vater zwei *Integral*gesetze zu entdecken, welche für eine tiefer gehende Erforschung der den elektrischen Strömen eigenthümlichen Kräfte von hervorragender Wichtigkeit sein dürften. Das *eine* derselben, schon vorhin (p. 604) erwähnt, kann so ausgesprochen werden:

Das ponderomotorische Integralgesetz. Befinden sich zwei gleichförmige Stromringe A und B in irgend welchen Bewegungen, befinden sich ferner die in ihnen vorhandenen Stromstärken J_0 und J_1 (unbeschadet der Gleichförmigkeit) in irgend welchen Zuständen der Veränderung, und bezeichnet man mit P das Potential der beiden Ringe aufeinander, so wird für jedes Zeitelement die von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit dargestellt sein durch den negativen partiellen Zuwachs von P, genommen nach der räumlichen Lage von A.

Das *andere* jener beiden Integralgesetze bezieht sich auf die *elektromotorischen* Kräfte, und kann mit Bezug auf dieselben beiden Stromringe A und B so formulirt werden:

Das elektromotorische Integralgesetz. Die Summe der vom Ringe B im Ringe A während irgend eines Zeitelements hervorgebrachten (inducirten) elektromotorischen Kräfte ist immer identisch mit dem vollständigen Zuwachs des Quotienten $\frac{P}{J_0}$, dieser Zuwachs noch multiplicirt mit einer gewissen Constanten ε (der sogenannten Inductionsconstanten).

In den betreffenden Abhandlungen meines Vaters ist ausser dem elektromotorischen *Integral*gesetz, auch das elektromotorische *Elementar*gesetz in Betracht gezogen worden, aber doch eigentlich immer nur beiläufig, immer nur als ein Durchgangspunkt zur Auffindung des erstern. So sind z. B. in jenen Abhandlungen für *den* Fall, dass die elektromotorische Kraft ihren Grund hat in einer Veränderung der *Stromstärke* des inducirenden Elementes, parallel neben einander zwei ganz verschiedene *Elementar*gesetze hingestellt worden, weil dieselben unter einander äquivalent sind hinsichtlich des *Integral*gesetzes.

Zugleich ist zu bemerken, dass in jenen Abhandlungen nirgends von einem Potential zwischen Strom*elementen*, sondern immer nur von

dem Potential *geschlossener gleichförmiger* Ströme auf einander die Rede ist. Letzteres aber kann *ad libitum* durch die Formel

$$P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds_0 Ds_1$$

oder durch die Formel

$$P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r} Ds_0 Ds_1$$

ausgedrückt werden. Man darf also nicht behaupten, dass die früher (p. 603) eingeführte Constante k bei der Theorie meines Vaters den Werth $+1$ besitze. Vielmehr bleibt ihr Werth bei jener Theorie *vollkommen unbestimmt*. Allerdings ist zuzugeben, dass von den vorstehenden beiden Formeln die erstere, als die *einfachere*, einigermassen bevorzugt wird; hierauf dürfte die Bemerkung von Helmholtz, dass nach jener Theorie $k = +1$ sei, nothwendig zurückzuführen sein.

Ueber die Untersuchungen Weber's.

Ebenso wie mein Vater, ebenso adoptirt auch Weber das von Ampère aufgestellte *ponderomotorische* Elementargesetz. Gestützt auf dieses und auf das Coulomb'sche elektrostatische Gesetz gelingt es ihm emporzusteigen zur Höhe seines *Punktgesetzes*:

$$\frac{\mu_0\mu_1}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

und sodann von dieser Höhe herab den Weg zu finden, welcher hinleitet zur Entdeckung des *elektromotorischen* Elementargesetzes.

Das Aufsteigen in jene Höhe ist insofern nicht ohne Bedenken, als dazu bestimmte Vorstellungen erforderlich sind über die *innere Mechanik* des elektrischen Stromes, so z. B. die Vorstellung, dass durch den Querschnitt eines solchen Stromes während einer gegebenen Zeit immer gleich viel positives und negatives Fluidum in entgegengesetzter Richtung hindurchgeht, ferner die Vorstellung, dass eine auf die elektrische Materie ausgeübte Kraft sich unmittelbar überträgt auf den ponderablen Träger derselben. Derartige Vorstellungen aber müssen, ihrer Natur nach, immer als mehr oder minder *hypothetisch* angesehen werden.

Wenn man gegen das Weber'sche Punktgesetz den Einwand vorgebracht hat, dasselbe stünde in Widerspruch mit dem allgemeinen Axiom der lebendigen Kraft, so hat man, unbewusster Weise, gerade die *allerstärkste* Seite der Festung angegriffen. Denn der Einklang zwischen jenem Gesetze und dem genannten Axiom ist ein so überraschend vollkommener, dass gerade in diesem Einklange jenes Gesetz eine seiner stärksten Stützen hat.

Was andererseits das Hinabsteigen von der Höhe des Punktgesetzes zum elektromotorischen Elementargesetz betrifft, so ist zu beachten, dass die Operationen, durch welche dieses Hinabsteigen bewerkstelligt wird, ihrer Gültigkeit nach an die Voraussetzung gebunden sind, das betrachtete (inducirende) Stromelement gehöre einem *gleichförmigen* Strome an, unzulässig aber erscheinen für den Fall eines *ungleichförmigen* Stromes. Hiedurch erklärt sich der eigenthümliche Umstand, dass, obwohl jenes Punktgesetz selber mit dem allgemeinen Princip der lebendigen Kraft in Einklang steht, dennoch das aus ihm abgeleitete elektromotorische Elementargesetz eines solchen Einklanges *nicht immer*, sondern *nur dann* sich erfreut, wenn das betrachtete Stromelement einem *gleichförmigen* Strome angehört.

Das elektromotorische Elementargesetz, wie Weber es abgeleitet hat, und wie es also nur anwendbar ist auf das Element eines *gleichförmigen* Stromes, giebt für die während eines Zeitelementes dt hervorgebrachte elektromotorische Kraft einen Werth von der Form:

$$\varphi J + \psi dJ,$$

wo J die in dem (inducirenden) Stromelement vorhandene Stromstärke, ferner dJ den Zuwachs von J während der Zeit dt vorstellt, während φ, ψ nur noch abhängig sind von den gegebenen geometrischen Verhältnissen, sowie von den Aenderungen dieser Verhältnisse während der Zeit dt. Versucht man nun aber, das elektromotorische Elementargesetz aus dem Weber'schen Punktgesetz mit derjenigen Genauigkeit abzuleiten, welche für seine Anwendbarkeit auf *ungleichförmige* Ströme erforderlich ist, so verliert das Gesetz jenen einfachen Charakter, indem es aufhört die betreffende Kraft als eine *homogene lineare* Function von J, dJ darzustellen.

Ueber gewisse vom Verfasser angestellte Untersuchungen.

In seinem Aufsatz: „Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper" hat Helmholtz*) Andeutungen gemacht über eine *neue* Theorie. So gut als es mit Hilfe dieser Andeutungen möglich war, habe ich in jene neue Theorie mich hineinzuversetzen gesucht.

Nachdem ich die eigentlichen Prämissen der Theorie erkannt zu haben glaubte, stellte ich mir die Aufgabe, die Theorie selber ihren Hauptumrissen nach für einen möglichst allgemeinen Fall zu construiren, nämlich für ein System von beliebig vielen Conductoren, die in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden. Die Resultate, zu

*) Borchardt's Journal. Bd. 72, pag. 57.

denen ich gelangte, und über welche ich bereits früher*) Mittheilung gemacht habe, erwiesen sich als völlig übereinstimmend mit den Anforderungen des allgemeinen Princips der lebendigen Kraft.

Die Art und Weise aber, in welcher jene Theorie damals von mir construirt worden war, ist, wie ich später bemerkte, nur für *den* Fall correct zu nennen, dass jene Conductoren beschränkt sind auf *fortschreitende* Bewegungen, nicht aber für den Fall von *drehenden* Bewegungen.

Solches bemerkt, gelang es mir leicht, die erforderliche Rectificirung zu bewerkstelligen; alsdann aber waren die Resultate nicht mehr in Einklang mit dem genannten allgemeinen Princip; der Einklang war *nur dadurch* wiederherzustellen, dass die *Prämissen* der Theorie geändert wurden; und zwar nahmen jene Prämissen, nach Ausführung der so gebotenen Abänderung, eine Gestaltung an, in welcher sie folgendermassen lauteten.

Sind $D\mathrm{v}$ *und* $D\mathrm{v}_1$ *die Volumelemente von irgend zwei Körpern A und B, in denen elektrische Vorgänge stattfinden, und ist* $\varpi D\mathrm{v} D\mathrm{v}_1$ *das Potential dieser beiden Stromelemente aufeinander**), so ist die von* $D\mathrm{v}_1$ *auf* $D\mathrm{v}$ *ausgeübte ponderomotorische Wirkung ausgedrückt durch folgende Promoventen und Revolventen:*

$$X = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial x}, \qquad \Delta^{(\xi)} = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial\xi},$$

$$Y = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial y}, \qquad \Delta^{(\eta)} = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial\eta},$$

$$Z = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial z}, \qquad \Delta^{(\zeta)} = -D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1\frac{\partial\varpi}{\partial\zeta}.$$

Hier sind unter x, y, z *die Coordinaten von* $D\mathrm{v}$ *zu verstehen in Bezug auf ein beliebig gewähltes absolut unbewegliches Axensystem. Ferner bezeichnet* X *die auf* $D\mathrm{v}$ *in der Richtung der* x*-Axe ausgeübte Promovente, und* $\frac{\partial\varpi}{\partial x}dx$ *denjenigen Zuwachs, welchen* ϖ *erleiden würde, falls man das Element* $D\mathrm{v}$ *sich selber parallel in der Richtung der* x*-Axe um die Strecke* dx *verschieben wollte. Andererseits bezeichnet* $\Delta^{(\xi)}$ *diejenige auf* $D\mathrm{v}$ *ausgeübte Revolvente, welche eine durch* $D\mathrm{v}$ *parallel zur* x*-Axe gelegte Linie* ξ *zur Axe hat, und* $\frac{\partial\varpi}{\partial\xi}d\xi$ *denjenigen Zuwachs, welchen* ϖ *erleiden würde, falls man das Element* $D\mathrm{v}$ *um diese Linie* ξ

*) Sitzungsberichte der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. vom 20. October 1871, pag. 450.

**) Sind die beiden Volumelemente $D\mathrm{v}$, $D\mathrm{v}_1$ von cylindrischer Gestalt, und Ds, Ds_1 die Längen, q, q_1 die Querschnitte dieser beiden kleinen Cylinder, so wird $\varpi D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1 = \varpi qq_1 DsDs_1$; so dass also in diesem speciellen Fall das Product ϖqq_1 identisch ist mit unserm früheren p (pag. 604).

drehen wollte um einen Winkel von der Grösse $d\xi$. Analog sind die Bedeutungen von Y, Z, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, und von $\Delta^{(\eta)}$, $\Delta^{(\zeta)}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$.

Gleichzeitig sind:

$$\mathfrak{X}\, dt = Dv_1\, d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{u}}\,,$$

$$\mathfrak{Y}\, dt = Dv_1\, d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{v}}\,,$$

$$\mathfrak{Z}\, dt = Dv_1\, d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{w}}$$

die Componenten der von Dv_1 in irgend einem Punkte von Dv während der Zeit dt hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Dabei sind diese Componenten $\mathfrak{X}\,dt$, $\mathfrak{Y}\,dt$, $\mathfrak{Z}\,dt$ bezogen zu denken auf ein mit der ponderablen Masse von Dv starr verbundenes Axensystem; mit Bezug auf eben dieselben Axen repräsentiren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Componenten der augenblicklich in Dv vorhandenen elektrischen Strömung. Endlich sind $d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{u}}$, $d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{v}}$, $d\,\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{w}}$ die vollständigen Zuwüchse von $\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{u}}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{v}}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial \mathfrak{w}}$ während der betrachteten Zeit dt.

Nachdem die Prämissen in diese neue Gestaltung versetzt waren, schien nunmehr Alles in Ordnung, und schien es mir gelungen, die Prämissen der Helmholtz'schen Theorie wirklich erkannt zu haben, Da brachen plötzlich all' diese auf der Annahme eines *elementaren* Potentiales $\varpi\, Dv\, Dv_1$ beruhenden Vorstellungen zusammen unter dem Gewicht einer im Eingange dieser Mittheilung (pag. 607) erwähnten empirischen Thatsache.

Ob jene empirische Thatsache auch in Widerspruch sich befindet mit der eigentlichen Theorie von Helmholtz, wage ich nicht zu beurtheilen. Das Gesagte bezieht sich auf die von mir selber nach den Helmholtz'schen Andeutungen construirte Theorie; und immerhin ist es möglich, dass jene Andeutungen von mir nicht gehörig verstanden worden sind*).

§ 3.

Darlegung der Prämissen und der Resultate einer neuerdings vom Verfasser durchgeführten Untersuchung.

Die beiden *Integral*gesetze meines Vaters zeichnen sich aus durch ihre Einfachheit, namentlich aber durch den, in Folge experimenteller Prüfung, ihnen zu Theil gewordenen hohen Grad von Zuverlässigkeit.

*) Doch scheint aus dem letzten Helmholtz'schen Aufsatz (Borchardt's J., Bd. 75, pag. 60) hervorzugehen, dass die hier von mir construirte Theorie, deren Unhaltbarkeit soeben betont wurde, *allerdings identisch* ist mit der von Helmholtz selber beabsichtigten.

Gleiches kann gesagt werden vom J o u l e'schen Gesetz für die in Folge eines elektrischen Stromes sich entwickelnde *Wärme*. Ohne Bedenken werden daher

(1. α) *die beiden Integralgesetze* (pag. 610),

und ebenso

(1. β) *das J o u l e'sche Gesetz*

als sichere Grundlagen dienen können für die anzustellende Untersuchung.

Als eine fernere Grundlage benutze ich das allgemeine Princip der lebendigen Kraft. Betrachtet man ein System von Körpern, die in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden, und denkt man sich dieses System (durch von Augenblick zu Augenblick erfolgende Wärmeableitungen) in constanter Temperatur erhalten, so findet jenes Princip seinen Ausdruck durch die Formel:

$$dT + dQ = dS - dF;$$

d. h.: Für jedes Zeitelement ist die in dem System sich entwickelnde Quantität von lebendiger Kraft und Wärme ($dT + dQ$) gleich gross mit der während dieses Zeitelements von den einwirkenden *äusseren* Kräften verrichteten Arbeit (dS), hievon noch in Abzug gebracht das *vollständige Differential* einer gewissen, dem Systeme eigenthümlichen Function F, von welcher im Allgemeinen nur bekannt ist, dass sie lediglich abhängen kann vom *augenblicklichen Zustande* des Systems. — Die bei einem solchen System in Betracht kommenden Kräfte sind nach ihrer *Entstehungs*weise einzutheilen in ordinäre, elektrostatische und elektrodynamische; wobei als ordinäre Kräfte alle diejenigen bezeichnet sein sollen, welche den ponderablen Massen inhärent sind, ferner als elektrostatische alle diejenigen (theils ponderomotorischen, theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von den elektrischen *Ladungen*, endlich als elektrodynamische alle diejenigen (wiederum theils ponderomotorischen, theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von den elektrischen *Strömungen*. Diesen drei Gattungen von Kräften entsprechend, kann die linke Seite der vorstehenden Formel in drei Theile zerlegt werden, in einen Theil ordinären Ursprungs, einen zweiten elektrostatischen, und einen dritten elektrodynamischen Ursprungs; so dass jene Formel die Gestalt annimmt:

$$(dT + dQ)_{ord.Us} + (dT + dQ)_{elst.Us} + (dT + dQ)_{eldy.Us} = dS - dF.$$

Hält man an der gewöhnlichen Vorstellung fest, dass die ordinären Kräfte nur von den Entfernungen abhängen, legt man ferner in Betreff der elektrostatischen Kräfte die üblichen Annahmen zu Grunde,

und setzt man endlich voraus, dass die auf das System einwirkenden *äusseren* Kräfte (deren Arbeit mit dS bezeichnet ist) nur aus *ordinären* Kräften bestehen, so findet man ohne sonderliche Mühe, dass von den Ausdrücken

$$(dT + dQ)_{ord. Us} - dS$$

und

$$(dT + dQ)_{elst. Us}$$

jeder für sich *allein* betrachtet ein vollständiges Differential ist. Somit folgt aus jener Formel, dass der Ausdruck

$$(dT + dQ)_{eldy. Us}$$

ebenfalls, schon für sich *allein* betrachtet, ein vollständiges Differential sein muss. — In solcher Weise sind wir zu derjenigen Fassung gelangt, in welcher das in Rede stehende allgemeine Princip für *unsere* Zwecke, nämlich für eine nähere Untersuchung der *elektrodynamischen* Kräfte am besten verwendbar ist. In dieser Fassung wird jenes Princip so auszusprechen sein:

(1. γ) *Das Princip der lebendigen Kraft.* — Bewegt sich ein System von Körpern, in denen elektrische Vorgänge stattfinden, unter dem Einfluss seiner inneren Kräfte und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebig gegebener *ordinärer* äusserer Kräfte, und denkt man sich das System (durch von Augenblick zu Augenblick erfolgende Wärmeentziehungen) in constanter Temperatur erhalten, so muss *derjenige* Theil der während irgend eines Zeitelementes dt sich entwickelnden Quantität von lebendiger Kraft und Wärme, welcher herrührt von den *elektrodynamischen* Kräften, die Form

$$-df$$

besitzen, nämlich das *vollständige Differential* einer Function $(-f)$ sein, welche lediglich abhängen kann vom *augenblicklichen Zustande* des Systems.

Dabei ist von Neuem*) zu betonen, dass hier (abweichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch) unter den *elektrodynamischen* Kräften *sämmtliche* Kräfte zu verstehen sind, welche in Folge *elektrischer Strömungen* zu Tage treten, nicht nur die ponderomotorischen (von Ampère untersuchten), sondern auch die elektromotorischen (von Faraday entdeckten).

Der Satz (1. γ) ist jedenfalls bedenklicher als die Sätze (1. α, β), und zwar aus doppeltem Grunde. Erstens, weil bei Ableitung desselben Gebrauch gemacht wurde von unseren Kenntnissen über die *elektrostatischen* Kräfte, diese Kenntnisse aber sehr zweifelhafter Natur sein

*) Vgl. pag. 602.

dürften. Zweitens, weil immerhin die Möglichkeit denkbar ist, dass in dem betrachteten System neben lebendiger Kraft und Wärme gleichzeitig noch irgend ein bis jetzt unbekanntes drittes Agens sich entwickelt; dann aber würde neben dT und dQ noch ein diesem dritten Agens zugehöriger Term in Betracht kommen, und in die Formeln aufzunehmen sein.

Es fragt sich nun, ob die Prämissen (1. α, β, γ), etwa in Verbindung mit dem bekannten Princip der Action und Reaction, bereits die hinreichenden Mittel repräsentiren zur Feststellung der den elektrodynamischen Kräften entsprechenden *Elementar*gesetze, des ponderomotorischen und des elektromotorischen. In der That glaube ich, dass diese Mittel für den genannten Zweck einigermassen ausreichend sein *würden*, falls man diejenigen Anforderungen, welche das Princip der lebendigen Kraft (1. γ) an beide Elementargesetze *zusammengenommen* stellt, zu repartiren im Stande wäre auf die *einzelnen* Gesetze. Solches aber scheint mir vorläufig nicht gut möglich zu sein. — Somit sehe ich mich gezwungen, einen *andern*, wenn auch allerdings vielleicht nur provisorischen Weg einzuschlagen.

Ebenso wie mein Vater und ebenso wie Weber gehe ich nämlich von der Voraussetzung aus, dass

(1. δ) *das Ampère'sche ponderomotorische Elementargesetz*

das wirklich *richtige* sei, und suche von diesem Gesetze aus eine Bahn mir zu eröffnen zur Entdeckung des *zweiten*, des bisher noch völlig im Dunkeln schwebenden *elektromotorischen* Elementargesetzes.

Ebenso wie Weber suche ich also einen Weg zu finden von dem als bekannt vorausgesetzten *einen* Elementargesetze zu dem noch unbekannten *andern* Elementargesetze hin; ein solcher Uebergang kann ohne Hinzunahme irgend welcher Hypothesen schlechterdings nicht bewerkstelligt werden. Bei der Wahl dieser Hypothesen trennen sich die Wege. Während nämlich die von Weber gewählten Hypothesen auf die *innere Mechanik* des elektrischen Stromes sich beziehen, sind die von mir benutzten Hypothesen völlig *anderer* Art; sie dürften sich einigermassen empfehlen durch ihre Einfachheit, ferner durch ihre Analogie mit den drei ersten Hypothesen Ampère's, endlich vielleicht auch durch den Umstand, dass sie von vielen Physikern (wenn auch nur stillschweigend) bereits anerkannt zu sein scheinen.

Nehmen wir an, die inducirende Ursache sei repräsentirt durch das Element Ds eines Drahtes, der durchflossen ist von irgend einem gleichförmigen oder ungleichförmigen elektrischen Strom J, und das inducirte Object sei repräsentirt durch irgend einen ponderablen Körper von beliebiger Gestalt und Grösse; jene von mir eingeführten Hypothesen sind alsdann folgende:

(2. α) *Erste Hypothese.* Die elektromotorische Kraft, welche in irgend einem Punkt des gegebenen Körpers während der Zeit dt von jenem Stromelement Ds hervorgebracht wird, ist proportional der Länge Ds des Elementes, sonst aber nur noch abhängig von seiner Stromstärke, von seiner relativen Lage (zum gegebenen Körper), und von denjenigen Aenderungen, welche Stromstärke und relative Lage erleiden während der Zeit dt. Sie ist Null, falls solche Aenderungen nicht stattfinden.

(2. β) *Zweite Hypothese.* Sie ist zerlegbar in zwei Kräfte, von denen die eine proportional mit J, die andere proportional mit dJ ist. Mit andern Worten: Ihre rechtwinkligen Componenten sind homogene lineare Functionen von J und dJ. Dabei ist unter dJ derjenige Zuwachs zu verstehen, den die im Elemente Ds vorhandene Stromstärke J annimmt während der gegebenen Zeit dt.

(2. γ) *Dritte Hypothese.* Denkt man sich das Stromelement JDs zerlegt in drei rechtwinklige Componenten JDx, JDy, JDz, welche mit dem Elemente starr verbunden an seiner Bewegung Theil nehmen, so ist die elektromotorische Wirkung von JDs identisch mit der elektromotorischen Gesammtwirkung von JDx, JDy, JDz, vorausgesetzt, dass nicht nur J sondern auch die *Aenderung* von J für alle vier Elemente dieselbe ist.

Man bemerkt, dass diese drei Hypothesen (2. α, β, γ) in der That in vollkommener Analogie stehen mit den drei ersten Hypothesen Ampère's für die ponderomotorischen Kräfte [vergl. (α, β, γ) auf pag. 608 u. 609].

Von den Prämissen (1. α, β, γ, δ) und (2. α, β, γ) aus, ergeben sich nun, unter Anwendung des allgemeinen Princips der lebendigen Kraft, für das gesuchte Elementargesetz der elektromotorischen Kräfte gewisse Formeln von ziemlich complicirtem Charakter, die überdiess noch behaftet sind mit mehreren unbekannten Functionen der Entfernung.

Eine bedeutende Vereinfachung dieser Formeln stellt sich ein, sobald man noch zwei weitere Hypothesen hinzufügt, die den schon genannten allerdings in hohem Grade ähnlich sind, dennoch aber, falls man streng verfahren will, einer besonderen Nennung bedürfen. Es beziehen sich diese noch hinzuzufügenden Hypothesen auf den Fall, dass das inducirende Stromelement nicht mehr einem Drahte, sondern einem Körper von drei Dimensionen angehört. Denken wir uns als inducirende Ursache einen ponderablen Körper von beliebiger Gestalt und Grösse, in dessem Innern irgend welche elektrische Strömungen stattfinden, so lauten jene Hypothesen folgendermassen:

(2. δ) *Vierte Hypothese.* Ist $D\nu$ irgend ein Volumelement des inducirenden Körpers, und wird die in $D\nu$ vorhandene elektrische Strömung in Componenten zerlegt gedacht nach drei auf einander senkrechten mit der ponderablen Masse des Körpers starr verbundenen Axen, so soll angenommen werden, dass die elektromotorische Wirkung jener in $D\nu$ vorhandenen Strömung immer identisch ist mit der elektromotorischen Gesammtwirkung der genannten drei Componenten.

(2. ε) *Fünfte Hypothese.* Ist $D\nu$ ein unendlich kleines *genau kugelförmiges* Volumelement des inducirenden Körpers, und befindet sich der Mittelpunkt von $D\nu$ in starrer Verbindung mit irgend einem andern Körper A, während gleichzeitig jener inducirende Körper um diesen Mittelpunkt in beliebiger Drehung begriffen ist, so soll angenommen werden, dass die von $D\nu$ in irgend einem Punkte von A hervorgebrachte elektromotorische Kraft immer *Null* ist, falls nur die in $D\nu$ vorhandene elektrische Strömung, *beurtheilt mit Bezug auf A*, ihrer Richtung und Stärke nach *constant* bleibt.

Die Benutzung aller dieser Prämissen (1. α, β, γ, δ) und (2. α, β, γ, δ, ε) führt nun schliesslich, und zwar mit mathematischer Nothwendigkeit, zu folgendem Resultat:

Sind zwei Körper A und B in beliebigen Bewegungen begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Strömungen stattfinden, und bezeichnet m_0 einen Punkt des Körpers A, ferner $D\nu$ ein Volumelement von B, so wird die von $D\nu$ während der Zeit dt im Punkte m_0 hervorgebrachte elektromotorische Kraft im Allgemeinen immer zusammengesetzt sein aus zwei Kräften. Die eine derselben fällt in die Richtung der gegenseitigen Entfernung r, und besitzt die Stärke:

$$-A^2 D\nu \frac{d(rj)}{r^2},$$

wo j die Componente der in $D\nu$ vorhandenen elektrischen Strömung i bezeichnet, genommen nach r, und zwar nach derjenigen Richtung von r, in welcher die Kraft gerechnet ist. Die andere ist parallel mit der Strömung i, und besitzt, in der Richtung von i gerechnet, die Stärke:

$$+A^2 D\nu \frac{i\,dr}{r^2}.$$

Dabei sind durch die Charakteristik d diejenigen Aenderungen angedeutet, welche stattfinden während der betrachteten Zeit dt. Ausserdem ist A^2 eine Constante, und zwar identisch mit der schon früher benutzten Constanten, welche z. B. sich vorfindet auf pag. 603 in der Formel (1).

Sind also in Bezug auf ein *beliebiges* rechtwinkliges Axensystem (welches seinerseits ebenfalls in irgend welcher Bewegung begriffen

sein darf) x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von m_0, ferner x, y, z diejenigen von Dv, endlich u, v, w die Componenten der in Dv vorhandenen elektrischen Strömung i, und setzt man zur Abkürzung

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2},$$
$$\alpha = \frac{x_0 - x}{r}, \quad \beta = \frac{y_0 - y}{r}, \quad \gamma = \frac{z_0 - z}{r},$$

so werden die Componenten Xdt, Ydt, Zdt der vom Elemente Dv während der Zeit dt im Punkte m_0 hervorgebrachten elektromotorischen Kraft die Werthe besitzen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} Xdt &= A^2 Dv \left(u \frac{dr}{r^2} - \alpha \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right), \\ Ydt &= A^2 Dv \left(v \frac{dr}{r^2} - \beta \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right), \\ Zdt &= A^2 Dv \left(w \frac{dr}{r^2} - \gamma \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Sind der inducirende und der inducirte Körper dargestellt durch *ein und denselben* Körper, so sind r, α, β, γ unveränderlich; sodass die Formeln (3) alsdann die einfachere Gestalt annehmen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} Xdt &= - A^2 Dv \frac{\alpha(\alpha du + \beta dv + \gamma dw)}{r}, \\ Ydt &= - A^2 Dv \frac{\beta(\alpha du + \beta dv + \gamma dw)}{r}, \\ Zdt &= - A^2 Dv \frac{\gamma(\alpha du + \beta dv + \gamma dw)}{r}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke befinden sich in voller Uebereinstimmung mit denen, welche für den genannten speciellen Fall von Weber und Kirchhoff*) gegeben sind; mit den von Helmholtz aufgestellten Ausdrücken

*) Es bilden die in diesem Aufsatz gegebenen Expositionen, wie schon früher (Note, pag. 603) bemerkt wurde, nur einen kurzen Auszug aus einer höchst mühsamen und umfangreichen Untersuchung. Bei dieser Untersuchung ist von mir durchweg festgehalten worden an der *schon vor vierzehn Jahren* von mir eingeführten Hypothese, dass die elektrischen Kräfte, ebenso wie die ordinären Kräfte, proportional sind mit einer Function der Entfernung r, welche nur für *beträchtliche* Entfernungen identisch mit $\frac{1}{r^2}$, für *sehr kleine* Entfernungen hingegen von anderer und noch unbekannter Beschaffenheit ist.

Bei dem Auszuge aber, den diese Blätter darbieten, habe ich, um einen vorläufigen Ueberblick meiner Untersuchung möglichst zu erleichtern, nur den Fall *beträchtlicher* Entfernungen ins Auge gefasst.

In Wirklichkeit leitet daher z. B. meine Untersuchung nicht zu den Kirchhoff'schen Formeln (4), sondern zu etwas *andern* Formeln, welche in jene Kirchhoff'schen nur dann übergehen, wenn die Entfernung r von *beträchtlichem* Werthe ist, und welche somit ausser Tragweite sein dürften gegenüber dem von Helmholtz gegen jene Kirchhoff'schen Formeln erhobenem Einwande (Borchardt's J., Bd. 72, pag. 61).

treten sie also nur dann in Uebereinstimmung, wenn die von Helmholtz eingeführte Constante k gleich -1 gemacht wird.

Was die Prämisse (1. α) betrifft, so sei nachträglich bemerkt, dass das von meinem Vater aufgestellte elektromotorische Integralgesetz bei Ableitung der Formeln (3) nicht in seiner ganzen Allgemeinheit sondern nur in so weit benutzt zu werden braucht, als es sich auf Stromringe *ohne* Gleitstellen bezieht. Demgemäss muss es fraglich erscheinen, ob diese Formeln (3), angewendet auf zwei Stromringe, deren jeder mit beliebig vielen Gleitstellen behaftet ist, mit jenem Integralgesetze noch in Einklang sich befinden. Die betreffende specielle Untersuchung aber zeigt, dass dieser Einklang in der That vorhanden ist.

Von Interesse dürfte es noch sein, den Werth anzugeben, der auf Grund meiner Untersuchungen sich herausstellt für die im Princip der lebendigen Kraft (1. γ) enthaltene Function f. Man findet:

Sind Dv_0, Dv_1 irgend zwei Volumelemente des betrachteten Systems von Körpern, und i_0, i_1 die augenblicklich in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungen, so wird der diesen beiden Elementen entsprechende Theil von f dargestellt sein durch

$$A^2 Dv_0 Dv_1 \frac{i_0 i_1 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r}, \tag{5}$$

wo r die Entfernung zwischen Dv_0, Dv_1 bezeichnet, und ϑ_0, ϑ_1 diejenigen Winkel sein sollen, unter denen i_0, i_1 geneigt sind gegen die Linie r, letztere gerechnet von Dv_1 nach Dv_0. Dabei ist A^2 dieselbe Constante, wie früher (pag. 603).

Es mag schliesslich das von mir eruirte allgemeine elektromotorische Elementargesetz (3) in Anwendung gebracht werden auf den speciellen Fall *linearer* Leiter. Um das Resultat, zu welchem man alsdann gelangt, bequem darlegen zu können, sei zunächst bemerkt, dass die *ponderomotorische* Kraft R, welche zwei Stromelemente $J_0 Ds_0$ und $J_1 Ds_1$ auf einander ausüben*), nach dem Ampère'schen Gesetz den Werth besitzt:

$$R = J_0 Ds_0 \,.\, J_1 Ds_1 \,.\, A^2 \frac{3\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}, \tag{6. a}$$

wofür kürzer geschrieben werden mag:

$$R = J_0 Ds_0 \,.\, J_1 Ds_1 \,.\, \mathsf{P}; \tag{6. b}$$

dabei sind A^2 und ϑ_0, ϑ_1, ε wiederum in genau derselben Bedeutung gebraucht wie früher (pag. 603).

---

*) Ueberall sind von mir die elektrischen *Ströme* mit dem grossen Buchstaben J, hingegen die sogenannten elektrischen *Strömungen* (oder Stromdichtigkeiten, wie Kirchhoff sie nennt) mit dem kleinen Buchstaben i (oder auch j) bezeichnet worden.

Solches vorangeschickt, kann nun, unter Anwendung des Ausdruckes P, jenes mitzutheilende Resultat in folgender Weise ausgesprochen werden.

Befinden sich zwei Drahtelemente Ds_0 und Ds_1, die von den elektrischen Strömen J_0 und J_1 durchflossen sind, in irgend welcher Bewegung, und jene Ströme selber in irgend welchem Zustande der Veränderung, so wird diejenige elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}\,dt$, welche das Element Ds_1 während der Zeit dt in irgend einem Punkte von Ds_0, und zwar in der Richtung von Ds_0 hervorbringt, den Werth besitzen:

$$(7)\qquad \mathfrak{E}\,dt = -J_1 Ds_1 \,.\, \mathsf{P}\,dr - (dJ_1)\,Ds_1 A^2 \frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r} + J_1 Ds_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{A^2}{r}\frac{\partial r}{\partial s_0}\frac{\partial r}{\partial t}\right) dt,$$

wo dJ_1 und dr die während der Zeit dt erfolgten Veränderungen von J_1 und r vorstellen.

Stets bin ich der Ueberzeugung gewesen, dass durch ein Disputiren über wissenschaftliche Fragen das persönliche Verhältniss der Betreffenden nicht im Mindesten geschädigt, sondern im Gegentheil nur enger befestigt werden könne, dass ein Jeder, dem die Förderung der Wissenschaft wirklich am Herzen liegt, sich immer nur *freuen* werde, wenn er seine eigenen Arbeiten von einem Andern sorgfältig erörtert, vielleicht auch in einzelnen Punkten verbessert sieht. Dieser Ueberzeugung entsprechend habe ich in dem vorliegenden Aufsatz (pag. 611) keinen Anstand genommen, gewisse Bedenken vorzubringen in Betreff der Weber'schen Theorie; und derselben Ueberzeugung entsprechend werde ich gegenwärtig auf gewisse Erörterungen eingehen in Betreff der Schriften *meines Vaters**).

*) Sollte später sich etwa herausstellen, dass meine Erörterungen oder angeblichen Verbesserungen auf Irrthum beruhen, so werde ich selbstverständlich mich für verpflichtet halten, mein Unrecht öffentlich und so schnell wie möglich anzuerkennen.

Einer derartigen Verpflichtung habe ich in nächster Zeit zu entsprechen in Bezug auf gewisse von Helmholtz angestellte Untersuchungen. Im vergangenen Jahre (Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 20. October 1871) machte ich nämlich darauf aufmerksam, dass nach meiner Ansicht einzelne Stellen der bekannten Helmholtz'schen Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin, 1847) gewisser Abänderungen bedürftig wären. In seinem letzten Aufsatz hat nun aber Helmholtz betont, (Borchardt's Journal, Bd. 75), dass jene von mir als nothwendig bezeichneten Abänderungen im Wesentlichen schon von ihm *selber* bewerkstelligt worden seien, und zwar schon vor langer Zeit, in zwei mir bis jetzt unbekannt gebliebenen Abhandlungen aus den Jahren 1851 und 1854. Ich werde wie gesagt, der hier für mich erwachsenden Verpflichtung sobald wie möglich nachkommen; nur ist dazu erforderlich, dass ich jene Abhandlungen von 1851 und 1854 zuvor erst kennen lerne, was mir bei meinem augenblicklichen Aufenthaltsort (Brixlegg in Tyrol) bisher nicht möglich war.

In jenem letzten Helmholtz'schen Aufsatz (Borchardt's Journal, Bd. 75) wird

Blicken wir zurück auf die Formel (7), so zeigt sich, dass dieselbe verschieden ist von dem von meinem Vater aufgestellten Elementargesetz, dass nämlich Uebereinstimmung *nur dann* vorhanden sein würde, wenn in jener Formel (7) das Glied zweiter Zeile *fehlte*. Bei der weiteren Discussion mögen nun zwei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall. Der Inducent (J_1, s_1) *ist ein geschlossener Ring ohne Gleitstellen.*

Alsdann *verschwindet* in (7) das Glied zweiter Zeile, sobald man die *Summe* der von dem ganzen Inducenten während der Zeit dt in Ds_0 hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte berechnet; so dass also ein und dasselbe Integralgesetz, nämlich das auf pag. 610 ausgesprochene, sich ergeben wird, völlig einerlei, ob man ausgeht von *meines Vaters* Elementargesetz, oder von *meinem eigenem* Elementargesetze (7).

Zweiter Fall. Der Inducent (J_1, s_1) *ist ein in sich zurücklaufender Strom, welcher aber mit (beliebig vielen) Gleitstellen behaftet ist.*

Soll wiederum die *Summe* derjenigen elektromotorischen Kräfte berechnet werden, welche dieser Inducent während der Zeit dt im Elemente Ds_0 hervorbringt, so sind nach meiner Ansicht zu berücksichtigen sowohl diejenigen Elemente Ds_1, welche *zu Anfang* der Zeit dt bereits im Inducenten enthalten sind, als auch zweitens diejenigen Elemente Δs_1, welche erst *während* der Zeit dt in den Inducenten eintreten (respective aus ihm ausscheiden); die Elemente Ds_1 sind zu berücksichtigen insofern, als ihre *relative Lage* gegen Ds_0 während der Zeit dt sich ändert, und auch insofern als in ihnen während dieser Zeit die Stromstärke anwächst von J_1 auf $J_1 + dJ_1$; andererseits sind die Elemente Δs_1 insofern zu berücksichtigen, als in ihnen die Stromstärke einen plötzlichen endlichen Zuwachs von 0 auf J_1 (respective von J_1 auf 0) erfährt. Mein Vater hat in seiner Abhandlung*) den elektromotorischen Einfluss, welchen die Elemente Δs_1, in Folge der eben genannten plötzlichen Stromänderung, ausüben, nicht berücksichtigt; und solches scheint mir unzulässig.

übrigens bemerkt, dass meine schon genannten elektrodynamischen Untersuchungen vom vergangenen Jahre (Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 20. October 1871) behaftet seien mit einem gewissen mathematischen Fehler, ferner behaftet seien mit einer gewissen unmotivirten Behauptung (betreffend die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen), und endlich auch behaftet seien mit einer nur zu polemischen Zwecken ersonnenen Neuerung. Ich hoffe zeigen zu können, dass ein mathematischer Fehler nicht vorhanden ist, ferner dass jene angeblich unmotivirte Behauptung auf sorgfältiger Ueberlegung beruht, endlich dass jene angebliche Neuerung vom Jahre 1858 datirt; und werde mit der betreffenden Publication mich ebenfalls so sehr als möglich zu beeilen suchen.

*) F. Neumann über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme, Abhandlungen der Berl. Ak., vorgelesen am 9. August 1847. Vergl. daselbst die ersten Seiten des § 2.

Nimmt man hierauf Rücksicht, so zeigt sich, dass man zu dem von meinem Vater aufgestellten, und durch sorgfältige Experimente constatirten Integralgesetz (pag. 610) nicht mehr hingelangt, sobald man ausgeht von *meines Vaters* Elementargesetz, wohl aber, wenn man ausgeht von *meinem eigenem* Elementargesetz (7). Demgemäss glaube ich jene von meinem Vater angestellten experimentellen Untersuchungen in Anspruch nehmen zu dürfen, zu Gunsten dieses von *mir* aufgestellten Elementargesetzes (7).

Die Formeln (3) geben eine elektromotorische Kraft, welche im Allgemeinen *nicht* zusammenfällt mit der Linie der Entfernung. Sollte man hieran Anstoss nehmen, oder sollten irgend welche bestimmten Gründe (vorläufig sehe ich solche nicht) sich angeben lassen, denen zufolge die Richtung dieser Kraft nothwendig mit der Entfernung zusammenfallen muss, so würde Nichts übrig bleiben, als eine Aenderung eintreten zu lassen in den benutzten Prämissen (1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), (2. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$). Und zwar würde ich in diesem Falle am geneigtesten sein die Prämisse (1. δ), d. i. das Ampère'sche Gesetz fallen zu lassen. Die Aufgabe würde alsdann darin bestehen, an Stelle dieses Gesetzes ein anderes zu suchen, von solcher Beschaffenheit, dass jener Anforderung des Zusammenfallens der elektromotorischen Kraft mit der Linie der Entfernung entsprochen wird.

Wie dem auch sei, jedenfalls dürften die in diesem § angedeuteten Untersuchungen aufzufassen sein als ein Versuch zu einer *möglichst directen* Weiterentwicklung der theils von Ampère theils von meinem Vater aufgestellten Principien.

Brixlegg in Tyrol, 10. October 1872.

On a theorem in Covariants.

By A. Cayley, Cambridge.

The proof given in Clebsch „Theorie der binären algebraischen Formen" (Leipzic 1872) of the finite number of the covariants of a binary form depends upon a subsidiary proposition which is deserving of attention for its own sake.

I use my own hyperdeterminant notation, which is as follows: Considering a function $U = (a, ..)(x, y)^n$ (viz. $U_1 = (a, ..)(x_1, y_1)^n$ &c.) and writing $12 = \partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{y_1}\partial_{x_2}$ &c., then the general form of a covariant of the degree m is

$$k\,(\overline{12}^\alpha\,\overline{13}^\beta\,\overline{23}^\gamma\ldots)\,U_1 U_2 \ldots U_m$$

where k is a merely numerical factor, the indices α, β, γ, .. are positive integers, and after the differentiations each set of variables (x_1, y_1), .. (x_m, y_m) is replaced by (x, y). I say that the general form of a covariant is as above; viz. a covariant is equal to a single term of the above form, or a sum of such terms.

Attending to a single term: the sum of the indices of all the duads which contain a particular number 1, 2, .. as the case may be is called an index-sum; each index-sum is at most $= n$; so that calling the index-sums $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_m$ respectively we have $n - \sigma_1$, $n - \sigma_2 \ldots n - \sigma_m$ each of them zero or positive: the term, before the several sets of variables are each replaced by (x, y), is of the orders $n - \sigma_1$, $n - \sigma_2 \ldots n - \sigma_m$ in the several sets of variables resp.

The term may be expressed somewhat differently: for writing $\nabla_1 = x\partial_{x_1} + y\partial_{y_1}$, $\nabla_2 = x\partial_{x_2} + y\partial_{y_2}$ &c. — then (except as to a numerical factor) it is for a function (*) $(x_1, y_1)^p$ the same thing whether we change (x_1, y_1) into (x, y), or operate on this function with $\nabla_1{}^p$, and so for the other sets:

the term may therefore be written

$$\nabla_1{}^{n-\sigma_1} \ldots \nabla_m^{n-\sigma_m}\, k\,(\overline{12}^\alpha\,\overline{13}^\beta\,\overline{23}^\gamma\ldots)\,U_1 U_2 \ldots U_m$$

being now in the first instance a function of the single set (x, y) of variables.

We may omit the operand $U_1 U_2 \ldots U_m$, and consider only the symbol

$$k\,(12^\alpha\, 13^\beta\, 23^\gamma \ldots) \quad \text{or} \quad \nabla_1{}^{n-\sigma_1} \ldots \nabla_m{}^{n-\sigma_m}\, k\,(12^\alpha\, 13^\beta\, 23^\gamma \ldots)$$

which, under either of the two forms, I represent for shortness by $[12 \ldots m]$: observe that this is considered as a symbol involving the m symbolic numbers $1, 2, 3 \ldots m$, even altho' in particular cases one or more of these numbers may be wanting from the actual expression of the symbol: thus $[123]$ may denote 12^α, but the operand to be supplied thereto is always $U_1 U_2 U_3$.

A sum of symbols is not in general equal to a single symbol: but a single symbol can be expressed in a variety of ways as a sum of symbols: the most simple transformation-formulae relate to three or four symbolic numbers; viz. for three such numbers, say 1, 2, 3, we have

$$\nabla_1 . 23 + \nabla_2 . 31 + \nabla_3 . 12 = 0$$

showing that in a symbol which written with the ∇'s involves $\nabla_1 . 23$, this may be replaced by its value $\nabla_2 . 13 - \nabla_3 . 12$; and so in other cases.

For the four numbers 1, 2, 3, 4 we have a group of the like formulae

$$\begin{array}{rrrrl} . & -\nabla_2 . 34 & +\nabla_3 . 24 & -\nabla_4 . 23 & = 0, \\ \nabla_1 . 34 & . & -\nabla_3 . 14 & -\nabla_4 . 31 & = 0, \\ -\nabla_1 . 24 & +\nabla_2 . 14 & . & -\nabla_4 . 12 & = 0, \\ \nabla_1 . 23 & +\nabla_2 . 23 & +\nabla_3 . 31 & . & = 0, \end{array}$$

leading to

$$23 . 14 + 31 . 24 + 12 . 34 = 0,$$

which is a form not involving the ∇'s and consequently applicable to the transformation of invariant-symbols where the

$$n - \sigma_1,\; n - \sigma_2, \ldots n - \sigma_m$$

are all $= 0$.

I establish the following definitions:

A symbol $[12 \ldots m]$ is *proximate* when each index-sum is $< n$; otherwise it is *ultimate*; viz. this is the case when any one or more of the index-sums is or are $= n$. We may say that the Symbol is ultimate as to 1 if $\sigma_1 = n$; and that it is ultimate as to 1, 2 if σ_1 and σ_2 are each $= n$: and so in other cases.

A proximate symbol which has any one index-sum thereof $< \frac{1}{2} n$ is said to be *inferior*: thus if $\sigma_1 < \frac{1}{2} n$ the symbol is inferior in regard to 1; and so if σ_1 and σ_2 are each $< \frac{1}{2} n$, it is inferior in regard to 1 and 2: and the like in other cases.

Observe that if a symbol is inferior then in the covariant the order exceeds the degree by a number which is greater than $\frac{1}{2}n - 1$: in fact suppose it inferior in regard to 1, then the order is

$$(n - \sigma_1) + (n - \sigma_2) \cdot \cdot + (n - \sigma_m)$$

where each term after the first is at least $= 1$, that is the order is at least $\mathrel{\overline{=}} n - \sigma_1 + m - 1$; hence order — degree is at least $= n - \sigma_1 + 1$; viz. σ_1 being less than $\frac{1}{2}n$ this is greater than $\frac{1}{2}n - 1$.

Conversely, if for any symbol order-degree is $> \frac{1}{2}n - 1$, than the symbol is not inferior.

A symbol $[12 \ldots m]$ is *sharp* when any index is $\geqq \frac{1}{2}n$; otherwise it is *flat;* viz. this is so when each index is $< \frac{1}{2}n$. The symbol is sharp as to any particular dual or duads when the index or indices thereof is or are each of them $> \frac{1}{2}n$.

The subsidiary theorem is now as follows: „A symbol is inferior or sharp: or it can be expressed as a sum of symbols each of which is inferior or sharp" — or what is the same thing, the only symbols which need to be considered are those which are inferior or sharp.

Thus for the degree 1 the symbol is [1] (which is simply unity) $\sigma_1 = 0$, and the symbol is inferior.

For the degree 2 the symbol is [2], $= 12^k$; if $k < \frac{1}{2}n$ the symbol is inferior, if $k > \frac{1}{2}n$ then it is sharp.

A proof is first required for the degree 3, here $[123] = \overline{12}^\alpha\, \overline{13}^\beta\, \overline{23}^\gamma$ ($\beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta$ each $=$ or $< n$) which may very well be neither inferior or sharp; for instance $n = 5$, we have $\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2$, where each index being $= 2$, the symbol is not sharp; and each index-sum being $= 4$ the symbol is not inferior. But writing the symbol in the form $\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3\ \overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2$ then by means of the relation

$$\nabla_1 . 23 + \nabla_2 . 31 + \nabla_3 . 12 = 0$$

(or what is the same thing, $\nabla_1 . 23 = \nabla_2 . 13 - \nabla_3 . 12$) the symbol becomes

$$\nabla_2 \nabla_3\ \overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2\ (\nabla_2 . 13 - \nabla_3 . 12),$$
$$= \nabla_2^2 \nabla_3\ \overline{12}^2\ \overline{13}^3\ 23 - \nabla_2 \nabla_3^2\ \overline{13}^3\ \overline{12}^2\ \overline{23}$$

where each term, as containing an index 3, is sharp. To complete the reduction, observe that calling the expression $\mathsf{A} - \mathsf{B}$, then in the term A interchanging the numbers 2 and 3 we obtain $\mathsf{A} = -\mathsf{B}$, and thence $\mathsf{A} - \mathsf{B} = 2\mathsf{A}$; so that the whole is $2\,\nabla_2^2 \nabla_3\ 12^2\ 13^3\ \overline{23}$ viz. it is a multiple of $\overline{12}^2\ \overline{13}^3\ \overline{23}$.

I prove the general case, substantially in the manner used by Dr. Clebsch, as follows. We assume that the theorem is proved up to a particular degree m: that is we assume that every symbol belonging

to a degree not exceeding m can be expressed as a sum of terms each of which is sharp or inferior: and we have to prove this for the next following degree $m+1$; or writing for convenience p in place of $m+1$, say for the degree p; that is for a symbol

$$[12\ldots mp],\ =\overline{p1}^{\lambda_1}\,\overline{p2}^{\lambda_2}\ldots\overline{pm}^{\lambda_m}[12\ldots m]$$
$$=P[12\ldots m] \text{ suppose.}$$

I write as before $\sigma_1, \sigma_2\ldots\sigma_m$ for the index-sums of $[12\ldots m]$: those of $[12\ldots mp]$ are therefore $\sigma_1+\lambda_1, \sigma_2+\lambda_2\ldots\sigma_m+\lambda_m$, and (for the duads involving p) $\sigma_p=\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_m$.

If $[12\ldots m]$ is sharp, then $[12\ldots mp]$ is sharp, and the theorem is true.

If $\sigma_p<\frac{1}{2}n$, then $[12\ldots mp]$ is inferior in regard to p; and the theorem is true.

The only case requiring a proof is when $[12\ldots m]$ is not sharp (being therefore inferior) and when σ_p is $>\frac{1}{2}n$. And in this case if any one of the indices $\lambda_1,\ldots\lambda_m$ is $>\frac{1}{2}n$ (or say if P is sharp) then the theorem is true.

Consider the expression

$$\overline{p1}^{\lambda_1}\,\overline{p2}^{\lambda_2}\ldots\overline{pm}^{\lambda_m}[12\ldots m]$$

where $\sigma_1, \sigma_2\ldots\sigma_m$ are as before the index-sums for $[12\ldots m]$ and therefore $n-\sigma_1-\lambda_1,\ldots n-\sigma_m-\lambda_m$ are none of them negative.

Assume that when $[12\ldots m]$ is inferior, and when $\lambda_1\ldots\lambda_m$ have any values such that their sum is not greater than a given value σ_p-1 the expression is a sum of terms each of which is inferior or sharp: we wish to show that when $\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_m$ has the next succeeding value, $=\sigma_p$, the case is still the same.

For this purpose, introducing the ∇'s I write

$$Q=\nabla_1^{n-\sigma_1-\lambda_1}\ldots\nabla_m^{n-\sigma_m-\lambda_m}\nabla_p^{n-\sigma_p}\,\overline{p1}^{\lambda_1}\,\overline{p2}^{\lambda_2}\ldots\overline{pm}^{\lambda_m}[12\ldots m];$$

then supposing for a moment that λ_1 is not $=n-\sigma_1$ and λ_2 not $=0$ the expression contains the factor $\nabla_1\,.\,p2$, which is equal to and may be replaced by $-\nabla_2\,.\,p1+\nabla_p\,.\,12$: we have thus

$$Q=Q'+\Omega$$

where omitting the ∇'s

$$Q'=j\,\overline{p1}^{\lambda_1+1}\,\overline{p2}^{\lambda_2-1}\,\overline{p3}^{\lambda_3}\ldots\overline{pm}^{\lambda_m}[12\ldots m]$$
$$\Omega=k\,\overline{p1}^{\lambda_1}\quad\overline{p2}^{\lambda_2-1}\,\overline{p3}^{\lambda_3}\ldots\overline{pm}^{\lambda_m}\,\overline{12}\,[12\ldots m].$$

Now for Ω the sum of the indices $\lambda_1, \lambda_2-1, \lambda_3\ldots\lambda_m$ is σ_p-1, so that by hypothesis Ω is inferior or sharp: that is, the difference $Q-Q'$ is inferior or sharp: so that to prove that Q is inferior or sharp, we have only to prove this of Q', where Q' is derived from Q by increasing by unity the index of $p1$, at the expense of that of $p2$

which is diminished by unity. Such change is possible so long as the index λ_1 has not attained its maximum value, $n - \sigma_1$ or σ_p as the case may be, and there is any other index $\lambda_2, \ldots \lambda_m$ which is not $= 0$: that is we may pass from Q to Q', from Q' to Q'' and so on; and it will be sufficient to show that the last term of the series is inferior or sharp. We thus pass from Q to R, where

$$R = \overline{p\,1}^{\,n-\sigma_1}\, \overline{p\,2}^{\,\lambda_2-\alpha_2} \ldots \overline{p\,m}^{\,\lambda_m-\alpha_m}\, [12 \ldots m]$$

where $\alpha_2 + \alpha_3 \cdots + \alpha_m = n - \sigma_1 - \lambda_1$; or else to

$$R = \overline{p\,1}^{\,\sigma_p}\, [12 \ldots m]\,,$$

according as $n - \sigma_1$ is not greater or is greater than σ_p.

Now let $[12 \ldots m]$ be inferior; suppose it to be so in regard to 1, that is let σ_1 be less than $\frac{1}{2}n$ or $n - \sigma_1$ greater than $\frac{1}{2}n$. Then if σ_p be less than $\frac{1}{2}n$ it is less than $n - \sigma_1$, that is we have for R the last-mentioned form which is inferior in regard to p, viz. R is inferior; if σ_p is equal to or greater than $\frac{1}{2}n$, then R, whichever its form may be, is sharp as to $p\,1$, viz. R is sharp. Hence in either case Q is a sum of terms which are inferior or sharp; that is assuming the theorem for a form for which $\lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_m$ does not exceed a given value $\sigma_p - 1$, the theorem is true for the next succeeding value σ_p; or being true for the case $\sigma_p - 1 = 0$, it is true generally.

Cambridge, 24. April 1872.

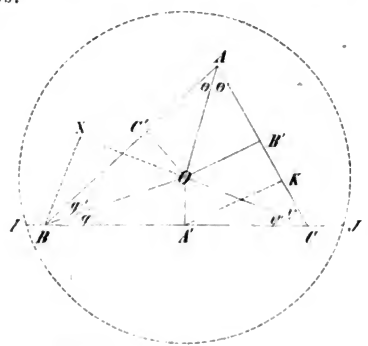
On the Non-Euclidian Geometry.

By A. Cayley, Cambridge.

The theory of the Non-Euclidian Geometry as developed in Dr. Klein's paper „Ueber die Nicht-Euclidische Geometrie" may be illustrated by showing how in such a system we actually measure a distance and an angle and by establishing the trigonometry of such a system. I confine myself to the „hyperbolic" case of plane geometry; viz. the absolute is here a real conic, which for simplicity I take to be a circle; and I attend to the points *within* the circle.

I use the simple letters a, A, .. to denote (linear or angular) distances measured in the ordinary manner; and the same letters with a superscript stroke, $\bar{a}$, $\bar{A}$, .. to denote the same distances measured according to the theory. The radius of the absolute is for convenience taken to be $= 1$, the distance of any point from the centre can therefore be represented as the sine of an angle.

The distance $\overline{BC}$, or say $\bar{a}$, of any two points B, C is by definition as follows:



Radius of circle $= 1$
In ΔABC, sides are a, b, c
angles „ A, B, C
OA, OB, OC are $= \sin p$, $\sin q$, $\sin r$
OA', OB', OC', „ „ $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$
$\sphericalangle BOC$, COA, AOB „ „ α, β, γ.

$$\bar{a} = \tfrac{1}{2}\log\frac{BI\cdot CJ}{BJ\cdot CI}$$

(where I, J are the intersections of the line BC with the circle); that is

$$e^{\bar{a}} + e^{-\bar{a}} \quad \text{or} \quad \cosh\bar{a}$$

$$= \sqrt{\frac{BI\cdot CJ}{BJ\cdot CI}} + \sqrt{\frac{BJ\cdot CI}{BI\cdot CJ}}, \quad = \frac{BI\cdot CJ + BJ\cdot CI}{\sqrt{BI\cdot BJ}\sqrt{CI\cdot CJ}},$$

where the numerator is

$$BI(BJ - BC) + CI(BC + CJ), \quad = BI.BJ + CI.CJ + BC(CI - BI),$$
$$= BI.BJ + CI.CJ + BC^2.$$

Hence taking a for the distance BC, and $\sin q$, $\sin r$, for the distances OB, OC respectively, we have $BI\,.\,BJ = \cos^2 q$; $CI\,.\,CJ = \cos^2 r$, and the formula is

$$\cosh\bar{a} = \frac{\cos^2 q + \cos^2 r + a^2}{2\cos q\cos r}$$

or what is the same thing, taking α for the angle BOC, and therefore $a^2 = \sin^2 q + \sin^2 r - 2\sin q\sin r\cos\alpha$, we have

$$\cosh\bar{a} = \frac{1 - \sin q\sin r\cos\alpha}{\cos q\cos r},$$

In a similar manner, if $\sin\mathfrak{a}$ is the perpendicular distance from O on the line BC (that is $a\sin\mathfrak{a} = \sin q\sin r\sin\alpha$) it can be shown that

$$\sinh\bar{a} = \frac{a\cos\mathfrak{a}}{\cos q\cos r},$$

the equivalence of the two formulae appearing from the identity

$$\cos^2 q\cos^2 r = (1 - \sin q\sin r\cos\alpha)^2 - a^2 + a^2\sin^2\mathfrak{a},$$

which is at once verified.

Next for an angle; we have by definition

$$\bar{A} = \frac{1}{2i}\log\frac{\sin BAI\cdot\sin CAJ}{\sin CAI\cdot\sin BAJ}$$

where AI, AJ are the (imaginary) tangents from A to the circle; or writing for shortness BI &c. instead of BAI &c. (the angular point being always at A)

$$\bar{A} = \frac{1}{2i}\log\frac{\sin BI\cdot\sin CJ}{\sin CI\cdot\sin BJ},$$

consequently

$$e^{i\bar{A}} - e^{-i\bar{A}} = 2i\sin\bar{A}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin BI\cdot\sin CJ}{\sin CI\cdot\sin BJ}} - \sqrt{\frac{\sin CI\cdot\sin BJ}{\sin BI\cdot\sin CJ}}, \quad = \frac{\sin BI\sin CJ - \sin BJ\cdot\sin CI}{\sqrt{\sin BI\cdot\sin BJ}\sqrt{\sin CI\cdot\sin CJ}},$$

where the numerator is

$\sin BI\sin(BJ - BC) - \sin BJ\sin(BI + BC) = \sin BC\sin IJ$, or say $= \sin A\sin IJ$. Moreover taking the distance OA to be $= \sin p$,

and the perpendicular distances from O on the lines AB, AC to be $\sin \mathfrak{c}$ and $\sin \mathfrak{b}$ respectively, then if for a moment the angle IJ is put $= 2\omega$, we have $\sin p \sin \omega = 1$: moreover

$$\sin BI \sin BJ = \sin(\omega - BO) \sin(\omega + BO) = \sin^2\omega - \sin^2 BO;$$

and $\sin p \sin BO = \sin \mathfrak{c}$; that is $\sin BI \sin BJ = \frac{1 - \sin^2 \mathfrak{c}}{\sin^2 p}, = \frac{\cos^2 \mathfrak{c}}{\sin^2 p}$: and similarly $\sin CI \sin CJ = \frac{\cos^2 \mathfrak{b}}{\sin^2 p}$; also

$$\sin IJ = -\sin 2\omega = 2 \sin\omega \cos\omega = \frac{2}{\sin p} \frac{i \cos p}{\sin p};$$

whence the required formula

$$\sin \overline{A} = \frac{\cos p \sin A}{\cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c}},$$

and in the same way, or analytically from this value we have

$$\cos \overline{A} = \frac{\cos A + \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}}{\cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c}},$$

and thence also

$$\tan \overline{A} = \frac{\cos p \sin A}{\cos A + \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}}.$$

In particular, taking the line AC to pass thro' O, or writing in the formula $\mathfrak{b} = 0$, we have $\tan \overline{BO} = \cos p \tan BO = \cos p \tan \theta$; that is $\overline{BO} = \tan^{-1}.\cos p \tan\theta$; and similarly $\overline{CO} = \tan^{-1}.\cos p \tan\theta'$; we ought to have $\overline{A} = \overline{BO} + \overline{CO}$, that is

$$\overline{A} = \tan^{-1}.\cos p \tan\theta + \tan^{-1}.\cos p \tan\theta'$$

which observing that $\sin p \sin\theta = \sin \mathfrak{c}$ and $\sin p \sin\theta' = \sin \mathfrak{b}$, also $A = \theta + \theta'$, is in fact equivalent to the above formula for $\tan \overline{A}$.

Observe in particular that when A is at the centre, p is $= 0$, and the formula becomes $\overline{A} = \theta + \theta', = A$, or say for an angle at the centre, $\overline{O} = O$.

I return to the expression for $\cosh \overline{a}$; in explanation of its meaning let the distances $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ be q, r respetively and let the angle $\overline{BOC}$ be α; to find $\overline{q}$ we have only to take C at O, that is in the formula for $\cosh \overline{a}$ to write $r = 0$, we thus find $\cosh \overline{q} = \frac{1}{\cos q}$: and similarly $\cosh \overline{r} = \frac{1}{\cos r}$ whence also

$$\cos q = \operatorname{sech} \overline{q}, \quad \sin q = i \tanh \overline{q},$$
$$\cos r = \operatorname{sech} \overline{r}, \quad \sin r = i \tanh \overline{r},$$

also, as seen above, $\overline{\alpha} = \alpha$; the formula thus is

$$\cosh \overline{a} = \frac{1 + \tanh \overline{q} \tanh \overline{r} \cos \overline{\alpha}}{\operatorname{sech} \overline{q} \operatorname{sech} \overline{r}}$$
$$= \cosh \overline{q} \cosh \overline{r} + \sinh \overline{q} \sinh \overline{r} \cos \overline{\alpha}$$

or what is the same thing, it is

$$\cos\alpha = \frac{\cosh\bar a - \cosh\bar q\,\cosh\bar r}{\sinh\bar q\,\sinh\bar r},$$

viz. as will presently appear this is the formula for $\cos BOC$ in the triangle BOC.

From the above formulae

$$\cosh\bar a = \frac{1-\sin q\,\sin r\cos\alpha}{\cos q\,\cos r}\quad\text{and}$$

$$\sin\bar A = \frac{\cos p\,\sin A}{\cos\mathfrak{b}\,\cos\mathfrak{c}},\quad \cos\bar A = \frac{\cos A+\sin\mathfrak{b}\,\sin\mathfrak{c}}{\cos\mathfrak{b}\,\cos\mathfrak{c}},$$

and the like formulae for $\bar b$, $\bar c$, $\bar B$, $\bar C$, it may be shown that in the triangle ABC we have

$$\cosh\bar a = \frac{\cos\bar A+\cos\bar B\cos\bar C}{\sin\bar B\sin\bar C}.$$

In fact, substituting the foregoing values, this equation becomes

$$\frac{(1-\sin^2\mathfrak{a})(\cos A+\sin\mathfrak{b}\,\sin\mathfrak{c})+(\cos B+\sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{a})(\cos C+\sin\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{b})}{\sin B\sin C\cos\mathfrak{b}\cos\mathfrak{c}} = \frac{1-\sin q\sin r\cos\alpha}{\cos q\cos r}$$

that is,

$$\cos A+\cos B\cos C-\sin^2\mathfrak{a}\cos A+\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\cos B+\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{c}\cos C+\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}$$
$$=\sin B\sin C\,(1-\sin q\sin r\cos\alpha)$$

or what is the same thing

$$\sin^2\mathfrak{a}\,(\cos B\cos C-\sin B\sin C)+\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}\cos B+\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{c}\cos C+\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}$$
$$=-\sin B\sin C\sin q\sin r\cos\alpha$$

that is

$$(\sin\mathfrak{a}\cos B+\sin\mathfrak{c})(\sin\mathfrak{a}\cos C+\sin\mathfrak{b})=\sin B\sin C(\sin^2\mathfrak{a}-\sin q\sin r\cos\alpha),$$

a relation which I proceed to verify.

We may from the formulae

$$a^2=\sin^2 q+\sin^2 r-2\sin q\sin r\cos\alpha,\quad a\sin\mathfrak{a}=\sin q\sin r\sin\alpha\ \text{\&c.}$$

but, more simply, geometrically as presently shown, deduce

$$\sin\mathfrak{a}\,\cos B+\sin\mathfrak{c}=\frac{1}{a}\sin B\sin q\,(\sin q-\sin r\cos\alpha),$$

$$\sin\mathfrak{a}\,\cos C+\sin\mathfrak{b}=\frac{1}{a}\sin C\sin r\,(\sin r-\sin q\cos\alpha),$$

and thence

$$(\sin\mathfrak{a}\cos B+\sin\mathfrak{c})(\sin\mathfrak{a}\cos C+\sin\mathfrak{b})=\frac{1}{a^2}\sin B\sin C\sin q\sin r\begin{Bmatrix}\sin q\sin r(1+\cos^2\alpha)\\ -\cos\alpha(\sin^2 q+\sin^2 r)\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2}\sin B\sin C\sin q\sin r\,(\sin q\sin r\sin^2\alpha-a^2\cos\alpha)$$

$$=\sin B\sin C\,(\sin^2\mathfrak{a}-\sin q\sin r\cos\alpha)$$

which is the equation in question: for the subsidiary equations used in the demonstration, observe that the four points O, X, A', B lie in

a circle, and consequently that $CO \, . \, CX = CA' \, . \, CB$; or multiplying each side by $\sin C$, then $CO \, . \, CX \, . \sin C = A'K \, . \, CB$, that is

$$\sin r \, (\sin r - \sin q \cos \alpha) \sin C = a \, (\sin \mathfrak{a} \cos C + \sin \mathfrak{b}),$$

and the other of the equations in question is proved in the same manner.

From the formula for $\cosh \bar{a}$ we find

$$\sinh \bar{a} = \frac{1}{\sin \bar{B} \sin \bar{C}} \, \Delta,$$

where

$$\Delta^2 = -\left(1 - \cos^2 \bar{A} - \cos^2 \bar{B} - \cos^2 \bar{C} - 2 \cos \bar{A} \cos \bar{B} \cos \bar{C}\right),$$

whence also

$$\sinh \bar{a} : \sinh \bar{b} : \sinh \bar{c} = \sin \bar{A} : \sin \bar{B} : \sin \bar{C};$$

and we can also obtain

$$\cos \bar{A} = \frac{\cosh \bar{a} - \cosh \bar{b} \cosh \bar{c}}{\sinh \bar{b} \sinh \bar{c}} \; \&c.$$

So that the formulae are in fact similar to those of spherical trigonometry with only $\cosh \bar{a}$, $\sinh \bar{a}$ &c. instead of $\cos a$, $\sin a$ &c. The before mentioned formula for $\cos \alpha$ in terms of $\bar{a}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ is obviously a particular case of the last-mentioned one for $\cos \bar{A}$.

Cambridge, 11. Mai 1872.

Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen.

Von M. Noether in Heidelberg.

Für den Satz, dass sich eine Cremona'sche Ebenentransformation durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen ersetzen lasse, wurden von mir im III. Bd. dieser Annalen, pag. 165, und bald darauf von Rosanes in Borchardt's Journal, Bd. 73, pag. 107 Beweise gegeben. Dieselben zeigen, dass die Summe der Ordnungen der 3 höchsten Fundamentalpunkte der Transformationscurven n^{ter} Ordnung grösser als n ist, und dass folglich durch eine quadratische Transformation, welche diese 3 Punkte als Basispunkte benutzt, die Transformationscurven n^{ter} Ordnung in solche von niedrigerer Ordnung übergeführt werden.

Diese beiden Beweise werden für specielle Lagen der Fundamentalpunkte, in denen drei oder mehrere derselben sich einander in *verschiedenen* Richtungen unendlich nähern, ungenügend, insofern, als durch 3 solche Punkte nicht zerfallende Kegelschnitte überhaupt nicht mehr gelegt werden können. Ich werde nun im Folgenden nachweisen, *dass der Satz von der Zusammensetzung durch quadratische Transformationen auch für solche singuläre Transformationen* gilt. Da die Methode des Beweises der im allgemeineren Falle benutzten, nach einer kleinen Modification, analog wird, so wiederhole ich den früher gegebenen Beweis mit dieser Modification, nach welcher eine dort angewendete geometrische Betrachtung in eine analytische Form umgesetzt wird*).

I.

Die Ordnungen der Fundamentalpunkte der Transformationscurven n^{ter} Ordnung seien mit $i_1, i_2, \ldots.$ bezeichnet, so, dass $i_1 \geqq i_2 \geqq i_3 \geqq \ldots.$. Ich benutze die beiden Gleichungen:

$$n^2 - 1 = \sum_{\varrho} i_{\varrho}^2, \tag{1}$$

$$3(n-1) = \sum_{\varrho} i_{\varrho}, \tag{2}$$

und ich werde der Reihe nach zeigen, dass

*) Auf solche singul. Transformationen wurde ich aufmerksam gemacht durch den Aufsatz von Clebsch über die geradlinigen Flächen vom Geschlecht 0 (diese Annal., Bd. V, pag. 1), deren Abbildung auf der Ebene wegen desselben Umstandes nur bis zu einer gewissen, von der *Lage* der Fundamentalpunkte abhängigen Grenze erniedrigt werden kann.

(3) $$3 i_1 > n,$$

(4) $$i_1 + 2 i_2 > n,$$

(5) $$i_1 + i_2 + i_3 > n.$$

α) Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{n+1}{3} = \frac{\Sigma i_\varrho^2}{\Sigma i_\varrho} \leqq i_1,$$

was der Satz (3) ist.

β) Als Hülfssatz für das Folgende gebrauche ich den Satz: Aus

(6) $$i_\varrho^2 = s_\varrho \,.\, l^2, \quad \text{für} \quad s_\varrho \overline{<} 1,$$

folgt:

(7) $$i_\varrho \geqq s_\varrho \,.\, l,$$

denn (6) giebt direct $i_\varrho^2 \geqq s_\varrho \,.\, l i_\varrho$.

Angenommen, $i_1 + 2 i_2$ sei $\leqq n$. Ich setze in (6) und (7)

$$l = \tfrac{1}{2}(n - i_1);$$

dann giebt der Hilfssatz für die Formeln (1) und (2):

$$n^2 - 1 = i_1^2 + l^2 \Sigma' s_\varrho,$$
$$3(n-1) > i_1 + l \Sigma' s_\varrho,$$

wobei sich das Zeichen Σ' auf alle Fundamentalpunkte, ausser dem $i_1$fachen, bezieht. Die Elimination von $\Sigma' s_\varrho$ aus diesen beiden Formeln liefert

$$1 \geqq \tfrac{1}{2}(n - i_1)(3 i_1 - n + 3).$$

Diese Formel involvirt aber, wegen (3), einen Widerspruch, und es muss wenigstens der $i_2$fache Punkt von höherer Ordnung, als der $\left(\frac{n - i_1}{2}\right)^{\text{ten}}$, sein; was der Satz (4) ist.

γ) Jetzt nehme ich an, $i_1 + i_2 + i_3$ sei $\leqq n$. Dann setze ich in (6) und (7)

$$l = n - i_1 - i_2,$$

und finde durch Anwendung dieser Formeln auf die Gleichungen (1) und (2):

$$n^2 - 1 = i_1^2 + i_2^2 + l^2 \Sigma'' s_\varrho,$$
$$3(n-1) \geqq i_1 + i_2 + l \Sigma'' s_\varrho,$$

wobei sich das Zeichen Σ'' auf alle Fundamentalpunkte, die beiden ersten ausgenommen, bezieht. Die Elimination von $\Sigma'' s_\varrho$ liefert hier

$$1 \geqq 2(i_1 i_2 - l^2) + 3l.$$

Aber da wegen (4)

$$i_1 \geqq i_2 > l,$$

so involvirt diese Formel, also auch die obige Annahme*), einen Widerspruch, und der Satz (5) ist bewiesen.

---

*) In meinem oben citirten Beweis war nur die Annahme $i_3 = n - i_1 - i_2$ widerlegt worden; indess sieht man dort geometrisch, dass die Annahme $i_3 < n - i_1 - i_2$

II.

Auch wenn die Fundamentalpunkte der Transformation *besondere Lagen* einnehmen sollten, bleiben immer die Gleichungen (1) und (2) bestehen; mit andern Worten: jede eindeutige Ebenentransformation ist eine Cremona'sche. Hierbei können insbesondere zwei Fälle eintreten: *erstens* können $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ oder mehr der Fundamentalpunkte auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, und *zweitens* können mehrere der Fundamentalpunkte sich einem unter ihnen von *verschiedenen* Richtungen her unendlich nähern.

Der erstere Fall lässt sich, da die 3 höchsten Fundamentalpunkte wegen Formel (5), die ebenso wie (3) und (4) auch hier bestehen bleibt, nie auf einer Geraden liegen können, immer mit Benutzung dieser Punkte behandeln, wobei man entweder nach und nach die Singularität aufhebt, oder ebenfalls auf den zweiten Fall geführt wird. Dieser allein ist daher besonders zu behandeln.

Aber auch die Untersuchung dieses Falles lässt sich noch bedeutend reduciren. Sei der höchste Fundamentalpunkt ein j-facher, und mögen sich m Fundamentalpunkte, bezügl. von den Ordnungen $i_1, i_2, \ldots i_m$, dem j-fachen von m verschiedenen Richtungen her unendlich nähern. Ein solcher i_ϱ-facher Punkt wird dann i_ϱ Zweige des j-fachen Punktes absorbiren, so dass sich, wenn

$$\Sigma i_\varrho > j,$$

der j-fache Punkt in einen Punkt von höherer — j'-facher — Vielfachheit verwandeln muss. Dann aber fasst man einfacher die singuläre Transformation als einen besondern Fall einer solchen Transformation auf, bei welcher der höchste Fundamentalpunkt ein j'-facher ist, an welchen eine Reihe von i_ϱ'-fachen Punkten heranrücken, so, dass $\Sigma i_\varrho' \leqq j'$. Wir dürfen daher direct für unseren Fall die Annahme machen:

$$\Sigma i_\varrho \overline{\overline{<}} j \text{ *)}.$$

Die Transformationscurven n^{ter} Ordnung mögen nun als höchsten Fundamentalpunkt den j-fachen Punkt, ferner m Fundamentalpunkte von

---

für den Beweis noch günstiger ist. Auch war dort, was übrigens auf dasselbe hinauskommt, an Stelle der Gleichung (1) die für das Geschlecht der Transformationscurven benutzt.

*) So erhält man, wenn 3 Doppelpunkte in bestimmten Grenzrichtungen zusammenrücken, einen 3-fachen Punkt, dessen 3 Zweige, da die Tangenten der erwähnten Richtungen vierpunktig schneiden, feste Richtungen haben; und es lässt sich die Transformation durch Curven 4ter Ordnung mit 3 doppelten und 3 einfachen Fundamentalpunkten, bei welcher die 3 doppelten Punkte zusammenrücken, auffassen als specieller Fall der durch Curven 4ter Ordnung mit 1 3-fachen und 6 einfachen Fundamentalpunkten, von denen 3 in den 3-fachen Punkt rücken.

den Ordnungen $i_1, i_2, \ldots i_m$, welche von *verschiedenen* Richtungen her an den j-fachen Punkt unendlich nahe heranrücken, und zwar so, dass

$$i_1 \geqq i_2 \geqq \ldots \geqq i_m,$$

(8) $$\Sigma i_\varrho \overline{\overline{<}} j,$$

und endlich eine Reihe von h_λ-fachen Fundamentalpunkten besitzen, so, dass

$$i_2 > h_1 > h_2 \geqq \ldots.$$

Diese letzteren Punkte können selbst noch, alle oder theilweise, auf den m i_ϱ-fachen Zweigen des j-fachen Punktes unendlich heranrücken; indess hat man dann, wenn ein h_λ-facher Punkt auf einem i_ϱ-fachen Zweige heranrückt:

$$h_\lambda < i_\varrho.$$

Hier werde ich nun zeigen, dass

(9) $$j + 2h_1 > n$$

ist.

Dann kann man also, wenn der h_1-fache Punkt vom j-fachen endlich entfernt ist, den j-fachen, i_1-fachen und h_1-fachen Punkt, wenn aber der h_1-fache Punkt in dem i_ϱ-fachen Zweige heranrückt, den j-fachen, den i_ϱ-fachen und den h_1-fachen, d. h. drei auf einem Curvenzweige consecutive Punkte, zur quadratischen Transformation benutzen, und wird die Ordnung der Transformationscurven reduciren auf $2n - j - i_1 - h_1$, bez. auf $2n - j - i_\varrho - h_1$, die beide $< n$ werden.

Die Gleichungen (1) und (2) werden hier

$$n^2 - 1 = j^2 + \sum_\varrho i_\varrho^2 + \sum_\lambda h_\lambda^2$$

$$3(n-1) = j + \sum_\varrho i_\varrho + \sum_\lambda h_\lambda.$$

Angenommen, $j + 2h_1$ sei $\leqq n$. Ich setze

$$i_\varrho^2 = s_\varrho \cdot i_1^2, \qquad h_\lambda^2 = \sigma_\lambda \cdot \left(\frac{n-j}{2}\right)^2,$$

wobei $s_\varrho \overline{\overline{<}} 1$, $\sigma_\lambda \overline{\overline{<}} 1$ wird. Daraus folgt:

$$i_\varrho \geqq s_\varrho \cdot i_1, \qquad h_\lambda \geqq \sigma_\lambda \cdot \frac{n-j}{2}.$$

Die beiden Grundgleichungen gehen dadurch über in

$$n^2 - 1 = j^2 + i_1^2\, \Sigma s_\varrho + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 . \Sigma \sigma_\lambda$$

$$3(n-1) \geqq j + i_1 \Sigma s_\varrho + \frac{n-j}{2} . \Sigma \sigma_\lambda .$$

Durch Elimination von $\Sigma\sigma_\lambda$ ergiebt sich nun weiter

$$1 > \frac{n-j}{2} \cdot (3j - n + 3) - \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) i_1 \Sigma s_\varrho .$$

Da, nach (4), $i_1 - \frac{n-j}{2}$ eine positive Grösse ist, so kann man in dieser Ungleichung $i_1 \Sigma s_\varrho$ ersetzen durch j, für das die Beziehungen gelten

$$j > \Sigma i_\varrho > i_1 \Sigma s_\varrho,$$

und die Ungleichung geht über in

$$1 > \frac{n-j}{2} \cdot (2j - n + 3) + j(n - j - i_1).$$

Diese Ungleichung involvirt aber einen Widerspruch. Denn aus

$$j + i_1 + i_2 > n,$$

$$i_1 + i_2 \leq j,$$

folgt

$$2j > n,$$

und ferner ist

$$n > j$$

$$n > j + i_1.$$

Daher muss die Beziehung (9) existiren, und es ist der folgende Satz für alle Fälle bewiesen:

Irgend zwei Gleichungen zwischen zwei Grössen x, y und zwei Grössen ξ, η, welche erlauben, x und y als rationale Functionen von ξ und η, und umgekehrt, auszudrücken, lassen sich ersetzen durch eine Reihenfolge von Systemen, von denen jedes aus zwei, in zwei Reihen von je 2 Grössen linearen Gleichungen besteht; also durch zwei bilineare Gleichungen zwischen x, y und Grössen $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, ferner durch zwei solche zwischen $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ und $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, etc., endlich durch zwei solche zwischen $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ und ξ, η.

Heidelberg, den 21. Mai 1872.

Ueber die Cylinderfunction.

Von W. Ermakoff in Heidelberg.

Im gegenwärtigen Bande dieser Annalen (pag. 135) hat Herr F. G. Mehler einen Beweis geliefert für die Richtigkeit des dreifachen Neumann'schen Integrals:

$$f(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int\int\int f(r, \varphi)\, J\left(n\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)}\right) \partial\varphi\, r\,\partial r\, n\,\partial n,$$

mit den Grenzen: $\varphi = 0$ bis 2π, $r = 0$ bis ∞, $n = 0$ bis ∞.

Ich will hier zeigen, dass dieses Integral durch eine einfache Transformation des Fourier'schen Integrals

$$F(x_1, y_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \cos\{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1)\} \partial x \, \partial y \, \partial \alpha \, \partial \beta$$

erhalten werden kann. Zunächst mögen die Coordinaten α, β in Polar-Coordinaten umgewandelt werden. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

$$x - x_1 = R \cos w, \quad y - y_1 = R \sin w,$$

$$\alpha = n \cos \lambda, \quad \beta = n \sin \lambda.$$

Durch diese Transformation erhalten wir:

$$F(x_1, y_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \, G \, \partial x \, \partial y \, n \partial n,$$

wo

$$G = \int_0^{2\pi} \cos\{nR \cos(\lambda - w)\} \partial \lambda.$$

Nun ist leicht zu zeigen, dass

$$G = \int_0^{2\pi} \cos(nR \cos \lambda) \partial \lambda = 2 \int_0^{\pi} \cos(nR \cos \lambda) \partial \lambda$$

$$= 2 \int_0^{\pi} e^{inR \cos \lambda} \partial \lambda = 2\pi J(nR).$$

Das Fourier'sche Integral nimmt also folgende Gestalt an:

$$F(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) J(nR) \partial x \, \partial y \, n \partial n.$$

Führen wir jetzt statt der Coordinaten x, y, x_1, y_1 Polarcoordinaten ein:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin \varphi_1,$$

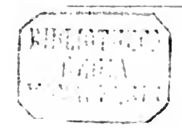
$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\varphi - \varphi_1)},$$

und setzen wir dementsprechend:

$$F(x, y) = f(r, \varphi), \quad F(x_1, y_1) = f(r_1, \varphi_1),$$

so gelangen wir sofort zu dem dreifachen Neumann'schen Integral, wie es im Anfange dieser Notiz angegeben ist.

Heidelberg, Mai 1872.



INHALT.

Verantwortliche Redaction: A. Clebsch und C. Neumann.



